Comportement et stabilité des régulateurs contenant des éléments à caractéristique non linéaire

(Précédé d'un aperçu de la méthode de Nyquist et des méthodes dérivées
appliquées à l'hydraulique.)

Behaviour and stability of governors with elements of non-linear characteristics

(Preceded by an outline of the Nyquist method and methods derived from it applied to hydraulics.)

PAR R. MEYER

INGÉNIEUR AUX ÉTABLISSEMENTS NEYRPIG

(Voir la Houille Blanche, n° 3, 1952 p. 394 et n° 5, 1952, p. 665)

Etude sommaire de quelques exemples d'installations contenant des éléments non linéaires pour illustrer la méthode d'étude décrite dans les n°s 3-1952 et 5-1952 de la Houille Blanche. Comparaison des résultats avec ceux obtenus par ailleurs (dans les quelques cas où de tels résultats existaient jusqu'à présent).

Plusieurs points sont particulièrement à noter :

1. *Etude d'un régulateur par tout ou rien accélératymétrique de conception simple : l'adjonction d'un nouveau relai à un régulateur par tout ou rien ordinaire permet de réduire considérablement le degré d'asservissement donc l'erreur « statique ».*

2. *Méthode d'étude simple des installations presque linéaires et munies de régulateurs contenant des relais par tout ou rien asservis ou non. Cette méthode est apparentée à celle dite des « séparatrices » voir [5] et [7]) pour les installations linéaires.*

3. *Etude d'installations typiques munies de régulateurs par tout ou rien ordinaires.*

4. *La condition de stabilité peut être radicalement transformée par la présence d'imperfections même infiniment petites.*

Brief study of some examples of installations having non-linear elements by way of illustrating the study method described in nos 3 and 5, 1952 of la Houille Blanche. Comparison of the results with those obtained elsewhere. (in the few cases where, up to now, such results existed).

Several points are to be noted in particular.

1.—*Study of an acceleration head, on-and-off governor of simple design : the addition of a further relay to an ordinary on-and-off governor makes it possible to reduce the degree of feedback, hence the "static" error, to a considerable extent.*

2.—*Simple study method for almost linear installations equipped with governors having on-and-off relays which are or are not feedback. This method is similar to that of the so-called "méthode des séparatrices (separators)" [5; 7] which has been developed for linear installations.*

3.—*Study of typical installations equipped with ordinary, on-and-off governors.*

4.—*The stability condition may be radically altered by the presence of even infinitely small defects.*

TROISIÈME PARTIE*

SOMMAIRE

VI. — EXEMPLES D'APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DE NYQUIST, QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ÉLÉMENTS NON LINÉAIRES.

VI-1. — Cas élémentaires où les résultats sont en partie connus par ailleurs.

VI-11. — *Régulateur direct de niveau avec jeu et adduction par conduite courte.*

VI-12. — *Régulateur par tout ou rien avec adduction par conduite unique et à coups de béliet en masse.*

VI-2. — Cas solubles uniquement par la méthode de NYQUIST généralisée.

VI-21. — *Régulateur par tout ou rien et adduction par conduite unique à coups de béliet en onde.*

VI-22. — *Régulateur par tout ou rien et adduction comprenant une cheminée d'équilibre.*

VI-23. — *Régulateur à vitesse proportionnelle à l'écart et liaison à jeu.*

VII. — Résumé final et conclusions.

VI. — EXEMPLES D'APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DE NYQUIST. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ÉLÉMENTS NON LINÉAIRES.

Nous avons exposé, dans les numéros 3 et 5/1952 de *la Houille Blanche* la méthode que nous préconisons pour l'étude des installations à réglage automatique contenant des éléments à caractéristique non linéaire. Rappelons que jusqu'à présent il n'existait pas de méthode générale permettant d'étudier ces installations. Seules certaines installations très simples et très peu employées en pratique pouvaient être abordées. La méthode nouvelle préconisée ici permet d'étudier, plus ou moins rapidement et plus ou moins complètement, la plupart des installations que l'on rencontre en pratique. Nous allons l'employer ici à titre d'exemple pour analyser certaines propriétés de dispositifs non linéaires intervenant souvent dans les installations courantes. Comme on le sait, l'idéal en matière de régulation serait de trouver des *formules littérales*, traduisant les principales propriétés des diverses installations que l'on peut concevoir ou rencontrer. Malheureusement, les installations réelles sont souvent trop compliquées, et il serait illusoire de vouloir chercher des formules générales. Les problèmes qu'on peut résoudre en régulation sont de deux espèces :

D'abord on peut chercher à connaître les principales propriétés des divers dispositifs susceptibles d'être employés; ce sont là des problèmes *littéraux*, mais plus simples que les études

globales d'installations réelles. Souvent ils consistent en l'étude de schémas suffisamment simples pour être facilement accessibles au calcul, mais suffisamment près de la réalité pour permettre de reconnaître l'influence des divers paramètres et comparer divers dispositifs de conception voisine;

D'autre part on peut étudier des installations plus ou moins déterminées numériquement et chercher les « meilleures » valeurs à donner aux paramètres restant libres.

Nous avons montré, dans le numéro 5/1952 de *la Houille Blanche*, page 681, comment on pouvait étudier, au moyen de la méthode préconisée ici, une installation donnée numériquement. Dans la présente partie de notre étude, nous allons montrer comment cette méthode peut servir à étudier les propriétés générales de certains dispositifs non linéaires. En plus, nous comparerons les résultats obtenus par notre méthode aux résultats connus par ailleurs pour les quelques cas où il existe des résultats. On se rappelle en effet que la méthode proposée est une méthode approchée, dont nous avons néanmoins montré théoriquement que le degré d'approximation obtenu était très satisfaisant en pratique.

Nous allons étudier plus particulièrement les propriétés des régulateurs par tout ou rien, et des transmissions ayant des imperfections équivalentes à un jeu. Pour étudier spécifiquement ces propriétés, nous simplifierons les installa-

* Cf. *la Houille Blanche*, n° 3-1952, p. 394; n° 5-1952, p. 665.

tions, bien plus qu'il ne serait nécessaire, pour permettre l'application de la méthode de NYQUIST généralisée. En effet, même les calculs relativement simples exposés ici apportent des résultats nouveaux et intéressants. On pourrait graduellement augmenter les difficultés de l'étude en se rapprochant de plus en plus de la réalité et faire une étude beaucoup plus poussée de certaines catégories d'installations. Une telle étude (même littérale) serait possible, mais sortirait du cadre d'une simple présentation de méthode.

Dans les exemples traités ici, nous linéariserons tous les éléments, sauf les régulateurs à tout ou rien et les jeux. La linéarisation est pour les problèmes *littéraux* une simplification énorme; elle l'est beaucoup moins pour les problèmes numériques. Il en est de même des autres simplifications utilisées ici.

VI-1. — CAS ÉLÉMENTAIRES OU LES RÉSULTATS SONT EN PARTIE CONNUS PAR AILLEURS

VI-11. — Régulateur direct de niveau avec jeu et adduction par conduite courte

(Voir fig. 1)

Cette installation peut comprendre ou non une conduite d'adduction. Nous étudierons le cas

FIG. 1

où l'inertie de l'eau dans l'adduction est négligeable. L'étude de problèmes analogues, où l'on a tenu compte de l'inertie de l'eau, montre que celle-ci est négligeable si le nombre $\frac{L}{g\sigma} \frac{Q}{H}$ est petit devant la base de temps de l'installation (cf. fréquence de coupure, § II-3) *.

Cette installation peut servir à « briser » la charge (elle diminue considérablement la charge dans le système à l'aval du bassin) ou à mainte-

nir un niveau (ou un débit) constant. Le niveau dans la retenue peut varier beaucoup tout en restant constant pendant les manœuvres du régulateur. Par exemple : variations saisonnières.

Nous étudierons le cas d'une installation munie d'un régulateur direct, et nous admettrons que les imperfections de l'installation sont équivalentes à un jeu dans la transmission entre le niveau dans le bassin et l'entrée du régulateur. On voit facilement que, parmi ces imperfections, se classent par exemple d'autres jeux (entre le régulateur et la vanne, etc.) et certains frottements secs (ceux de la liaison entre le niveau et le régulateur, etc.).

Le phénomène de réglage est régi par les équations suivantes :

— Remplissage du bassin :

$$S \frac{dN_1}{dt} = q_s - q_e$$

S : surface du bassin.

N_1 : niveau dans le bassin.

q_s : débit sortant du bassin.

q_e : débit entrant.

— Loi de l'orifice de remplissage :

$$q_e = KY$$

Y : ouverture relative de la vanne.

K : coefficient de débit de la vanne.

— Loi de la transmission avec jeu :

$$N_2 = f(N_1)$$

FIG. 2. — Si N_1 croît, la liaison se fait selon D_1 ; dans le cas contraire, selon D_2 . Aux changements de sens de variation de N_1 , le point figuratif décrit une horizontale entre D_1 et D_2 .

Cette loi est définie par la figure 2 où les droites D_1 et D_2 sont :

$$N_2 = N_1 \pm \beta$$

* Les paragraphes I, II, III, IV ont été publiés dans la Houille Blanche, n° 3-1952. Le paragraphe V dans la Houille Blanche, n° 5-1952.

S'il n'y a pas d'autres indications, les références se rapportent toujours à ces articles-là.

N_2 : niveau tel que le « voit » le régulateur à travers la liaison :

β : jeu *

(Voir aussi à ce sujet § V-232.)

— *Loi de fonctionnement du régulateur :*

Régulateur par tout ou rien :

$$\frac{dY}{dt} = -\varepsilon V_0$$

ε étant le signe de $N_2 - mY$.

m : degré d'asservissement.

Régulateur à vitesse proportionnelle à l'écart :

$$\frac{dY}{dt} = -K_0 (N_2 - mY)$$

Nous traiterons ici le cas du régulateur par tout ou rien qui est le « moins linéaire » (l'autre cas se traite de la même façon).

a) *Méthode directe :*

On élimine dt entre :

$$\frac{dY}{dt} = -\varepsilon V_0 \quad \text{et} \quad S \frac{dN_1}{dt} = q_e - q_s$$

On étudie le phénomène de réglage dans les plans N_1 ; Y et N_1 ; N_2 .

On a :

$$S \frac{dN_1}{dY} = -\frac{q_e - q_s}{\varepsilon V_0}$$

Si q_s est constant, on peut écrire :

$$q_e - q_s = KY - q_s = K(Y - Y_0)$$

avec :

$$Y_0 = \frac{q_s}{K}$$

On en tire :

$$N_1 - N_{10} = -\varepsilon \frac{K}{2S V_0} (Y - Y_0)^2$$

N_{10} étant une constante d'intégration.

Le phénomène est alors le suivant : initialement, ε a un certain signe et le point figuratif décrit une parabole. Quand $N_2 - mY$, c'est-à-dire $N_1 \pm \beta - mY$ change de signe, ε change aussi de

signe, et le point figuratif décrit une nouvelle parabole. L'équation de cette nouvelle parabole contient une nouvelle valeur N_{10} qui doit être définie de façon que la nouvelle parabole débute au point $N.Y$, auquel l'ancienne s'est arrêtée. La condition qui détermine N_{10} est linéaire et il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple pratique :

$t < 0$; $q_e = q_s$; Y et N sont constants,

$t = 0$; q_s varie brusquement de q_{10} à q_0 ,

$t > 0$; $q_s = q_0$.

Dans ce cas, le phénomène de réglage est le suivant (voir fig. 3 et 4). A l'instant $t = 0$, le point figuratif est sur le segment AB , c'est-à-dire que la valeur $(N_2 - mY)$ est nulle et que N_1 est compris entre $N_2 + \beta$ et $N_2 - \beta$ (dans la zone d'insensibilité du jeu). Admettons que le point figuratif soit en C . Puisque q_0 est inférieur à q_{10} , N_1 commence à augmenter : le point figuratif se déplace de C en B à l'intérieur de la zone

FIG. 3

FIG. 4

* Page 675, n° 5-1952 de la Houille Blanche. Nous avons posé : jeu = 2β .

d'insensibilité. Le régulateur ne reçoit pas d'ordre et ne bouge pas.

En B, la quantité $N_2 - mY$ devient positive et le régulateur commence à fonctionner. Le point figuratif décrit une parabole :

$$N_1 - N_0 = -\frac{K}{2SV_0} (Y - Y_0)^2$$

N_0 étant à déterminer de façon que la parabole passe au point B. Au point F, N_1 atteint un maximum, puis le point figuratif décrit FD. Dans le plan N_1, Y nous avons également schématisé le trajet du point N_2, Y en pointillé (F → D'). A partir de D, le point figuratif décrit DE. En E, ε change de signe, d'où une nouvelle parabole, dont la constante d'intégration est à déterminer par la condition exprimant que la nouvelle parabole passe au point E. Et ainsi de suite.

Cherchons les cycles limites possibles.

Dans le plan N_1, Y , il ne peut exister que des cycles limites ayant la forme représentée sur la figure 5. P_1 et P_2 sont deux paraboles symétriques. Le point N_2, Y décrit le trajet en pointillé (analogue à celui de la figure 3). On voit que cette disposition n'est possible que si le point B, qui est sur la verticale de M, est à droite du point A, qui est sur l'horizontale de N. Dans le cas contraire, le mouvement a l'allure représentée sur les figures 6 et 7. En A' on a $N_2 - mY = 0$. On va montrer que le mouvement ultérieur se fait obligatoirement à Y constant. Comme le point figuratif dans le plan N_1, N_2 est dans la zone d'insensibilité, N_2 est constant. On en conclut que $\frac{dY}{dt} > 0$ est incompatible avec $N_2 - mY < 0$; de même $\frac{dY}{dt} < 0$ et $N_2 - mY > 0$.

FIG. 5

FIG. 6

FIG. 7

Donc il faut que :

$$\frac{dY}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad N_2 - mY = 0$$

ce qui est d'ailleurs compatible, N_1 varie puisque $q_s - q_e \neq 0$. Donc le point figuratif décrit A'C. On s'aperçoit de proche en proche que le mouvement tend vers $Y = Y_0$; il ne peut pas y avoir de cycle limite mais il y a stabilité pure et simple. La limite entre les deux cas est obtenue quand les points A et B de la figure 5 sont confondus, on a alors :

$$\beta = \frac{4m^2 V_0 S}{K}$$

Il y a cycle limite si :

$$\beta > \frac{4 m^2 V_0 S}{K}$$

Son amplitude est alors de $\frac{\beta}{m}$ en Y et de $\frac{K \beta^2}{2 S V_0 m^2}$ en N.

b) Méthode par l'analyse harmonique :

Rappelons qu'elle consiste (pour les régulateurs par tout ou rien) à déterminer le déphasage total que subit le fondamental d'une oscillation qui parcourt toute la boucle. Il y a cycle limite si ce déphasage est égal à $-\pi + 2k\pi$. La boucle est représentée sur la figure 8.

FIG. 8

Pour rechercher ce déphasage, on peut admettre en première approximation qu'il est égal à la somme des déphasages de chaque élément auquel on injecte l'excitation $A \cos \omega t$ (voir § V-232). En plus, on peut schématiser plus ou moins bien les éléments. En particulier une excitation $A \cos \omega t$ à l'entrée du régulateur donne à sa sortie un mouvement en « triangle » (voir fig. 9).

FIG. 9

Ce mouvement est réinjecté à l'entrée par l'asservissement. On peut le schématiser par son fondamental. De même, on peut schématiser plus ou moins bien le jeu. Toutes ces simplifications ne sont pas nécessaires pour l'application de la méthode, mais elles rendent les calculs littéraires plus aisés. Nous les ferons ici afin de montrer qu'avec un minimum de calcul, le phénomène est encore assez correctement représenté, même si on schématise très grossièrement l'installation. Dans ce cas on a les déphasages suivants :

Régulateur :

$$\varphi = -\arccos \frac{4}{\pi} \frac{m V_0}{\omega |N_2|} \quad (\text{voir § V-232})$$

Bassin : $\varphi = -\pi/2$

Liaison : $\varphi = -\arcsin \frac{\beta}{|N_1|}$

(Voir § V-232.)

D'où un cycle limite si :

$$\frac{4}{\pi} \frac{m V_0}{\omega |N_2|} = \frac{\beta}{|N_1|}$$

Le régulateur par tout ou rien impose à chaque fréquence une amplitude du cycle limite (comme on l'a déjà vu au § V-42). On peut donc calculer les amplitudes de N_1 et N_2 en fonction de ω ; d'où trois équations dont on peut tirer les caractéristiques du cycle limite. Nous allons opérer un peu autrement en calculant simplement l'amplitude de N_1 en fonction de ω . On a successivement :

$$|Y| = \frac{4}{\pi} \frac{V_0}{\omega} \quad (\text{voir § V-232})$$

$$|Q| = K |Y| = K \frac{4}{\pi} \frac{V_0}{\omega}$$

$$|N_1| = \frac{|Q|}{S \omega} = \frac{4}{\pi} \frac{V_0 K}{S \omega^2}$$

D'où, par l'élimination de ω :

$$\left(\frac{|N_1|}{\beta} \right)^3 = \frac{\pi}{4} \frac{\beta}{V_0 m^2 S} \left(\frac{|N_2|}{\beta} \right)^2 \quad (1)$$

D'autre part, la transmission avec jeu assure une relation entre $|N_1|$ et $|N_2|$ (voir § V-232).

$$\frac{|N_2|}{|N_1|} \neq 1 - 0,62 \frac{2\beta}{|N_1|} - 0,38 \left(\frac{2\beta}{|N_1|} \right)^2 \quad (2)$$

Il y a cycle limite possible si les deux relations entre $\frac{|N_1|}{\beta}$ et $\frac{|N_2|}{\beta}$ (1) et (2) admettent un groupe de racines réelles. Ces deux relations se traduisent par deux courbes dans le plan $|N_1|/\beta; |N_2|/\beta$. L'allure de ces courbes est donnée par la figure 10. La courbe C_1 est fixe, la courbe C_2 dépend d'un paramètre : $\frac{\beta}{V_0 m^2 S}$.

Il y a un cycle limite possible si les deux courbes se coupent. On pourrait même croire qu'il y ait alors deux cycles limites, mais l'un provient de racines étrangères introduites par le calcul

* Les deux barres || signifient « amplitude de ».

(voir à ce sujet une discussion faite à la fin du prochain paragraphe). La limite entre les cas où

FIG. 10

il existe un cycle limite et les cas où il n'en existe pas est donnée par la condition de tangence des courbes C_1 et C_2 . Cette condition est évidemment de la forme :

$$\frac{\beta}{V_0 m^2} \frac{K}{S} = C_{ste}$$

Le calcul exact est faisable mais long. On obtient environ :

$$\frac{\beta}{V_0 m^2} \frac{K}{S} = 5,1 \dots$$

D'où :

$$\beta = 5,1 \dots \frac{V_0 m^2 S}{K}$$

Pour l'amplitude du cycle limite en N_1 , on trouve :

$$|N_1| \neq \frac{\pi}{4} \frac{K \beta^2}{S V_0 m^2}$$

(la valeur réelle étant un peu plus petite).

On voit que, malgré les diverses approximations faites, les résultats ne sont pas loin de ceux trouvés par la méthode directe. En particulier, leur forme est bien la même (et celle-ci n'est pas la seule possible dimensionnellement). Si, dans un cas particulier (numérique), on prend les fonctions de transfert plus exactes pour le jeu et aussi pour le régulateur, on trouve des résultats extrêmement voisins de ceux trouvés par la méthode directe.

VI-12. — Régulateur par tout ou rien * avec adduction par conduite unique et à coups de bélien en masse (Fig. 11)

L'installation est voisine de celle schématisée à la figure 1; néanmoins, ici, la conduite d'adduction est plus longue et l'inertie de l'eau dans celle-ci n'est plus négligeable. Bien que cette installation soit très simple, les méthodes habituelles ne permettent plus de l'étudier. Cependant, on connaît la condition de stabilité par expérience dans le cas où les pertes de charge dans la conduite sont négligeables. On sait que la condition de stabilité est alors la même que celle d'une installation identique linéarisée et équipée avec un certain régulateur à vitesse proportionnelle à l'écart. Ce régulateur doit établir la relation :

$$\frac{dY}{dt} = -K_0 (N - mY)$$

où K_0 tend convenablement vers 0 (ce point sera précisé par la suite).

FIG. 11

Etudions d'abord l'installation avec le régulateur par tout ou rien. Les équations du phénomène sont dans ce cas :

— Remplissage du bassin (mêmes notations qu'au § VI-11).

$$S \frac{dN}{dt} = q_s - q_e$$

— Coup de bélien dans l'adduction.

$$H_s - \frac{L}{g \sigma} \frac{dq_e}{dt} = K' \frac{q_e^2}{Y^2}$$

H_s : charge statique.

L : longueur de la conduite.

* Les régulateurs par tout ou rien asservis ne sont pas des éléments « algébriques » (voir § V-234) comme on pourrait le croire *a priori*. Ils ne peuvent donc pas être étudiés par la méthode de MM. DUTILH et KOCHENBURGER ([3] et [4]).

σ : section de la conduite.

K' : coefficient de perte de charge de l'orifice.

Régulateur : $\frac{dY}{dt} = -\varepsilon V_0$

ε étant le signe de $N - mY$.

Pour les raisons exposées plus haut, nous linéariserons l'équation du coup de bélier dans la conduite. On peut d'ailleurs remarquer en passant que cette dernière non-linéarité est du type « linéarisable » (voir § V-41), tandis que l'équation du régulateur est du type « non linéarisable ». On peut dire que cette dernière non-linéarité est beaucoup plus « importante » que l'autre.

Nous posons donc :

$$q_e - q_s = \Delta q$$

$$N - N_0 = \Delta N$$

$$Y - Y_0 = y$$

N_0 et Y_0 étant les valeurs de N et Y en régime permanent si le débit est q_s .

Près de ce point de fonctionnement on a les fonctions de transfert suivantes :

Pour le bassin :

$$S j \omega \Delta N = \Delta q \quad (3)$$

Pour la conduite d'adduction :

$$\Theta j \omega \frac{\Delta q}{q_s} + \frac{2 \Delta q}{q_s} = \frac{2 y}{Y_0} \quad (4)$$

dans laquelle :

$$\Theta = \frac{L}{g \sigma H_s} q_s$$

Les déphasages sont donc :

Pour le bassin : $-\pi/2$

Pour la conduite : $-\arctg \frac{\Theta \omega}{2}$

Pour le régulateur : $-\arccos \frac{4}{\pi \omega} \frac{m V_0}{|\Delta N|}$

On obtient la condition de cycle limite comme précédemment :

$$-\pi/2 - \arctg \frac{\Theta \omega}{2} - \arccos \frac{4}{\pi \omega} \frac{m V_0}{|\Delta N|} = -\pi + 2k\pi$$

D'où :

$$\frac{4}{\pi \omega} \frac{m V_0}{|\Delta N|} = \frac{2}{\sqrt{4 + \Theta^2 \omega^2}} \quad (5)$$

Comme précédemment, on peut chercher l'amplitude du cycle limite en N en fonction de ω . On obtient successivement les amplitudes suivantes :

Le régulateur donne :

$$|Y| = \frac{4}{\pi} \frac{V_0}{\omega}$$

La conduite :

$$|\Delta q| = \frac{2}{\sqrt{4 + \Theta^2 \omega^2}} \frac{q_s}{Y_0} |Y|$$

Le bassin :

$$|\Delta N| = \frac{1}{S \omega} |\Delta q|$$

d'où :

$$|\Delta N| = \frac{4}{\pi} \frac{V_0}{\omega} \frac{2}{\sqrt{4 + \Theta^2 \omega^2}} \frac{q_s}{Y_0} \frac{1}{S \omega} \quad (6)$$

En éliminant $|\Delta N|$ entre les relations (5) et (6), on obtient l'équation donnant les pulsations des cycles limites possibles :

$$\Theta^2 \omega^2 = \frac{2 \Theta q_s}{S m Y_0} - 4$$

Pour qu'il y ait un cycle limite possible, il faut que les racines en ω de cette équation soient réelles, donc :

$$\Theta q_s > 2 m S Y_0$$

Si $\Theta q_s < 2 m S Y_0$, on se rend compte que la somme des déphasages successifs n'atteint jamais $-\pi$; l'installation est alors absolument stable.

Si on remplace le régulateur par tout ou rien par le régulateur à vitesse proportionnelle à l'écart défini plus haut, il faut joindre aux équations (3) et (4) l'équation du nouveau régulateur :

$$\frac{dy}{dt} = -K_0 (\Delta N - my)$$

où K_0 tend convenablement vers zéro.

L'équation caractéristique est alors :

$$\Theta p^3 + p^2 (2 + K_0 m \Theta) + 2 K_0 m p + \frac{2 q_s K_0}{S Y} = 0$$

et la condition de stabilité :

$$2 S Y m \left(1 + \frac{K_0 m \Theta}{2} \right) > q_s \Theta$$

Si on fait tendre $K_0 m \Theta \rightarrow 0$, on obtient :

$$2 S Y m > q_s \Theta$$

ce qui est la même condition que celle trouvée précédemment. Ce fait est bien connu depuis longtemps. Il a donné lieu à divers commentaires. Parfois on prétendait que le régulateur par tout ou rien *règle* comme un régulateur infiniment lent. Souvent on prétendait aussi qu'on peut remplacer pour tous les calculs de stabilité le régulateur par tout ou rien par un régulateur à vitesse proportionnelle à l'écart infiniment lent. Ces deux assertions ne sont pas exactes. D'abord on ne peut pas conclure de la condition de stabilité que le régulateur par tout ou rien règle comme un régulateur infiniment lent. En effet, la rapidité de réglage n'est pas directement liée à la condition de stabilité. D'autre part, cette conclusion est contredite par l'étude de certaines installations, par exemple de celles où l'inertie de l'eau dans la conduite d'adduction est négligeable, et aussi par toutes sortes d'autres exemples qu'on peut traiter avec la méthode préconisée ici, en appliquant les théories du § V-41. On peut plutôt dire qu'un régulateur par tout ou rien donne un fonctionnement aussi stable qu'un régulateur à vitesse proportionnelle à l'écart manœuvrant beaucoup plus lentement. Par ailleurs, on montrera que l'installation en question est la seule pour laquelle le régulateur par tout ou rien est équivalent à un régulateur à vitesse proportionnelle à l'écart, en ce qui concerne la condition de stabilité.

Nous allons, dès à présent, « expliquer » en partie pourquoi cette équivalence est valable dans le cas traité ici : à sa limite d'existence le cycle limite a une amplitude infinie. Le régulateur à vitesse proportionnelle à l'écart, qui donne une vitesse de vannage finie pour une amplitude d'entrée infinie, doit avoir une rapidité de réponse qui tend convenablement vers zéro (voir fig. 12).

Fig. 12

D'une façon tout à fait analogue on peut montrer que le régulateur par tout ou rien accélérotachymétrique n'est équivalent à un régulateur accélérotachymétrique à vitesse proportionnelle

à l'écart que dans le cas de l'installation schématisée sur la figure 11.

On peut concevoir différents types de régulateurs accélérotachymétriques par tout ou rien. Nous allons décrire les deux principaux :

Le premier comprend deux relais dont l'un détecte les changements de signe de N et l'autre les changements de signe de dN/dt , c'est-à-dire pratiquement les maxima et minima de N . Le moteur est soumis à une tension $\varepsilon U_1 + \varepsilon' U_2$ et tourne à la vitesse $\varepsilon V_1 + \varepsilon' V_2$ *.

Le deuxième comprend un seul relai qui est actionné par une tension proportionnelle à $N + k dN/dt$ (N étant le niveau détecté). On voit que pour le premier type le déphasage entre N et Y est $-\pi/2 + \arctg(V_2/V_1)$; pour le deuxième il est $-\pi/2 + \arctg k \omega$. Si on règle une installation du genre de celle schématisée sur la figure 11 par un régulateur du premier type d'installation, il existe toujours un cycle limite. La pulsation correspondante est donnée par :

$$-\pi + 2 k \pi = -\pi/2 - \pi/2 + \arctg \frac{V_2}{V_1} - \arctg \frac{\Theta \omega}{2}$$

d'où :

$$\omega = \frac{2 V_2}{V_1} \frac{1}{\Theta} \quad **$$

Avec le deuxième type de régulateur il y a stabilité ou instabilité suivant que :

$$-\pi/2 - \pi/2 + \arctg k \omega - \arctg \frac{\Theta \omega}{2} \geq -\pi$$

Donc :

$$k \geq \frac{\Theta}{2} \quad (7)$$

On voit que ce dernier type de régulateur est le plus stable. Pour étudier la stabilité de l'installation munie d'un régulateur accélérotachymétrique à vitesse proportionnelle à l'écart, il faut joindre aux équations la relation établie par ce régulateur, soit :

$$\frac{dy}{dt} = -K_0 N - K_1 \frac{dN}{dt}$$

L'équation caractéristique est :

$$\Theta p^3 + 2 p^2 + \frac{2 K_1 q_s}{S Y_0} p + \frac{2 K_0 q_s}{S Y_0} = 0$$

d'où la condition de stabilité :

$$\frac{K_1}{K_0} > \frac{\Theta}{2}$$

* Pratiquement on peut d'ailleurs réaliser deux vitesses de vannage différentes avec un moteur tournant toujours à la même vitesse et un réducteur.

** Si V_2/V_1 est négatif, il y a instabilité apériodique.

Cette condition est la même que (7).

Des deux types de régulateur par tout ou rien mentionnés ici, l'un donne un fonctionnement moins stable; mais il est beaucoup plus simple à réaliser puisqu'on ne mesure aucune grandeur; on détecte simplement des zéros, des maxima et des minima. Ce dernier régulateur peut être stabilisé par un asservissement beaucoup plus faible que celui exigé par un régulateur seulement tachymétrique (facilement de l'ordre de 1 à 50 en pratique). Ce régulateur est donc robuste, simple et bien stable.

Etudions l'installation schématisée par la figure 11 réglée par un tel régulateur.

Soit $N = N_0 \cos \omega t$ le mouvement du niveau dans le bassin et $Y = Y_0 \cos (\omega t - \varphi)$ le mouvement de la vanne.

On sait que :

$$\pi/2 \geq \varphi \geq 0$$

L'un des relais reçoit la tension :

$$N - m Y = N_0 \cos \omega t - m Y_0 \cos (\omega t - \varphi) \\ = A \cos (\omega t + \psi)$$

On sait que :

$$\pi/2 \geq \psi \geq 0$$

On en déduit la relation :

$$N_0 \sin \psi = m Y_0 \sin (\varphi + \psi) \quad (8)$$

L'autre relai reçoit la tension :

$$\frac{dN}{dt} = -N_0 \omega \sin \omega t$$

Le régulateur donne une vitesse de vannage :

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{4}{\pi} V_0 \cos (\omega t + \psi) + \frac{4}{\pi} V_1 \sin \omega t$$

avec la même approximation qu'aux §§ VI-11 et VI-12.

D'où :

$$Y_0 \cos (\omega t + \varphi) = -\frac{4}{\pi} \frac{V_0}{\omega} \sin (\omega t + \psi) - \frac{4}{\pi} \frac{V_1}{\omega} \cos \omega t$$

On en déduit :

$$Y_0 \sin \varphi = -\frac{4}{\pi} V_0 \cos \psi \quad (9)$$

$$Y_0 \cos \varphi = -\frac{4}{\pi} V_0 \sin \psi - \frac{4}{\pi} \frac{V_1}{\omega} \quad (10)$$

L'étude du régulateur en soi peut être faite à partir de ces relations. Elle est assez longue et compliquée. Etudions ici directement les cycles

limites qui peuvent se produire. La condition du cycle limite est comme précédemment :

$$-\pi/2 - \varphi - \arctg \frac{\Theta \omega}{2} = -\pi$$

D'où :

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\Theta \omega}{2} \quad (11)$$

Pour étudier les cycles limites, il faut y joindre, comme au § VI-11, la relation entre N_0 , Y_0 et ω . Elle est ici :

$$N_0 = \frac{2 Y_0 Q}{Y} \frac{1}{\sqrt{4 + \Theta^2 \omega^2}} \frac{1}{S \omega} \quad (12)$$

Pour trouver l'équation en ω des cycles limites, nous éliminerons d'abord Y_0 entre les équations (9) et (10) et N_0 entre (8) et (12). D'où les relations :

$$\cos (\varphi + \psi) = \frac{V_1}{V_0} \sin \varphi \quad (13)$$

et :

$$\frac{2 Q \Theta}{m S Y} \frac{1}{\Theta \omega} \frac{1}{\sqrt{4 + \Theta^2 \omega^2}} \sin \psi = \sin (\varphi + \psi) \quad (14)$$

on pose :

$$\frac{2 Q \Theta}{m S Y} = a$$

et on calcule $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ de l'équation (11). Puis on remplace dans (13) et (14) $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ par leur valeur. On obtient les deux relations :

$$2 \cos \psi = \left(\frac{a}{\Theta \omega} - \Theta \omega \right) \sin \psi$$

et :

$$\Theta \omega \cos \psi - 2 \sin \psi = 2 \frac{V_1}{V_0}$$

On peut en tirer :

$$\sin \psi \quad \text{et} \quad \cos \psi$$

$$\sin \psi = 2 \frac{V_1}{V_0} \frac{1}{\frac{a}{2} - 2 - \frac{\Theta^2 \omega^2}{2}}$$

$$\cos \psi = 2 \frac{V_1}{V_0} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{\Theta \omega} - \Theta \omega \right)}{\frac{a}{2} - 2 - \frac{\Theta^2 \omega^2}{2}}$$

Jusqu'ici, nous n'avons pas introduit de rati-

nes étrangères, puisque tous les calculs étaient linéaires. Pour éliminer ψ , il nous faudra écrire :

$$\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$$

d'où l'équation des ω des cycles limites. Néanmoins ici on introduit des racines étrangères qu'on peut éliminer en recalculant $\sin \psi$ et $\cos \psi$ à partir des valeurs trouvées. Comme ψ doit être compris entre 0 et $\pi/2$, il suffit de vérifier que $\sin \psi$ et $\cos \psi$ sont positifs. L'équation en ω s'écrit (on pose $a - 4 = c$ et $\frac{4 V_1^2}{V_0} = b$) :

$$f(\Theta^2 \omega^2) = (\Theta^2 \omega^2)^3 - (\Theta^2 \omega^2)^2 (2c + b) + (\Theta \omega) (c^2 + 2bc + 4b) - b(c + 4)^2 = 0$$

Pour que $\sin \psi$ et $\cos \psi$ soient positifs, il faut et suffit que c soit plus grand que la racine $\Theta^2 \omega^2$ adoptée. Or, $f(c) < 0$, donc il ne peut y avoir de cycle limite si $f(\Theta^2 \omega^2) = 0$ n'a qu'une racine réelle (fig. 13).

FIG. 13

Si $f(\Theta^2 \omega^2) = 0$ a 3 racines réelles, il faut que c soit inférieur aux racines de $f'(\Theta^2 \omega^2) = 0$, pour ne pas avoir de cycle limite (fig. 14).

FIG. 14. — Puisque $f(c) < 0$, c peut être entre B et C ou à gauche de A. Pour que c soit à gauche de A, il faut que $f'(c) > 0$, et c à gauche du minimum de $f'(c)$ (voir fig. 15).

Or :

$$f'(c) > 0$$

Il faut donc calculer la racine de $f'(\Theta^2 \omega^2) = 0$ et la comparer avec c (fig. 15).

FIG. 15. — Puisque $f'(c) > 0$, il faut que c soit à gauche de D pour qu'il n'y ait pas de cycle limite.

On trouve facilement qu'il peut y avoir un cycle limite uniquement dans le cas où $f(\Theta^2 \omega^2) = 0$ a trois racines réelles et que $c < b$.

La condition de racine double qui limite le domaine où $f(\Theta^2 \omega^2) = 0$ a trois racines réelles, se trouve facilement en changeant de variables; on pose :

$$y = \Theta^2 \omega^2 - c$$

$$y^3 + y^2(c - b) + 4by - 4b(c + 4) = 0$$

Les conditions de racine double sont :

$$b[9(c + 4) + (c - b)^2] = [12b - (c - b)^2][3(c - b)(c + 4) - 4b]$$

et $b = 0$

La première représente une courbe C du 4^e degré en b et c ; cette courbe a trois points doubles en $b = 4$; $c = 4$ et $c = \frac{-88 \pm j4\sqrt{3}}{27}$ (voir § VI-2). Elle est donc unicursale. Elle n'est pas coupée par $c = 0$; $b > 0$, ni par $c = b$; $b > 0$. Elle ne peut entrer dans le domaine défini par $b = c$ et $b = 0$ que par l'origine. A l'infini elle présente une branche parabolique du 3^e degré

FIG. 16

dans la direction $b=c$ et une asymptote dans la direction $c=0$. On en déduit que la forme de la courbe C est obligatoirement celle donnée par la figure 16. La partie hachurée est la partie stable sans cycle limite.

Fig. 17. — Domaine de stabilité — hachuré — (sans cycle limite) dans le plan :

$$2Q\Theta/mSY, 4(V_1/V_0)^2$$

La figure 17 montre le domaine de stabilité dans le plan $a = \frac{2Q\Theta}{mSY}$ et $b = 4\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^2$

Si $V_1 = V_0$, on trouve la limite de stabilité (sur la courbe C) $a = 12 + 8\sqrt{2} \approx 23,2$; le degré d'asservissement limite est déjà divisé environ par 6. On n'a pas intérêt à se placer vers $V_1 = V_0$: l'amortissement y est assez mauvais, comme on le verrait par une étude plus poussée.

Les vitesses auxquelles doit tourner l'arbre de

Fig. 18

sortie du moteur du régulateur sont $V_0 + V_1$ et $V_0 - V_1$ (fig. 18). Si V_1 est plus grand que V_0 , l'une des vitesses est en sens inverse de l'autre. La stabilité augmente, comme on le voit sur la figure 17, si les vitesses de vannage tendent à être

égales et de signe contraire. Une étude plus poussée montrerait que l'amortissement optimum correspond sensiblement à la valeur 1/2 du rapport des deux vitesses. Dans ce cas, $V_0 = V_1/3$, donc $b = 36$. Alors, la valeur du paramètre a donnant la limite d'existence d'un cycle limite est environ 88,8. On gagne donc déjà de 1 à 22 par rapport au régulateur par tout ou rien ordinaire. On peut facilement pousser la limite de stabilité plus loin encore en faisant tendre le rapport des vitesses de vannage vers -1 , mais l'amortissement redevient alors de plus en plus faible.

Par ailleurs, on peut également employer ce régulateur sans asservissement. Comme on l'a déjà vu, il existe toujours un cycle limite. Néanmoins, celui-ci peut être très petit. Ainsi par exemple, si on admet une surpression de 20 % dans la conduite d'adduction, et si $V_0 = V_1/3$, l'amplitude du cycle limite est environ 800 fois plus petite que la différence des niveaux extrêmes réglés par suite de l'asservissement nécessaire à la stabilité avec un régulateur par tout ou rien à une seule vitesse du vannage. Souvent le pompape a tendance à se produire à une fréquence supérieure à la fréquence de coupure (voir § II-3) et, de ce fait, peut ne pas apparaître.

VI-2. — CAS SOLUBLES UNIQUEMENT PAR LA MÉTHODE DE NYQUIST GÉNÉRALISÉE

Comme nous l'avons indiqué au début du § VI-1, nous nous proposons d'étudier surtout les régulateurs par tout ou rien et les liaisons à jeu. Pour étudier d'une façon assez générale ces deux éléments dans une installation par ailleurs linéarisée (comme nous l'avons indiqué plus haut), il est commode de chercher d'une façon systématique les fonctions de transfert des parties linéaires de ces installations. Les installations étudiées ici seront des installations hydrauliques et la partie la plus délicate de la fonction de transfert est celle provenant de l'adduction. Pour caractériser l'adduction, nous définirons une fonction que nous appellerons « l'impédance de l'adduction »*. Cette fonction caractérise entièrement l'adduction dans le domaine des équations linéarisées. Nous la définirons de la façon suivante: on considère le système d'adduction muni de son orifice, mais sans régulateur. Si on impose à cet orifice une loi de manœuvre de façon

* Cette notion se trouve plus largement développée dans l'un de nos récents articles : « Aptitude des installations hydrauliques à être réglées automatiquement », *Revue Générale de l'Electricité*; janv. 1953; p. 40.

telle que le débit soit $q(t)$, il se crée dans tout le système d'adduction des surpressions dues à l'inertie de l'eau. Soit $h(t)$ la surpression juste à l'amont de l'orifice. Comme nous nous plaçons dans le domaine des équations linéarisées et que nous étudions les régimes sinusoïdaux, il correspond à chaque fonction

$$q(t) = Q_0 \cos \omega t = \mathcal{R}(Q_0 e^{j\omega t})^*.$$

Une fonction :

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{R}[Q_0 Z(j\omega) e^{j\omega t}] \\ &= \mathcal{R}[H_0(j\omega) e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

où $H_0 e^{j\varphi}$ est une fonction de $j\omega$, qui est de la forme :

$$Q_0 Z(j\omega).$$

Donc à :

$$q(t) = \mathcal{R}(Q_0 e^{j\omega t})$$

correspond :

$$h(t) = \mathcal{R}[Q_0 Z(j\omega) e^{j\omega t}]$$

où :

$$H_0(j\omega) = Q_0(j\omega) \cdot Z(j\omega)$$

Nous appellerons $Z(j\omega)$ l'impédance du système d'adduction par analogie avec la loi d'OHM en électricité :

$E(j\omega) = I(j\omega) Z(j\omega)$ (Voir à ce sujet aussi le § III-3.)

L'orifice d'adduction établit la relation :

$$h = K \frac{q^2}{y^2}$$

K : coefficient de perte de charge à pleine ouverture.

y : ouverture relative de la vanne.

En linéarisant et posant :

$$h = \mathcal{R}(H_0 e^{j\omega t}); q = \mathcal{R}(Q_0 e^{j\omega t})$$

on obtient :

$$\frac{H_0}{H} = \frac{2 Q_0}{Q} - \frac{2 y}{Y}$$

H : chute nette.

Q et Y : débit et ouverture de vanne en régime établi; Q et Y définissent le point de fonctionnement autour duquel on linéarise.

Compte tenu de $H_0 = Q_0 Z$, on obtient la fonction de transfert entre y et Q_0 .

$$\frac{y}{Y} = \frac{Q_0}{Q} \left(1 - \frac{Z Q}{2 H} \right)$$

Comme $\frac{Z Q}{H}$ intervient constamment, on pose :

$$z = - \frac{Z Q}{H}$$

En tenant compte de la fonction de transfert du bassin :

$$S j \omega N_0 = Q_0$$

on obtient :

$$\frac{S}{Q} j \omega \left(1 + \frac{z}{2} \right) N_0 = \frac{y}{Y}$$

On peut écrire :

$$z = X(\omega) + j Y(\omega)$$

X est une fonction paire et Y une fonction impaire comme il ressort de l'article cité en [1]. Le déphasage dû à la partie linéaire est alors :

$$-\pi/2 - \arctg \frac{Y}{X + 2}$$

Si l'installation est munie d'un régulateur par tout ou rien ordinaire, ce dernier produit un déphasage de :

$$-\arccos \frac{4}{\pi} \frac{V_0 m}{\omega |N|}$$

D'où la condition de cycle limite :

$$2k\pi - \pi = -\pi/2 - \arctg \frac{Y}{X + 2}$$

$$-\arccos \frac{4}{\pi} \frac{V_0 m}{\omega |N|}$$

Comme au § VI-11, on peut calculer l'amplitude du cycle limite éventuel en fonction de sa pulsation; on obtient :

$$|N| = \frac{4}{\pi} \frac{V_0}{\omega} \frac{1}{S \omega} \frac{2 K Q}{Y} \frac{1}{\sqrt{(2 + X)^2 + Y^2}}$$

De ces deux équations on peut tirer l'équation des pulsations des cycles limites. Elle est :

$$[(2 + X)^2 + Y^2] \frac{S m Y}{2 Q} \omega = Y$$

Nous voyons apparaître ici (comme dans tous les problèmes) la particularité suivante : on peut

* $\mathcal{R}$ veut dire « partie réelle de... » (voir § III-4).

calculer la limite de stabilité quand le phénomène est oscillatoire, mais non quand il est apériodique. Or, physiquement, les régimes apériodiques ne sont à peu près jamais à craindre car il faut monter un élément « à l'envers » pour qu'ils puissent exister. Ce fait est d'ailleurs largement démontré pour les installations linéaires. Voir par exemple [6] où toutes les séparatrices S_0 et S_∞ sont des limites de « bon sens ». L'équation trouvée est vraiment « la » limite de stabilité.

Nous allons rapidement étudier cette équation d'une façon générale. Admettons d'abord que l'adduction soit un système à constante localisée, c'est-à-dire que les phénomènes d'ondes soient négligeables (cf. § III-3). L'équation en ω est alors algébrique et les cycles limites sont donnés par les racines réelles et positives de cette équation. Comme X et Y sont des expressions respectivement paire et impaire en ω , l'équation est en $(j\omega)^2$ ou en ω^2 et ses coefficients sont tous réels. Si on pose $\omega^2 = u$, on obtient une nouvelle équation $f(u) = 0$ que nous appellerons équation caractéristique. Les cycles limites sont donnés par les racines réelles et positives de cette équation caractéristique. Si on étudie une installation dans laquelle un certain nombre de grandeurs (ou toutes les grandeurs) ne sont pas déterminées numériquement, les coefficients des termes u^m de l'équation en u seront fonction de ces grandeurs. Nous appellerons ces grandeurs les paramètres du système. Le nombre de racines réelles ou positives de $f(u) = 0$ dépend alors de la valeur de ces paramètres. On peut ici faire une discussion analogue à celle qui a été faite pour les systèmes linéaires*. On peut considérer un espace dont les axes (ou plutôt les surfaces coordonnées) sont gradués d'après les valeurs des paramètres. S'il y a k paramètres, l'espace aura k dimensions. Dans cet espace on peut tracer des hypersurfaces limitant des domaines dans lesquels le nombre de racines réelles et positives de l'équation caractéristique reste constant. Ces hypersurfaces seront appelées (en analogie avec les systèmes linéaires) : séparatrices**. Le nombre de racines réelles et positives peut varier si une racine passe par la valeur zéro ou la valeur infinie, ou si deux racines réelles se confondent pour donner ensuite deux racines imaginaires. Il y a donc trois hypersurfaces séparatrices : S_0 , lieu des points où $f(u) = 0$ a une racine nulle; S_∞ , lieu des points où $f(u) = 0$ a une racine infinie, et S_2 , lieu des points où $f(u) = 0$ a une racine double. Pour plus de détails sur ce genre de raisonnement, on peut voir [7] où est traité le cas des systèmes linéaires.

Étudions ici plus en détail simplement le cas d'un petit nombre de paramètres, dont deux interviennent linéairement dans $f(u) = 0$ *. On peut évidemment faire des études analogues pour des cas bien moins élémentaires, mais les notions mathématiques mises en jeu deviennent rapidement de plus en plus compliquées. Les quelques détails que nous indiquons ici seront présentés aussi simplement que possible, bien qu'ils fassent déjà appel à des notions mathématiques bien plus élevées que l'ensemble de notre étude.

Soit donc :

$$f(u) = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0 = 0$$

la fonction caractéristique à étudier et les a_n fonctions de plusieurs paramètres dont 2 : λ et μ interviennent uniquement linéairement. Nous écrirons :

$$f(u) = \varphi(u; \lambda; \mu) = 0$$

Nous allons étudier ce qui se passe dans le plan $\lambda; \mu$ (qui est un espace des paramètres particulier) quand on maintient les autres paramètres fixes. Les valeurs de λ et μ pour lesquelles $f(u) = \varphi(u; \lambda; \mu) = 0$ a une racine égale à u_0 sont sur la droite $\varphi(u_0; \lambda; \mu) = 0$. Nous appellerons cette droite $\Delta(u_0)$. Par chaque point du plan passent n droites relatives aux n racines u de l'équation $f(u) = 0$. Le nombre de droites réelles qui passent en chaque point donne le nombre de racines réelles de l'équation $f(u) = 0$. Appelons l'enveloppe des droites $\Delta(u_0)$: la courbe C . Cette courbe C est le lieu des points pour lesquels l'équation caractéristique a une racine double, puisque sur cette courbe $\varphi(u_0; \lambda; \mu) = 0$ et $\varphi'_{u_0}(u_0; \lambda; \mu) = 0$. La courbe C est donc la séparatrice S_2 . Elle est unicursale puisqu'on peut la paramétrer en u_0 en tirant λ et μ des deux équations linéaires $\varphi = 0$ et $\varphi'_{u_0} = 0$. Son degré est $2(n-1)$: on peut en effet remplacer φ par la combinaison $n\varphi - u_0\varphi'_{u_0} = 0$, d'où deux équations du $(n-1)^e$ degré en u_0 (on ne peut pas abaisser plus le degré). Le nombre de points doubles d'une courbe unicursale de degré d étant $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$, la courbe C a $(2n-3)(n-2)$ points doubles. Le paramètre u_0 de la courbe C est précisément la racine double de l'équation $\varphi = 0$. Aux points doubles de la courbe C correspondent des valeurs λ et μ pour lesquelles l'équation caractéristique a deux racines doubles. Aux points de rebroussement correspondent des racines triples. Les racines triples sont données par les trois équations :

* Voir [7].

** Voir [5] et [7].

* On peut ramener un très grand nombre de cas pratiques à cette forme.

$$\varphi(u_0; \lambda; \mu) = 0; \quad \varphi'_{u_0}(u_0; \lambda; \mu) = 0;$$

$$\text{et } \varphi''_{u_0}(u_0; \lambda; \mu) = 0.$$

Comme pour les points doubles, on peut remplacer ces trois équations par trois combinaisons linéaires de degré $(n-2)$ en u . On peut éliminer λ et μ en annulant le déterminant complet du système. On en tire une équation de degré $3(n-2)$ en u . Comme à chaque valeur u correspond une valeur λ et une valeur μ , la courbe C a $3(n-2)$ points de rebroussement. Il reste donc $2(n-3)(n-2)$ points doubles ordinaires. On vérifie aisément que la classe de la courbe C est bien n^* . On appelle classe d'une courbe algébrique le nombre de tangentes (réelles ou imaginaires) qu'on peut y mener par un point. On peut évidemment mener n tangentes à la courbe C ; ces n tangentes sont les n droites $\Delta(u_0)$ passant par le point considéré. Le nombre de racines réelles de l'équation caractéristique est égal au nombre de tangentes réelles qu'on peut tracer par le point correspondant de la séparatrice S_2 . Les séparatrices S_0 et S_∞ sont dans notre cas les droites $a_0 = 0$ et $a_n = 0$. Ce sont des droites $\Delta(u_0)$, donc des tangentes à S_2 .

On remarque qu'il suffit de tracer la courbe C pour les valeurs du paramètre u_0 telles que $0 \leq u_0 \leq \infty$. Cet arc et les droites $a_0 = 0$ et $a_n = 0$ résolvent entièrement notre problème.

Résumons en quelques mots :

Si l'équation caractéristique est de degré n et contient linéairement deux paramètres λ et μ , la séparatrice S_2 est, dans le plan $\lambda; \mu$, une courbe unicursale, c'est-à-dire paramétrable. Cette courbe est du degré $2n-2$; elle a $3(n-2)$ points de rebroussement et $2(n-3)(n-2)$ points doubles ordinaires. Les points doubles fournissent les valeurs de λ et μ pour lesquelles l'équation caractéristique a deux racines doubles; les points de rebroussement fournissent les racines triples. Le nombre de racines réelles de l'équation caractéristique est égal au nombre de tangentes réelles qu'on peut mener du point correspondant à la séparatrice S_2 . Les séparatrices S_0 et S_∞ sont des droites tangentes à S_2 **.

Étudions maintenant rapidement ce qui se passe si on remplace le régulateur par tout ou rien par le régulateur infiniment lent dont il a été question plus haut. Il faut joindre à :

$$S j \omega \left(1 + \frac{z}{2}\right) \frac{N_0}{Q} = \frac{Y}{Y}$$

* La classe d'une courbe de degré d et ayant p points doubles et r points de rebroussement est $d(d-1) - 2p - 3r$.

** L'équation $f(u)$ peut évidemment aussi servir dans les cas entièrement numériques. On trace alors effectivement $y = f(u)$ pour $u > 0$ et on vérifie qu'il n'existe pas de racine réelle.

la fonction de transfert :

$$(j \omega + K_0 m) y = -K_0 N_0$$

avec :

$$K_0 \rightarrow 0$$

D'où l'équation :

$$S j \omega (j \omega + K_0 m) \left(1 + \frac{z}{2}\right) + \frac{K_0}{Y} = 0$$

Pour abréger les calculs, plaçons-nous dans le cas où les pertes de charge sont négligeables ou équivalentes à une perte de charge s'ajoutant à celle de l'orifice et où $z(j \omega)$ est un polynôme. Le domaine de stabilité est alors limité par $\Delta_{n-1} = 0$; Δ_{n-1} est le déterminant d'HURWITZ dont l'ordre est d'une unité plus petit que l'ordre de l'équation caractéristique. (Voir [7].) Les coefficients des puissances $0; 1; 4; 6 \dots 2n$ en $j \omega$ sont proportionnelles à K_0 , les autres contiennent des termes indépendants de K_0 (en effet, $z(j \omega)$ ne contient dans ce cas que des puissances impaires de $j \omega$). Si $K_0 \rightarrow 0$, on peut écrire l'équation caractéristique :

$$K_0 a_0 + K_0 a_1 j \omega + a_2 (j \omega)^2 + a_3 (j \omega)^3 + K_0 a_4 (j \omega)^4 + a_5 (j \omega)^5 + \dots$$

Le déterminant Δ_{n-1} sera :

$$\begin{vmatrix} K_0 a_1 & K_0 a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & K_0 a_1 & K_0 a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & K_0 a_4 & a_3 & a_2 & K_0 a_1 & K_0 a_0 & \dots \\ a_7 & K_0 a_6 & a_5 & K_0 a_4 & a_3 & a_2 & \dots \\ a_9 & K_0 a_7 & a_7 & K_0 a_6 & a_5 & K_0 a_4 & \dots \end{vmatrix}$$

On ne peut mettre K_0 en facteur que dans la première ligne. Si $K_0 \rightarrow 0$, on peut supprimer tous les autres termes en K_0 et le domaine de stabilité est limité par le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & 0 & a_3 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_7 & 0 & a_5 & 0 & a_3 & a_2 & 0 & \dots \\ a_9 & 0 & a_7 & 0 & a_5 & 0 & a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

On peut le développer par rapport à la première ligne d'où $\Delta_{n-1} = (a_1 a_2 - a_0 a_3) \Delta'$ où Δ' est le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & 0 & a_3 & a_2 & 0 & 0 & \dots \\ a_7 & 0 & a_5 & 0 & a_3 & a_2 & 0 \\ a_9 & 0 & a_7 & 0 & a_5 & 0 & a_3 \\ a_{11} & 0 & a_9 & 0 & a_7 & 0 & a_5 \end{vmatrix}$$

Ce nouveau déterminant peut être développé par rapport à tous les coefficients a_2 . Ceci revient à rayer la moitié des lignes. On sait que dans la moitié inférieure du déterminant Δ_{n-1} il existe un triangle de zéros. Après avoir rayé les colonnes des a_2 , il reste un déterminant diagonal dont la valeur est a_n^m . Comme a_2 et a_n sont nécessairement positifs, la limite de stabilité est $a_1 a_2 = a_0 a_3$.

Si on développe $z(j\omega)$ en :

$$z(j\omega) = A + B j\omega + C (j\omega)^3 + D (j\omega)^5 + \dots$$

La limite de stabilité est donnée par :

$$S m Y (2 + A)^2 = B Q$$

Seuls A et B interviennent, alors que dans le cas du régulateur par tout ou rien tous les coefficients interviennent. C'est seulement dans le cas où tous, sauf A et B, sont nuls (ou n'interviennent pas), que les deux régulateurs peuvent donner la même condition de stabilité. Il se trouve qu'elle est alors effectivement la même : ceci a seulement lieu pour une installation dont l'adduction se fait par une conduite unique à coups de béliet en masse.

Étudions ici rapidement ce cas important d'une façon générale (le cas sans pertes de charge a déjà été traité au § VI-11).

On a :

$$A = 2 \Delta H \frac{Q^2}{Q_m^2} ; \quad B = \Theta = \frac{L}{g \sigma} \frac{Q}{H_s}$$

ΔH : perte de charge dans la conduite au débit maximum Q_m .

Les autres notations sont celles du § VI-11.

En raison des pertes de charge de la conduite, Q et Y ne sont pas proportionnels mais reliés par :

$$Y = \frac{Q}{Q_m} \sqrt{\frac{H_s - \Delta H}{H_s - \Delta H (Q^2/Q_m^2)}}$$

D'où la condition de stabilité :

$$\left(1 + \frac{\Delta H}{H_s} \frac{Q^2}{Q_m^2}\right) \frac{2 m S}{Q_m} \sqrt{\frac{1 - \frac{\Delta H}{H_s}}{1 - \frac{\Delta H}{H_s} \frac{Q^2}{Q_m^2}}} > \frac{L}{g \sigma} \frac{Q}{H_s}$$

Pour trouver le débit le plus défavorable, il faut chercher le minimum de :

$$y = \frac{(1+x)^2}{x^2(1-x)} \quad \text{où} \quad x = \frac{\Delta H}{H_s} \frac{Q}{Q_m}$$

on trouve : $x = 1/3$.

Donc l'installation est la moins stable pour :

$$Q = Q_m \sqrt{\frac{H_s}{3 \Delta H}} \quad \text{si} \quad \Delta H > \frac{H_s}{3}$$

et :

$$Q = Q_m \quad \text{si} \quad \Delta H < \frac{H_s}{3}$$

Il faut donc que la grandeur :

$$b = \frac{2 m S}{Q \Theta_m} \quad \left(\text{où} \quad \Theta_m = \frac{L}{g \sigma} \frac{Q_m}{H_s}\right)$$

respecte la condition :

$$b > \frac{1}{2} \frac{H_s}{\sqrt{2 \Delta H (H_s - \Delta H)}} \quad \text{pour} \quad \Delta H > \frac{H_s}{3}$$

$$\text{ou :} \quad b > \frac{1}{1 + \frac{\Delta H}{H_s}} \quad \text{pour} \quad \Delta H < \frac{H_s}{3}$$

La fonction $b = b \frac{\Delta H}{H_s}$ est représentée sur la figure 19. La perte de charge est fonction, entre

FIG. 19. — Le domaine de stabilité est en blanc.

autre, du diamètre de la conduite; mais comme le diamètre intervient dans σ , la figure 19 ne traduit pas exactement les variations de stabilité en fonction du diamètre. Si les pertes de charge sont inversement proportionnelles à la puissance 5^e du diamètre (comme on l'admet souvent), l'optimum est atteint si la perte de charge est $(11/16) H_s$; mais comme la courbe est fortement croissante entre $11/16$ et 1, il vaut mieux choisir une valeur un peu en dessous de $11/16$, à cause de l'imprécision avec laquelle on connaît ΔH .

VI-21. — Régulateur par tout ou rien et adduction par conduite unique à coups de béliet en onde (Fig. 20)

Nous étudierons le cas où les pertes de charge sont négligeables. Le coup de béliet dans la con-

FIG. 20

duite est régi par les équations (voir par exemple [2]) :

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial q}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{g \sigma}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

x : abscisse le long de la conduite.

q : débit dans le sens des x croissants au point x et à l'instant t .

h : hauteur au point x et à l'instant t .

g : 9,81 m/sec² : accélération de la pesanteur.

a : célérité des ondes de coups de bélier.

σ : section de la conduite.

En amont, on a :

$h = 0$ (définition du plan de référence des charges).

Pour étudier les régimes sinusoïdaux, il suffit de poser :

$$q = \mathcal{R}[Q_0(x) e^{j\omega t}] + Q$$

$$h = \mathcal{R}[H_0(x) e^{j\omega t}] + H$$

H ; Q : hauteur et débit en régime permanent au point de fonctionnement étudié.

On en déduit :

$$(1/\sigma) j \omega Q_0(x) = -g H'_{0x}(x)$$

$$(g \sigma / a^2) j \omega H_0(x) + Q'_{0x}(x) = 0$$

d'où :

$$H_0(x) = A \cos \frac{\omega}{a} x + B \sin \frac{\omega}{a} x$$

où A et B sont des constantes d'intégration fonctions de ω mais indépendantes de x .

La condition amont se traduit par $A = 0$, d'où :

$$H_0(x) = B \sin \frac{\omega}{a} x$$

$$\text{et : } Q_0(x) = \frac{g \sigma}{a} j B \cos \frac{\omega}{a} x$$

L'impédance est :

$$Z = -j \frac{\Theta}{\theta} \frac{H}{Q} \operatorname{tg} \omega \theta$$

$$\Theta = \frac{L}{g \sigma} \frac{Q}{H} \quad ; \quad \theta = \frac{L}{a}$$

d'où l'équation en ω :

$$\frac{S m Y}{2 Q \Theta} \left(4 + \frac{\Theta^2}{\theta^2} \operatorname{tg}^2 \omega \theta \right) = \frac{1}{\theta \omega} \operatorname{tg} \omega \theta$$

On peut poser :

$$\frac{2 Q \Theta}{S m Y} = b \quad \text{et} \quad \frac{\Theta^2}{\theta^2} = c$$

Dans le cas présent, l'équation en ω n'est pas algébrique, néanmoins on peut la discuter facilement. Posons :

$$\omega \theta = u$$

D'où :

$$f(u) = 4u + cu \operatorname{tg}^2 u - b \operatorname{tg} u = 0$$

La séparatrice S_2 est donnée par :

$$f'(u) = 4 + c \left(\operatorname{tg}^2 u + \frac{2u \operatorname{tg} u}{\cos^2 u} \right) - \frac{b}{\cos^2 u} = 0$$

On en tire :

$$b = \frac{8u^2}{\sin^2 u + u \operatorname{tg} u}$$

$$c = 2 \frac{2u - \sin 2u}{\operatorname{tg} u (\sin^2 u + u \operatorname{tg} u)}$$

FIG. 21

On peut facilement construire $b(u)$ et $c(u)$. On en déduit l'allure de la courbe S_2 dans le plan $b; c$ (fig. 21). Les points correspondants à $u = u_0$ et $u = -u_0$ sont confondus. $u = 0$ est donc un point d'arrêt. S_0 est la droite $b = 4$. Du domaine compris entre l'axe oc , la droite S_0 et la branche de S_2 débutant en $c = 4/3$; $b = 4$, on ne peut mener aucune tangente à la partie de la courbe S_2 tracée. Dans ce domaine il ne saurait y avoir de cycle limite, il y a stabilité pure et simple. On remarque que $c = 4 \varphi^2$ où φ est le paramètre bien connu d'ALLIEVI $\left(\varphi = \frac{a V}{g H} \right)$.

FIG. 22. — Le domaine de stabilité est en blanc.

L'approximation du coup de bélier en masse est donc rigoureusement valable ici jusqu'à $\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,56$. Si $\varphi < \frac{1}{\sqrt{3}}$, le domaine de stabilité est moins grand*.

VI-22. — Régulateur par tout ou rien et adduction comprenant une cheminée d'équilibre (Fig. 23)

H_c : hauteur d'eau dans la cheminée.

L_1 : longueur du tronçon A B.

σ_1 : section du tronçon A B.

L_2 : longueur du tronçon B C.

σ_2 : section.

q_1 : débit dans A B.

q_2 : débit dans B C.

q_3 : débit montant dans la cheminée.

* En réalité S_0 n'est pas la vraie limite de stabilité : sur S_0 le cycle limite a une amplitude infinie puisque $\omega = 0$. Si le mouvement débute par une amplitude finie il est amorti. Comme l'amplitude permise par les butées ne peut pas dépasser une valeur A (finie), la limite de stabilité sera donnée approximativement par la droite correspondant à la fréquence du cycle limite A et non pas à la fréquence nulle. Cette remarque est d'ailleurs générale.

Les autres symboles ont la même signification que plus haut. Nous négligerons les pertes de charge de l'adduction.

FIG. 23

On a les équations :

$$H_s - \frac{L}{g \sigma} \frac{dq_1}{dt} = H_c$$

$$S \frac{dH_c}{dt} = q_3$$

$$q_2 = q_1 - q_3$$

$$H_c - \frac{L_2}{g \sigma_2} \frac{dq_2}{dt} = H$$

On pose :

$$\Theta_1 = \frac{L_1}{g \sigma_1} \frac{Q}{H_s} ; \quad \Theta_2 = \frac{L_2}{g \sigma_2} \frac{Q}{H_s} ; \quad T = \frac{S Q}{H_s}$$

Après linéarisation, on en tire l'impédance :

$$Z(j\omega) = - \frac{H}{Q} \frac{1 + \frac{\Theta_2}{\Theta_1} - T \Theta_2 \omega^2}{T j \omega + \frac{1}{\Theta_1 j \omega}}$$

d'où l'équation en ω :

$$\left(1 + \frac{\Theta_2}{\Theta_1} - T \Theta_2 \omega^2 \right) \left(-T \omega + \frac{1}{\Theta_1 \omega} \right) = \left[4 \left(T \omega - \frac{1}{\Theta_1 \omega} \right)^2 + \left(1 + \frac{\Theta_2}{\Theta_1} - T \Theta_2 \omega^2 \right)^2 \right] \frac{S m Y}{2 Q} \omega$$

On pose :

$$\lambda = \frac{T}{4 \Theta_1} ; \quad u = \omega^2 \Theta_1 T ; \quad \mu = \frac{2 Q T}{m S Y} ; \quad c = \frac{\Theta_2}{\Theta_1}$$

d'où :

$$f(u) = u^3 c^2 - u^2 [2 c (c + 1) - \lambda + \mu c] + u [(c + 1)^2 - 2 \lambda + \mu (1 + 2 c)] + \lambda - \mu (1 + c) = 0$$

Pour trouver la séparatrice S_2 qui est un lieu de points doubles, on peut faire un changement de variable; on pose $u - 1 = v$ et on obtient :

$$v^3 c^2 + v^2 (c^2 - 2c + \lambda - c\mu) + v(1 - 2c + \mu) + 1 = 0$$

On peut également faire le changement d'axe $\mu + 1 = v$.

D'où :

$$\varphi(v) = v^3 c^2 + v^2 (c^2 - c + \lambda - c\mu) - v(2c - v) + 1 = 0$$

La séparatrice S_2 est alors donnée par :

$$v = \frac{c^2 v^3 + 2c v - 2}{v}$$

$$\lambda = \frac{c^3 v^4 - 2c^2 v^3 + v^2 c(c + 1) - 2c v + 1}{v^2}$$

FIG. 24

L'allure de cette courbe dans le plan $\lambda; \mu$ est présentée sur la figure 24.

Les flèches indiquent le sens du parcours quand u croît. Le point A correspond à $u = 0$. La tangente en A est la séparatrice S_0 . On voit sur l'équation en u que S_0 passe par l'origine. Pour obtenir les domaines sans cycles limites,

FIG. 25

on peut supprimer la partie de S_2 qui correspond à $u < 0$; les tangentes à cette partie de la courbe donnent des racines u négatives. D'où la limitation effective des domaines d'après le nombre de cycles limites possibles (fig. 25). A l'intérieur du domaine hachuré se trouvent les points d'où on ne peut mener aucune tangente à la partie restante de la courbe S_2 . En réalité, si $\mu < 0$, il y a instabilité apériodique. Le domaine de stabilité est donné par la figure 26.

En réalité, les paramètres :

$$x = \frac{4\mu(1+c)}{\lambda} = \frac{2Q(\Theta_1 + \Theta_2)}{mSY} \text{ et } y = \lambda$$

sont plus intéressants que μ et λ . La figure 27 montre le domaine de stabilité dans le plan de ces paramètres.

On voit qu'il existe un domaine de stabilité; de plus, la cheminée est sans influence sur la limite de stabilité tant que sa section reste in-

FIG. 26

férieure à une valeur critique. La cheminée a, par contre, toujours une influence sur la fréquence du cycle si la condition de stabilité n'est pas satisfaite.

FIG. 27. — Le domaine de stabilité est en blanc.

On voit ici la grande différence entre les régulateurs à vitesse proportionnelle à l'écart et les régulateurs par tout ou rien : le système correspondant à la figure 23 et muni d'un régulateur à vitesse proportionnelle à l'écart n'est jamais stable s'il est sans perte de charge.

VI-23. — Régulateur à vitesse proportionnelle à l'écart et liaison à jeu

Dans ce cas, une partie de l'installation est linéaire (ou sera considérée comme telle) et une partie « algébrique » (voir § V-234). On peut employer la méthode inventée par M. KOCHENBURGER et DUTILH (voir [3] et [4]).

FIG. 28

La fonction de transfert globale est de la forme :

$$F(j\omega) \Phi(A)$$

Il y a cycle limite si :

$$F(j\omega) \cdot \Phi(A) = -1$$

ou :

$$F(j\omega) = -\frac{1}{\Phi(A)}$$

Si l'élément non linéaire est donné, la courbe $-1/\Phi(A)$ est fixe dans le plan de NYQUIST (fig. 28), quand on fait varier les paramètres de la partie linéaire de l'installation.

Il y a stabilité si la courbe de transfert $F(j\omega)$ ne coupe pas la courbe $-1/\Phi(A)$: donc cette courbe ne pénètre pas dans le domaine hachuré.

La limite de stabilité est donnée par la condition de tangence entre $F(j\omega)$ et $-1/\Phi(A)$. Pratiquement, cela revient à « épaisir » le point -1 et à en faire une zone (fig. 29). En général, les élé-

FIG. 29

ments algébriques considérés ainsi sont des « imperfections » comme les jeux, les frottements, etc. Les zones ainsi tracées jouent le rôle du point -1 pour les systèmes entièrement linéaires. La graduation de la courbe limite n'intervient pas.

Etudions ici simplement un cas schématique. Nous admettrons que la courbe de transfert d'un jeu soit un demi-cercle. Sur la figure 30, on a représenté le demi-cercle et la courbe plus exacte (voir § V-232). On voit que l'approximation n'est pas mauvaise, surtout compte tenu de l'imprécision avec laquelle on connaît en général les « imperfections ».

FIG. 30

La courbe $-1/\Phi(A)$ est alors une droite passant par le point -1 (fig. 31). Le domaine interdit est hachuré sur la figure 31.

Ce domaine ne dépend pas de la grandeur du jeu.

Etudions simplement le cas de l'installation

FIG. 31

figure 11. La fonction de transfert de la partie linéaire est :

$$F(j\omega) = \frac{1}{S j\omega} \frac{K_0}{j\omega + K_0 m} \frac{1}{2 + \Theta j\omega} \frac{2 Q}{Y}$$

La condition est ici simplement :

$$\Re [F(j\omega)] > -1$$

$$\Re [F(j\omega)] = \frac{-(2 + K_0 m \Theta)}{(\omega^2 + K_0^2 m^2) (4 + \Theta^2 \omega^2)} \frac{2 Q K_0}{S Y}$$

D'où :

$$2 + K_0 m \Theta < (\omega^2 + K_0^2 m^2) (4 + \Theta^2 \omega^2) \frac{S Y}{2 Q K_0}$$

La fréquence la plus défavorable est : $\omega = 0$.

On trouve :

$$\frac{2 S m Y}{Q \Theta} > 1 + \frac{2}{K_0 m \Theta}$$

Si on ne tient pas compte du jeu, la condition de stabilité est :

$$\frac{2 S m Y}{Q \Theta} > \frac{1}{1 + (1/2) K_0 m \Theta}$$

Les deux conditions sont représentées par les courbes de la figure 32.

On voit que le jeu réduit très considérablement le domaine de stabilité.

Comme on a vu, ni condition de stabilité ni fréquence du cycle limite éventuel ne dépendent de la grandeur du jeu, seule l'amplitude du cycle limite lui est proportionnelle. Comme toutes les installations ont un jeu quelque part (si petit soit-il), il est bon de satisfaire à la condition de stabilité avec jeu si on veut éviter les pompages même de faible amplitude (par exemple pour des raisons mécaniques). On voit donc ici une nouvelle raison pour laquelle les courbes de transfert des boucles doivent passer loin du point -1 (cf. fig. 29).

FIG. 32. — Il y a stabilité à droite vers le haut. La courbe inférieure correspond à la limite de stabilité compte non tenu du jeu, la courbe supérieure à cette même limite, compte tenu du jeu.

VII. — RÉSUMÉ FINAL ET CONCLUSIONS.

Le but de notre étude était d'exposer une méthode permettant d'étudier les installations réglées automatiquement et contenant des éléments à caractéristiques non linéaires. On sait que de telles installations ne pouvaient pas être étudiées jusqu'à présent. Non seulement on ne savait pas étudier une installation numériquement déterminée, mais surtout (et ceci est encore bien plus grave) on ne savait pas quelle influence pouvait avoir les non-linéarités sur cette installation.

En pratique, aucune installation n'est rigoureusement linéaire. Si l'on ignore l'influence des

non-linéarités, il est impossible de discerner l'erreur que l'on commet en les négligeant. Ainsi, nous avons montré au § VI-23 que, dans certains cas, un jeu, apparemment négligeable *a priori*, peut avoir un effet considérable et être un des facteurs principaux de l'instabilité. Le fait est que les non-linéarités sont parfois négligeables; dans ce cas, la connaissance d'une théorie des éléments non linéaires ne modifiera en rien la méthode classique; mais on sera sûr que cette méthode est valable. Dans les autres cas, on sera obligé de faire une étude moins schématis-

que. Jusqu'à présent, on avait l'habitude de linéariser automatiquement toutes les installations. Ceci était tout à fait normal puisqu'on ne savait pas faire autrement.

Après cette schématisation souvent extrêmement poussée, on ne s'arrêtait malheureusement pas toujours aux calculs relativement simples qui donnent des idées générales malgré tout assez exactes. De ce fait, la régulation avait de plus en plus tendance à devenir une branche des mathématiques appliquées avec tous les dangers que cela comporte.

Il semble donc que l'on ait intérêt à reprendre le problème à l'origine et à retourner aux bases physiques. On se rend alors compte qu'on ne connaît jamais exactement l'équation régissant une installation ou un appareil. On connaît au mieux un certain nombre d'équations, chacune valable approximativement dans un domaine de fonctionnement donné. En fait, ce domaine dépend de beaucoup de paramètres; en pratique, — pour le mode de fonctionnement courant, — il suffit de connaître les valeurs de certaines variables et leurs dérivées premières que l'on traduit par des amplitudes et des fréquences. Les frontières des domaines envisagés dépendent des erreurs que l'on consent à tolérer, et, d'une façon plus générale, des connaissances que l'on possède sur l'appareil à étudier.

Vue sous cet angle, l'étude d'un appareil paraît se ramener à celle d'un problème mathématique extrêmement compliqué. Mais si l'on ne perd pas de vue le caractère obligatoirement approché de l'équation de base, on se trouve amené à chercher une méthode d'étude simple, mais conservant à l'approximation son ordre de grandeur. Nous avons montré que les propriétés des installations réglées automatiquement peuvent en général être schématisées par un ou plusieurs réseaux de courbe relativement faciles à obtenir et à manipuler. En général, un seul réseau de courbes permet déjà une étude beaucoup plus exacte que la linéarisation. La linéarisation apparaît comme une schématisation extrêmement poussée : chaque réseau de courbe y est remplacé par une seule courbe, toutes les courbes obtenues ainsi se déduisent obligatoirement du choix de l'une d'entre elles dont la forme n'est, de plus, pas entièrement arbitraire. Souvent on est obligé de choisir une courbe qui ne se trouve pas dans la zone du plan balayée par les courbes plus exactes.

La méthode exposée ici permet donc de remplacer la schématisation appelée linéarisation par une autre schématisation au moins aussi précise et dont le degré d'approximation peut être choisi à l'avance avec une grande latitude. Le degré de complexité de l'étude faite à propos d'une instal-

lation dépend évidemment de la précision que l'on désire obtenir. De toute façon on peut s'arranger pour que les études mathématiques ne soient pas disproportionnées par rapport à la schématisation physique.

Le principe fondamental sur lequel repose la méthode exposée ici est le suivant :

— Le spectre de FOURIER d'un mouvement oscillatoire stationnaire ou lentement variable d'une installation réglée automatiquement possède une pointe très marquée et est à peu près nul partout ailleurs. Plus simplement, on peut dire que ces installations sont des filtres passe-bas, ce qui est bien connu. La méthode de NYQUIST se généralise alors facilement. Rappelons qu'elle consiste, pour les installations linéaires, à ouvrir la boucle formée par l'installation et à la soumettre à des excitations sinusoïdales de différentes fréquences. Connaissant les réponses à ces excitations, on en déduit toutes les propriétés de l'installation. Nous avons montré que la même méthode pouvait être appliquée aux installations non linéaires à condition de tenir compte de l'amplitude des excitations et, éventuellement, des variations de l'amplitude et de la fréquence. Cette étude donne alors des renseignements sur la stabilité et le comportement des installations.

La connaissance du réseau de courbes de réponse à amplitude et à fréquence constantes permet de trouver les cycles limites, donc les domaines de stabilité. Cette étude est parfois suffisante. Mais il n'y a évidemment aucune raison pour que, de ce réseau de courbes, on puisse déduire les mouvements lentement variables de l'installation. Si l'on veut analyser ces mouvements, il faut connaître plusieurs autres réseaux de courbes de réponse. Ainsi, il faut trois réseaux de courbes pour étudier les régimes lentement variables et la stabilité des cycles limites. On voit qu'on est amené à faire une analyse harmonique de plus en plus poussée. On peut aussi étudier les réponses aux excitations ayant un certain spectre de FOURIER (ne se réduisant pas à une pointe infiniment mince, comme c'est le cas d'une sinusoïde pure). L'intérêt de la méthode préconisée ici réside dans le fait qu'elle permet de faire une étude, peut-être incomplète, mais techniquement amplement suffisante, avec relativement peu de calcul. Elle permet l'étude des phénomènes courants d'une façon simple, donc physiquement et intuitivement compréhensible. Elle permet aussi, de ce fait, de dégager des principes généraux simples traduisant les propriétés des principaux dispositifs que l'on peut employer ou rencontrer, et d'accroître ainsi l'intuition indépendamment de toute considération mathématique. C'est ce dernier point que

nous considérons comme de loin le plus important. Ainsi les propriétés des transmissions à jeu indiquées brièvement aux § V-232; VI-11 et VII-23 et les propriétés analogues d'autres dispositifs

qu'on peut explorer de la même manière aident à dégrossir les problèmes de régulation et à fixer les grandes lignes du régulateur à adopter pour telle ou telle installation.

Au terme de cette très longue étude, nous nous faisons un devoir de rendre hommage à ceux qui, à notre connaissance, ont apporté une contribution directe à la solution de ces problèmes.

D'après les recherches bibliographiques auxquelles nous nous sommes livrés dans ce domaine, il semble bien que W. OPPELT soit le premier à avoir, dans son livre [8], publié en 1947, émis l'idée d'une analyse harmonique des systèmes non linéaires. En particulier, il montrait que l'injection d'une excitation sinusoïdale dans une certaine classe d'éléments non linéaires — nous les avons qualifiés « d'algébriques » — provoque une réponse périodique et que l'on peut tracer une courbe de NYQUIST en fonction de l'amplitude du signal injecté.

Plus récemment, nous l'avons d'ailleurs signalé dans le corps de notre étude, MM. KOCHENBURGER et DUTILH ont publié séparément [3] [4] une méthode permettant l'étude partielle des systèmes comprenant uniquement des éléments linéaires et algébriques. Enfin, depuis 1951, on doit à M. LOEB de nombreuses publications, étendant la méthode à tous les systèmes non linéaires et proposant une théorie de la stabilité des cycles limites assez différente de la nôtre.

Nous espérons, quant à nous, avoir fait bénéficier cette méthode de quelques apports substantiels. Nous espérons également que certaines des controverses que nous soulevons s'avéreront fructueuses. Nous sommes heureux enfin d'avoir aidé à la diffusion de ces procédés parmi les Hydrauliciens qui, dans ce domaine de la régulation, se trouvent aux prises avec des problèmes dépassant peut-être, en portée et en complexité, ceux qui ont provoqué les recherches antérieures.

BIBLIOGRAPHIE

1. — BAYARD : Relations entre les parties réelles et imaginaires des impédances.
R.G.E., mai 1935, p. 659.
2. — BERGERON : Du coup de bélier au coup de foudre.
Editeur : Dunod, Paris, 1950.
3. — DUTILH : Théorie des servo-mécanismes à relais.
Onde électrique, octobre 1950, p. 438.
4. — KOCHENBURGER : Analysis contactor servo-mechanisms.
Electrical Engineering, avril 1950.
5. — KUNTZMANN, DANIEL, MA MIN YUAN : Stabilité des systèmes de réglage.
R.G.E., mars 1952, p. 149.
6. — LOEB : C. R. Académie des Sciences, t. 233, p. 344.
— Phénomènes héréditaires dans les servo-mécanismes. *Annales des Télécommunications*, Déc. 1951.
— Transitoires dans les servo-mécanismes filtrés. *Annales des Télécommunications*, Oct. 1952.
7. — R. MEYER : Quelques résultats nouveaux concernant la régulation des turbines et des installations hydrauliques en général.
La Houille Blanche, n° 4-1952.
8. — W. OPPELT : Grundgesetze der Regelung.
Editeur : Wolfbüttler Verlags Anstalt, 1947.