Sur les singularités des écoulements plans et permanents des nappes souterraines pesantes

Singularities of plane and permanent gravity flow of ground water

PAR

J. KRAVTCHENKO,

G. SAUVAGE DE SAINT-MARC,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE

DIRECTEUR ADJOINT
DU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE

ET M. BORELI

INGÉNIEUR-DOCTEUR
INSTITUT HYDROTECHNIQUE, BELGRADE

Le présent mémoire est consacré à l'étude des singularités que peut présenter un écoulement plan et permanent d'un liquide pesant en milieu poreux, isotrope, et homogène. Le plan du mouvement est vertical; le liquide est soumis à l'action de la pesanteur seule. La discussion présentée est essentiellement locale; elle suppose connue a priori, dans le plan de la vitesse complexe, l'image conforme du voisinage de la singularité. Moyennant cette donnée, le problème peut être complètement résolu; les règles propres à fixer le choix de ce voisinage sont laissées de côté. L'importance de cette étude dans l'art de l'ingénieur est mise en relief.

Pour simplifier et alléger l'exposition, quelques résultats théoriques de Poloubarinova-Kotchina sont supposés connus; une démonstration élémentaire en sera publiée ailleurs.

The present note is devoted to the study of singularities that can occur in a plane steady gravity flow of liquid in a porous medium which is isotropic and homogeneous. The plane of movement is vertical; the liquid is subject to the action of gravity only. The discussion presented is for localised areas; it supposes known, in the complex velocity plane, the conformal pattern in the neighbourhood of the singularity. Assuming this given, the problem can be solved completely; the rules for fixing the choice of this neighbourhood are not considered. The importance of this study in engineering practice is illustrated.

To simplify and lighten the argument, a few theoretical results of Poloubarinova-Kotchina are taken for granted; an elementary demonstration of them will be published elsewhere.

INTRODUCTION

Considérons, dans un plan vertical, un écoulement plan, permanent, à potentiel, d'un liquide pesant en milieu poreux, homogène, isotrope. Le domaine empli par le liquide en mouvement est limité par des segments rectilignes (par exemple : parois et fond imperméables, frontières perméables du milieu poreux, lignes de suintement, etc.), et des lignes libres. On se propose d'étudier ici les singularités que peut présenter un tel écoulement en un point frontière commun à deux éléments de frontière de natures différentes : par exemple, en un point commun à une ligne libre et à une surface de suintement.

La méthode employée pour résoudre ce pro-

blème est une variante de celle de POLOUBARINOVA-KOTCHINA. Quelques compléments originaux donnent le moyen de pousser l'étude du voisinage de la singularité jusqu'aux éléments du second ordre et de préciser, en particulier, l'allure de la courbure d'une ligne libre en son point de raccordement avec un autre élément frontière. On complète ainsi les résultats classiques de CASA-GRANDE relatifs à l'existence et à l'orientation limite des tangentes à la ligne libre.

Nos conclusions paraissent présenter quelque intérêt pour l'ingénieur. D'une part, en effet, la connaissance a priori des singularités est essentielle pour construire un écoulement par des pro-

cédés approchés — les seuls susceptibles de rendre service dans l'étude théorique d'un projet d'ouvrage. D'autre part, on verra que ces singularités sont loin d'avoir une allure simple qui en permettrait une détermination élémentaire. Il nous a, dès lors, semblé opportun de présenter un exposé synthétique de la théorie des singularités, abordée trop souvent jusqu'ici par les seuls moyens qu'offre l'intuition. Mais si le recours à l'intuition permet souvent d'abréger les calculs, il n'est pas dépourvu de risques. Nous avons donc volontairement présenté nos conclusions sous une forme qu'exige la rigueur, mais dont nous sommes les premiers à regretter l'abs-

traction. Nous illustrons la théorie générale en discutant à fond deux exemples; nous utilisons une méthode uniforme, renonçant à l'emploi des remarques géométriques propres à abréger les calculs. Nous espérons ainsi mettre en évidence la puissance et la généralité des méthodes de POLOUBARINOVA-KOTCHINA.

Mais il est bien entendu que le praticien pourra — et même devra toujours — simplifier les calculs en utilisant de judicieux artifices. Nous comptons, dans une prochaine publication, présenter un autre exemple de discussion d'une singularité, plus conforme à l'esprit « ingénieur ».

CHAPITRE PREMIER

ÉNONCÉ ET HISTORIQUE DU PROBLÈME

1. — Dans un plan vertical, considérons un système d'axes rectangulaires Oxy , d'origine O , arbitraire, et dont l'axe Oy est vertical ascendant. Nous noterons : g l'accélération de la pesanteur; $z = x + iy$, la variable complexe du plan Oxy ; D , un domaine simplement connexe de ce plan; C , la frontière de D que nous supposons simple, pour simplifier — en excluant ainsi le cas, utile dans la pratique, où D comprendrait des coupures.

Envisageons dans D un écoulement permanent, plan, d'eau souterraine, de densité ρ , soumise à l'action de la pesanteur seule. Nous admettrons que D est constitué par un milieu poreux homogène et isotrope, caractérisé, au point de vue qui nous occupe, par sa constante de DARCY k . Rappelons rapidement quelques propriétés classiques de ces régimes.

Le champ des vitesses $\vec{V}(x, y)$ dérive du potentiel uniforme $\varphi(x, y)$; il existe une fonction de courant $\psi(x, y)$; φ et ψ sont deux fonctions harmoniques conjuguées, régulières dans D . Le potentiel complexe $f(z)$ est une fonction analytique de z , holomorphe dans D , définie par :

$$f(z) = \varphi + i\psi.$$

La vitesse complexe :

$$\Omega(z) = \frac{df}{dz} = u - iv,$$

où u et v sont les composantes du vecteur $\vec{V} = \text{grad } \varphi$ suivant les axes, est donc également une fonction holomorphe en chaque point de D . On notera que $u + iv$ n'est pas une fonction monogène de z dans D .

Il y a souvent intérêt à introduire la fonction de LEVI-CIVITA :

$$\omega(z) = \theta + i\tau$$

définie par :

$$\Omega(z) = e^{-i\omega}$$

On a donc : $|V| = e^\tau$; $\arg \vec{V} = \theta$. L'usage de $\omega(z)$ se recommande particulièrement dans l'étude des voisinages des parois solides imperméables limitant D , particulièrement des points anguleux de telles parois. Mais pour simplifier, nous éliminerons ces difficultés classiques de notre étude et, dans la suite, nous n'aurons pas à utiliser le plan ω .

Les correspondances $f = f(z)$ et $\Omega = \Omega(z)$ réalisent l'application conforme de D sur les domaines, simplement connexes, en général, des plans f et Ω que nous appellerons Δ et δ respectivement et dont nous noterons respectivement Γ et γ les frontières. Nous désignerons par $p = p(x, y)$ la pression hydrostatique au point x, y de D .

La loi de DARCY, dont nous avons admis la validité dans toute l'étendue de D , donne :

$$\vec{V} = -k \overrightarrow{\text{grad } h}.$$

On a posé :

$$h = \frac{p}{\rho g} + y$$

Enfin, l'équation de BERNOULLI s'applique et se réduit ici à :

$$\frac{\varphi}{k} + \frac{p}{\rho g} + y = C^{\text{te}} \quad \text{dans } D.$$

2. — Portons notre attention sur la frontière C de D. Dans les cas les plus courants, C comprend d'abord un certain nombre d'éléments donnés, à priori (sauf réserve spécifiée ci-après à propos des lignes de suintement), et appartenant à l'un des types suivants :

1. Les parois imperméables, que nous désignerons par C_1 ;
2. Les arcs de courbes C_2 , lignes de séparation (perméables au liquide) de D avec des bassins remplis d'eau, par où le liquide pénètre dans le milieu poreux D — ou sort de ce domaine. Nous rangerons encore sous cette rubrique les lignes-drains, le long desquelles les eaux souterraines sont, soit aspirées vers l'extérieur de D, soit refoulées vers l'intérieur de D sous l'effet d'une sous-pression ou d'une surpression convenable;
3. Les lignes de suintement C_3 ; le liquide sort de D le long de ces lignes à l'air libre et s'écoule le long d'elles. Il faut noter — point qui sera précisé ultérieurement — qu'une des extrémités des lignes C_1 , C_2 ou C_3 peut n'être pas connue, à priori.

Enfin, C peut contenir encore des surfaces libres C_4 qui sont, par définition, des lignes de courant à pression constante; les éléments de C du type C_4 sont de forme, à priori, inconnue; toutefois, la position de l'une des extrémités de C_4 est une donnée.

Bien entendu, la frontière C peut comprendre plusieurs éléments de chacun des types C_n ($n = 1, 2, 3, 4$).

Pour simplifier notre exposé, nous admettrons que les éléments C_1 , C_2 , C_3 de C, donnés à priori, sont constitués par des segments rectilignes. C'est là un cas qui intéresse tout spécialement l'ingénieur. Mais l'extension aux cas où les C_1 , C_2 , C_3 seraient des arcs de courbes assez régulières est aisée.

Rappelons rapidement les conditions frontières que vérifient les quantités φ , ψ , x , y , le long de C. Comme les C_1 , C_2 , C_3 sont des segments de droite donnés à priori, on aura tout d'abord sur C_n :

$$a_n x + b_n y + c_n = 0, \quad (n = 1, 2, 3) \quad (1)$$

où a_n , b_n , c_n , sont des constantes données. De plus :

1. C_1 est toujours une ligne de courant; on a donc :

$$\psi = C^{\text{te}} \quad \text{sur } C_1; \quad (2)$$

2. C_2 est toujours une équipotentielle; donc :

$$\varphi = C^{\text{te}} \quad \text{sur } C_2 \quad (3)$$

3. C_3 est une ligne à pression constante, égale, au surplus, à la pression atmosphérique.

Le théorème de BERNOULLI donne alors :

$$\varphi + ky = C^{\text{te}} \quad \text{sur } C_3 \quad (4)$$

De la définition même de C_4 , il résulte que le long de cet élément de C, les conditions (2) et (4) seront toujours vérifiées. Par contre, la forme géométrique de C_4 est, à priori, inconnue.

En résumé, le long de chaque élément de C, les quatre variables φ , ψ , x , y , sont liées par deux relations linéaires à coefficients constants, connus à priori; mais il faut souligner que les constantes qui figurent aux seconds membres de (2), (3) et (4) ne sont, en général, pas données.

Nous noterons Γ_n et γ_n , les éléments de Γ et de γ , images de C_n ($n = 1, 2, 3, 4$) dans les plans f et Ω respectivement. D'après (2) et (3), Γ_1 , Γ_2 et Γ_4 sont des segments de droite parallèles aux axes du plan f ; par contre, Γ_3 est une ligne de forme à priori inconnue.

On précisera la forme géométrique de γ_n en utilisant le raisonnement ci-après, à la fois élémentaire et classique. Différencions (1), (2), (3) et (4); il vient, eu égard à la définition de φ et de ψ :

$$a_n dx + b_n dy = 0 \quad (1')$$

$$v dx - u dy = 0 \quad (2')$$

$$u dx + v dy = 0 \quad (3')$$

$$u dx + (v + k) dy = 0 \quad (4')$$

On obtient donc la relation entre u et v le long de γ_n (c'est-à-dire l'équation cartésienne de la courbe symétrique par rapport à l'axe Ou de γ_n), en éliminant dx et dy entre deux des relations (1'), (2'), (3') et (4') — qui sont valables sur γ_n moyennant le changement de v en $-v$ en vertu de la définition même de cet élément frontière (*). Ainsi, une γ_1 [caractérisée par (1') et (2')], a pour équation :

$$a_1 u - b_1 v = 0$$

De même, on aura :

$$a_2 v + b_2 u = 0 \quad \text{pour } \gamma_2$$

$$a_3 (k - v) - b_3 u = 0 \quad \text{pour } \gamma_3 \quad (5)$$

$$u^2 + v^2 - kv = 0 \quad \text{pour } \gamma_4 \quad (6)$$

Ainsi, γ_1 , γ_2 et γ_3 sont des segments rectilignes dont une des extrémités peut n'être pas connue à priori; γ_4 est un arc de cercle (6). Mais il est essentiel de noter que les équations des γ_n ($n=1$,

(*) On se rappellera que $\Omega = u - iv$; il s'ensuit que le vecteur $\vec{V}$ et le vecteur de composantes u et $-v$ sont symétriques par rapport à Ou .

2, 3, 4) ne font intervenir que les constantes a_n , b_n et k qui sont des données. Il en résulte que la connaissance à priori de la nature de C — c'est-à-dire de la nature et de l'ordre de succession des différents éléments constitutifs C_n ($n=1, 2, 3, 4$) — suffit pour déterminer la forme générale du polygone mixtiligne γ , formé de segments de droites et d'arcs de cercle; en particulier, les angles de γ sont des données, mais la longueur des γ_n peut être une inconnue du problème.

Nous pouvons maintenant faire comprendre la raison pour laquelle l'une des extrémités des éléments de C ou de Γ , de supports donnés, peut être, à priori, inconnue. Rappelons que C_4 et Γ_3 sont des éléments inconnus, à priori, dans leurs plans respectifs z et f . Si C , par exemple, contient une C_4 , l'une de ses extrémités est une donnée, mais la position du point où cette ligne se raccorde à un élément contigu C_1 ou C_3 peut n'être pas connue (bien que la droite-support de l'un de ces segments soit une donnée). Dans le plan f , l'indétermination peut être plus grande encore, en ce qui concerne le raccord de Γ_3 avec l'élément contigu Γ_2 par exemple. Car, ici, la droite-support de Γ_2 , d'après ce qu'on a vu, n'est déterminée qu'à une translation près.

3. — La correspondance $f = f(z)$, holomorphe dans D , l'est aussi — comme son inverse $z = z(f)$ — en chaque point intérieur de l'élément C_n ($n=1, 2, 3, 4$) — ou de son image Γ_n dans le plan f .

En effet, l'analyse présentée au précédent paragraphe prouve que, quel que soit C_n , deux, au moins, des trois éléments de frontières homologues C_n , γ_n et Γ_n sont soit des segments de droite, soit des arcs de cercle. Le théorème classique de SCHWARZ — concernant la correspondance entre frontières analytiques dans la représentation conforme — entraîne alors l'holomorphie de l'une, au moins, des trois correspondances : $\Omega = \Omega(z)$, $\Omega = \Omega(f)$; $f = f(z)$ (ou de leurs inverses) à l'intérieur de C_n ou de ses images dans f ou Ω . Le résultat est donc justifié si C_n et Γ_n sont des segments de droite. Si, maintenant, le raisonnement précédent prouve, par exemple, l'holomorphie de $\Omega = \Omega(f)$ sur C_4 , une simple intégration étend la conclusion à $f = f(z)$.

Les raisonnements élémentaires et classiques qui précèdent montrent bien que $f = f(z)$ ne peut présenter de singularité qu'en un point $z = z_{nm}$, commun à deux éléments C_n et C_m de C ($n \neq m$; $n, m = 1, 2, 3, 4$); nous nommerons sommet de C un tel point z_{nm} .

Le but du présent mémoire est de préciser la singularité de $f(z)$ au point z_{nm} pour toute combinaison d'indices n et m , $n \neq m$.

A la vérité, la solution de ce problème est élémentaire dans la plupart des cas que nous aurons à examiner. On sait, en effet, que l'allure de $f(z)$

en un sommet z_{nm} de C — ou, ce qui revient au même, l'allure de $\Omega(f)$ ou de $\Omega(z)$ au point homologue de z_{nm} — ne dépend que des propriétés géométriques locales de l'un des couples (C, Γ) , (γ, C) , (Γ, γ) dans le voisinage du sommet considéré. Or, d'après les conclusions du paragraphe 2, γ est parfaitement déterminé dans le voisinage de chacun de ses sommets; il en est de même de l'un, au moins des polygones mixtilignes Γ et C — sauf au point z_{34} , commun à C_3 et C_4 . Ce cas exceptionnel écarté, le problème posé revient donc à étudier la correspondance conforme entre deux domaines dans le voisinage des deux points anguleux homologues de leurs frontières; chaque point anguleux étant constitué par l'intersection de deux segments de droite ou d'un segment de droite et d'un arc d'un cercle donné (tangents éventuellement entre eux). Les méthodes élémentaires permettent alors de conclure; mais leur application exige parfois des calculs fastidieux.

Nous nous proposons de présenter une discussion absolument générale et rapide des singularités de $f(z)$ — englobant, en particulier, le cas exceptionnel mentionné ci-dessus — et, dès lors, propre à satisfaire le technicien.

4. Car le problème qu'on vient d'énumérer est de grande importance pour l'ingénieur. La détermination explicite de $f(z)$ n'est possible que dans un petit nombre de cas, dont on trouvera la nomenclature dans les traités classiques de MUSCAT [1] (*) et de Mme POLOUBARINOVA-KOTCHINA [2]. Il s'ensuit que pour résoudre des problèmes concrets, l'ingénieur est obligé d'avoir recours aux méthodes d'approximation et aux méthodes analogiques (cuves électrolytiques, etc.) dont le rendement et la sécurité sont très améliorés chaque fois que l'on connaît, à priori, les singularités de la fonction inconnue $f(z)$. C'est pourquoi nous avons cru faire œuvre utile en publiant cette mise au point de l'état actuel de la théorie des singularités.

5. Avant d'entrer dans le vif du sujet, faisons un bref historique de la question et présentons un résumé des chapitres ultérieurs de ce travail.

Il est curieux de constater que, malgré son importance pratique, l'étude des singularités de $f(z)$ n'ait suscité des recherches systématiques que depuis peu de temps. A cet égard, il convient de signaler, en premier lieu, les nombreux travaux russes, spécialement ceux de Mme POLOUBARINOVA-KOTCHINA, dont on trouvera dans [2], chapitre VII, une copieuse bibliographie. Le grand traité de cet auteur est fondamental. L'essentiel de la théorie y est déjà exposé et un pa-

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie qu'on trouvera à la fin de l'article.

ragraphe entier du chapitre précité est consacré à la discussion des singularités de $f(z)$. Mais, d'une part, la méthode de [2] paraît un peu lourde; d'autre part, sa mise en œuvre n'a pas été poussée assez loin pour discuter quelques problèmes importants, comme, par exemple, l'étude de C_4 dans le voisinage de ses extrémités. On trouvera dans la courte note [3] une variante simplifiée des raisonnements de [2] — déjà utilisés dans la récente thèse de BORELI [4] — et quelques compléments propres à combler les lacunes de [2], signalées plus haut. Un mémoire à paraître [5] donnera la justification rigoureuse de notre méthode, dont nous résumons l'essentiel au chapitre II ci-après; puis au chapitre III, nous appliquerons les procédés de discussion de [2], modifiés par [3] et [4], à l'examen de deux cas typiques.

Signalons qu'on trouvera dans [4] des exemples de l'étude des singularités de $f(z)$ au moyen des procédés élémentaires dont on a décrit au paragraphe 3 le principe.

CHAPITRE II

ÉTUDE GÉNÉRALE DES SINGULARITÉS DE $f(z)$

6. Introduisons la variable complexe auxiliaire: $\zeta = \xi + i\eta$. Soit $z = z(\zeta)$, la fonction analytique, holomorphe dans le demi-plan supérieur $\Sigma: \eta \geq 0$ du plan ζ qui réalise l'application conforme de D sur Σ . L'image de C sera l'axe réel: $\eta = 0$. On peut, sans restreindre la généralité, supposer que le sommet z_{nm} (cf. le paragraphe 3) de C ($n, m = 1, 2, 3, 4; n \neq m$) a pour homologue le point $\zeta = 0$. Soit alors $\eta = 0; a \leq \xi \leq 0$ (ou $\zeta = 0, 0 \leq \xi \leq b$) l'image dans Σ de C_n (ou de C_m); a et b sont des constantes réelles. On montre immédiatement que $z = z(\zeta)$ est holomorphe sur chacun des segments réels qu'on vient de définir, sauf peut-être en leurs extrémités. Il en résulte que $f = f[z(\zeta)]$ possède la même propriété. Il est clair que la connaissance des singularités à l'origine $\zeta = 0$ des fonctions :

$$z = z(\zeta) = x(\xi, \eta) + i y(\xi, \eta)$$

et :

$$f = f(\zeta) = \varphi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] + i \psi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$$

suffit à déterminer l'allure de $f = f(z)$ dans le voisinage de z_{nm} . Cherchons à expliciter dans le plan ζ les conditions frontières que vérifient $z(\zeta)$ et $f(\zeta)$.

Au paragraphe 2, on a vu que les quatre fonctions de $\xi, \eta: x, y, \varphi$, et ψ , harmoniques dans Σ et deux à deux conjuguées, étaient liées sur chaque C_n par deux relations linéaires à coefficients constants. On peut donc écrire, d'une manière générale :

$$M_{np}x + N_{np}y + P_{np}\varphi + Q_{np}\psi = E_{np}$$

pour : $\eta = 0; a \leq \xi \leq 0; (p = 1, 2)$

où les coefficients de x, y, φ et ψ sont des constantes réelles, données a priori.

Des conditions analogues valent pour le segment $\eta = 0, 0 \leq \xi \leq b$; nous les noterons en changeant n en m dans les relations précédentes. Désignons, d'une manière générale, par le symbole $I_m F(\zeta)$, la partie imaginaire d'une fonction complexe quelconque $F(\zeta)$. Il est clair que les conditions précédentes peuvent encore s'écrire :

$$I_m [(N_{np} + i M_{np})z + (Q_{np} + i P_{np})f] = E_{np}; p = 1, 2$$

pour $\eta = 0, a \leq \xi \leq 0$.

Posons alors :

$$dz/d\zeta = Z(\zeta); df/d\zeta = F(\zeta);$$

$$\alpha_p = Q_{np} + i P_{np}; \beta_p = N_{np} + i M_{np};$$

en différenciant les deux relations précédentes sur le segment image de C_n — ce qui est légitime, puisque $z(\zeta)$ et $f(\zeta)$ sont holomorphes à l'intérieur de C_n — on trouve les relations du type :

$$I_m (\alpha_p F + \beta_p Z) = 0; p = 1, 2; \eta = 0; a \leq \xi \leq 0, \quad (7)$$

où α_p, β_p sont des constantes complexes, données a priori. On aurait, de même, les deux conditions aux limites :

$$I_m (A_p F + B_p Z) = 0; p = 1, 2; \eta = 0; 0 \leq \xi \leq b \quad (7')$$

où les A_p et B_p sont des constantes complexes données :

$$\begin{cases} A_p = Q_{mp} + i P_{mp} \\ B_p = N_{mp} + i M_{mp} \end{cases} \quad p = 1, 2$$

Inversement, d'après (7), les fonctions :

$$\alpha_p F + \beta_p Z = f_p (p = 1, 2)$$

sont prolongeables analytiquement à travers le segment $\eta = 0$, $\alpha \leq \xi \leq 0$ si Z et F sont finies et continues sur ce segment. Il en résulte que $Z(\zeta)$ et $F(\zeta)$ sont holomorphes sur C_n , car dans tous les cas pratiques, on aura :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (8)$$

On pourra donc résoudre en Z et F les relations $f_p = \alpha_p F + \beta_p Z$.

Le problème posé revient donc à déterminer les singularités des fonctions $Z(\zeta)$ et $F(\zeta)$ pour $\zeta = 0$, sachant qu'elles sont assujetties à vérifier les conditions frontières (7) et (7').

7. Dans [2], POLOUBARINOVA-KOTCHINA parvient à la solution en s'inspirant de la théorie des équations différentielles linéaires du type de FUCHS. Nous renvoyons à [5] pour une démonstration élémentaire des résultats essentiels de cet auteur que nous allons simplement énoncer.

On établit d'abord que dans le voisinage de $\zeta = 0$, $F(\zeta)$ et $Z(\zeta)$ sont nécessairement de la forme :

$$F(\zeta) = K_1 U_1 + K_2 U_2; \quad Z = K_3 U_1 + K_4 U_2 \quad (9)$$

avec :

$$U_1(\zeta) = \zeta^{\lambda_1} u_1(\zeta); \quad U_2(\zeta) = \zeta^{\lambda_2} u_2(\zeta). \quad (10)$$

Dans (9), les K_j ($j = 1, 2, 3, 4$) sont des constantes complexes, inconnues a priori; $u_1(\zeta)$ et $u_2(\zeta)$ sont des fonctions holomorphes pour $\zeta = 0$, telles que $u_1(0) = u_2(0) = 1$; λ_1 et λ_2 sont des constantes, nécessairement réelles (chaque fois que γ est un contour continu dans le voisinage d'un sommet homologue à $\zeta = 0$), inconnues a priori. Les exposants λ_1 et λ_2 , dits exposants caractéristiques, seront des racines d'une équation (E) que l'on formera ci-après. En général, on aura : $\lambda_1 \neq \lambda_2 + r$, r étant entier. Si $\lambda_1 - \lambda_2 = r$, les équations (10) sont à remplacer par les suivantes :

$$U_1(\zeta) = \zeta^{\lambda} u_1(\zeta); \quad U_2(\zeta) = \zeta^{\lambda} u_2(\zeta) \log \zeta \quad (10')$$

car, dans les cas pratiques (cf [5]), $r = 0$.

Nous poserons :

$$\left. \begin{aligned} K_j &= K'_j + i K''_j = R_j e^{i\pi\Phi_j} \quad (j = 1, 2, 3, 4) \\ z_p &= Q_{np} + i P_{np} = \varrho_{1p} e^{i\pi\mu_{1p}}; \\ \beta_p &= N_{np} + i M_{np} = \varrho_{2p} e^{i\pi\mu_{2p}}; \quad (p = 1, 2) \\ A_p &= Q_{mp} + i P_{mp} = \varrho_{3p} e^{i\pi\mu_{3p}}; \\ B_p &= N_{mp} + i M_{mp} = \varrho_{4p} e^{i\pi\mu_{4p}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

8. Nous allons utiliser les résultats précédents, que nous considérerons comme connus, pour expliciter λ_1 et λ_2 et pour déterminer les K_j . Admettons d'abord que $\lambda_1 - \lambda_2 \neq r$; on peut supposer que $\lambda_1 > \lambda_2$. Portons les expressions (9) et (10) de F et de Z dans (7) et (7'), en supposant que ζ^{λ_1} et ζ^{λ_2} se réduisent à leurs déterminations réelles pour $\zeta = \xi > 0$. Alors (7') donne, eu égard à (11), pour $\zeta = \xi > 0$:

$$\begin{aligned} I_m(A_p F + B_p Z) &= \xi^{\lambda_2} I_m \{ \varrho_{3p} R_2 e^{i\pi(\Phi_2 + \mu_{3p})} + \varrho_{4p} R_4 e^{i\pi(\Phi_4 + \mu_{4p})} + \dots \\ &+ \xi^{\lambda_1 - \lambda_2} [\varrho_{3p} R_1 e^{i\pi(\Phi_1 + \mu_{3p})} + [\varrho_{4p} R_3 e^{i\pi(\Phi_3 + \mu_{4p})} \dots] \} = 0; \quad (p = 1, 2), \end{aligned} \quad (12)$$

où le symbole... désigne des séries entières, absolument convergentes pour $|\xi|$ assez petit. Supprimons le facteur réel ξ^{λ_2} du premier membre de (12) et faisons tendre ξ vers zéro dans l'expression entre crochets. Comme $\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{\lambda_1 - \lambda_2} = 0$, il est clair que (12) entraîne :

$$\varrho_{3p} R_2 \sin [\pi(\Phi_2 + \mu_{3p})] + \varrho_{4p} R_4 \sin [\pi(\Phi_4 + \mu_{4p})] = 0 \quad (13)$$

On a supposé que $\lambda_1 - \lambda_2$ n'est pas un entier positif : (12) entraîne encore :

$$\varrho_{3p} R_1 \sin [\pi(\Phi_1 + \mu_{3p})] + \varrho_{4p} R_3 \sin [\pi(\Phi_3 + \mu_{4p})] = 0 \quad (13')$$

Le cas où $\lambda_1 - \lambda_2$ est un entier sera étudié au paragraphe 10.

Portons, de même, dans (7), les expressions (9) et (10) de F et de Z , en supposant que $\zeta = \xi = |\xi| e^{i\pi}$. Un raisonnement identique au précédent donne les quatre relations :

$$\varrho_{1p} R_2 \sin [\pi(\Phi_2 + \mu_{1p} + \lambda_2)] + \varrho_{2p} R_4 \sin [\pi(\Phi_4 + \mu_{2p} + \lambda_2)] = 0; \quad (14)$$

$$\varrho_{1p} R_1 \sin [\pi(\Phi_1 + \mu_{1p} + \lambda_1)] + \varrho_{2p} R_3 \sin [\pi(\Phi_3 + \mu_{2p} + \lambda_1)] = 0. \quad (14')$$

Nous renvoyons encore au § 10 pour la discussion de l'éventualité où $\lambda_1 - \lambda_2$ serait un entier.

On voit donc que l'ensemble des relations (13) et (14) constitue un système de quatre équations

linéaires et homogènes en $R_2 \cos \pi \Phi_2$, $R_2 \sin \pi \Phi_2$, $R_4 \cos \pi \Phi_4$ et $R_4 \sin \pi \Phi_4$ qui admet une solution non nulle si et si seulement leur déterminant est nul. Cela donne l'équation de définition de $\lambda_2 = \lambda$.

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} \cos [\pi (\mu_{11} + \lambda)] & \varphi_{11} \sin [\pi (\mu_{11} + \lambda)] & \varphi_{21} \cos [\pi (\mu_{21} + \lambda)] & \varphi_{21} \sin [\pi (\mu_{21} + \lambda)] \\ \varphi_{12} \cos [\pi (\mu_{12} + \lambda)] & \varphi_{12} \sin [\pi (\mu_{12} + \lambda)] & \varphi_{22} \cos [\pi (\mu_{22} + \lambda)] & \varphi_{22} \sin [\pi (\mu_{22} + \lambda)] \\ \varphi_{31} \cos \pi \mu_{31} & \varphi_{31} \sin \pi \mu_{31} & \varphi_{41} \cos \pi \mu_{41} & \varphi_{41} \sin \pi \mu_{41} \\ \varphi_{32} \cos \pi \mu_{32} & \varphi_{32} \sin \pi \mu_{32} & \varphi_{42} \cos \pi \mu_{42} & \varphi_{42} \sin \pi \mu_{42} \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

En opérant de même avec (13') et (14'), on vérifie que λ_1 est encore solution de (15). C'est l'équation (E) aux exposants caractéristiques que nous nous proposons de former. On voit d'abord que si (15) admet une racine λ , tout nombre de la forme $\lambda + r$, r étant un entier quelconque, sera encore racine de (15). Cela prouve, comme nous l'annonçons ci-dessus, que les exposants λ_1 et λ_2 ne peuvent être définis qu'à un entier additif près. Mais des considérations d'ordre géométrique et physique, dont on verra plus loin des exemples, permettent toujours de lever cette indétermination. Dans ce travail, nous supposons connu à priori le voisinage du point $\Omega(z_{n,m})$ appartenant à $\mathfrak{D}$, ce qui suffira pour fixer sans ambiguïté les valeurs de λ_1 et de λ_2 .

Observons que chaque élément des deux premières lignes de (15) est linéaire et homogène en $\cos \pi \lambda$ et $\sin \pi \lambda$; (15) est donc une équation du second degré $\operatorname{tg} \pi \lambda$ dont les racines sont nécessairement réelles d'après les résultats de [2] et de [5], rappelés au cours du paragraphe 7. Nous pouvons donc dans tous les cas calculer élémentairement λ_1 et λ_2 .

9. Ceci étant, l'ensemble des équations (13) et (14) — où λ_2 sera regardé comme connu — nous donnera $R_2 \cos \pi \Phi_2$, $R_2 \sin \pi \Phi_2$, $R_4 \cos \pi \Phi_4$ et $R_4 \sin \pi \Phi_4$ à un facteur arbitraire près; dans les cas courants, en effet, la matrice (15) est de rang 3. Il s'ensuit que $\operatorname{tg} \pi \Phi_2$ et $\operatorname{tg} \pi \Phi_4$ sont connues sans ambiguïté, ce qui permet de déterminer Φ_2 et Φ_4 à un entier additif près. On précisera la détermination de ces paramètres d'après le signe de la constante multiplicative, introduite ci-dessus pour que R_2 et R_4 soient > 0 . Donc R_2 et R_4 seront déterminés à un facteur constant > 0 près.

On opérera d'une manière toute semblable pour calculer R_1 , R_3 , Φ_1 et Φ_3 à partir de (13') et (14').

En résumé, la méthode permet de calculer facilement les exposants caractéristiques λ_1 et λ_2 et les rapports K_3/K_1 , K_4/K_2 . Il en résulte la connaissance des parties principales de $F(\zeta)$ et de $Z(\zeta)$, donc, par intégration, de celles de $f(\zeta)$ et $z(\zeta)$.

10. Si (15) admet une racine double en $\operatorname{tg} \pi \lambda$, ou, plus précisément, si $\lambda_1 = \lambda_2$ est un entier, les raisonnements du paragraphe 8 doivent subir une légère retouche.

Supposons que $\log \zeta$ se réduise à sa détermination réelle pour $\zeta = \xi > 0$; alors (12) demeure valable, à condition de remplacer entre les accolades du second membre $\xi^{\lambda_1 - \lambda_2}$ par $\log \xi$. Les raisonnements du paragraphe 8 s'appliquent encore et prouvent que les équations (13) et (13') subsistent intégralement.

Faisons, maintenant, $\zeta = |\xi| e^{\pi i}$, ($\xi < 0$), et portons dans (7) les valeurs (9) et (10') de F et de Z . Après la suppression du facteur réel $|\xi|^\lambda$, il y aura lieu de satisfaire deux conditions du type :

$$I_m e^{\lambda \pi i} [\alpha_p K_1 + \beta_p K_3 + (\alpha_p K_2 + \beta_p K_4) \pi i + (\alpha_p K_2 + \beta_p K_4) \log |\xi| + \dots] = 0, (p = 1, 2),$$

où le symbole... désigne encore une expression telle que :

$$\xi \sum_{q=0}^{q=\infty} a_q \xi^q + \xi \log |\xi| \sum_{q=0}^{q=\infty} b_q \xi^q$$

Des raisonnements élémentaires montrent alors que l'on doit avoir :

$$I_m [e^{\lambda \pi i} (\alpha_p K_2 + \beta_p K_4)] = 0, \quad (p = 1, 2),$$

équation identique à (14) et la relation qui remplace (14') :

$$\begin{aligned} & \varphi_{1p} R_1 \sin [\pi (\Phi_1 + \mu_{1p} + \lambda)] + \varphi_{2p} R_3 \sin [\pi (\Phi_3 + \mu_{2p} + \lambda)] \\ & = -\pi \{ \varphi_{1p} R_2 \cos [\pi (\Phi_2 + \mu_{1p} + \lambda)] + \varphi_{2p} R_4 \cos [\pi (\Phi_4 + \mu_{2p} + \lambda)] \} \quad (p = 1, 2). \end{aligned} \quad (16)$$

On voit que la détermination des constantes R_2 , R_4 , Φ_2 , Φ_4 , se fera encore selon le schéma indiqué au paragraphe 9. Par contre, le calcul de R_1 , R_3 , Φ_1 et Φ_3 exigera la discussion du système (13') et (16), non homogène (on supposera que le second membre de (16) a été déterminé comme il vient d'être dit) à déterminant nul. Nous donnerons dans [5] une démonstration indirecte de la compati-

bilité de (13') et de (16). Nous nous bornerons ici à faire remarquer que dans les applications techniques courantes, les coefficients de (13') et de (16) ont une forme très simple et la résolution de ce système sera, pratiquement, immédiate.

11. Il serait aisé de développer le premier membre de (15) : il nous a semblé préférable de conserver la forme symétrique du déterminant, plus facile à se rappeler et dont le calcul est immédiat dans la plupart des applications. En utilisant les formules (11), on voit que (15) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} Q_{n1} \cos \pi \lambda - P_{n1} \sin \pi \lambda & Q_{n1} \sin \pi \lambda + P_{n1} \cos \pi \lambda & N_{n1} \cos \pi \lambda - M_{n1} \sin \pi \lambda & N_{n1} \sin \pi \lambda + M_{n1} \cos \pi \lambda \\ Q_{n2} \cos \pi \lambda - P_{n2} \sin \pi \lambda & Q_{n2} \sin \pi \lambda + P_{n2} \cos \pi \lambda & N_{n2} \cos \pi \lambda - M_{n2} \sin \pi \lambda & N_{n2} \sin \pi \lambda + M_{n2} \cos \pi \lambda \\ Q_{m1} & P_{m1} & N_{m1} & M_{m1} \\ Q_{m2} & P_{m2} & N_{m2} & M_{m2} \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

D'après cela et la formule (11), les équations (13) et (13'), (14) et (14') s'écrivent respectivement :

$$K''_2 Q_{mp} + K'_2 P_{mp} + K''_4 N_{mp} + K'_4 M_{mp} = 0; \quad (p = 1, 2); \quad (18)$$

$$K''_1 Q_{mp} + K'_1 P_{mp} + K''_3 N_{mp} + K'_3 M_{mp} = 0; \quad (p = 1, 2); \quad (18')$$

$$\begin{aligned} & K''_2 (Q_{np} \cos \pi \lambda_2 - P_{np} \sin \pi \lambda_2) + K'_2 (Q_{np} \sin \pi \lambda_2 + P_{np} \cos \pi \lambda_2) + \\ & + K''_4 (N_{np} \cos \pi \lambda_2 - M_{np} \sin \pi \lambda_2) + K'_4 (N_{np} \sin \pi \lambda_2 + M_{np} \cos \pi \lambda_2) = 0, \quad (p = 1, 2); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & K''_1 (Q_{np} \cos \pi \lambda_1 - P_{np} \sin \pi \lambda_1) + K'_1 (Q_{np} \sin \pi \lambda_1 + P_{np} \cos \pi \lambda_1) + \\ & + K''_3 (N_{np} \cos \pi \lambda_1 - M_{np} \sin \pi \lambda_1) + K'_3 (N_{np} \sin \pi \lambda_1 + M_{np} \cos \pi \lambda_1) = 0, \quad (p = 1, 2). \end{aligned} \quad (19')$$

Enfin, l'équation (16) se transforme en la suivante :

$$\begin{aligned} & K''_1 (Q_{np} \cos \pi \lambda - P_{np} \sin \pi \lambda) + K'_1 (Q_{np} \sin \pi \lambda + P_{np} \cos \pi \lambda) \\ & + K''_3 (N_{np} \cos \pi \lambda - M_{np} \sin \pi \lambda) + K'_3 (N_{np} \sin \pi \lambda + M_{np} \cos \pi \lambda) \\ & = -\pi [K'_2 (Q_{np} \cos \pi \lambda - P_{np} \sin \pi \lambda) - K''_2 (Q_{np} \sin \pi \lambda + P_{np} \cos \pi \lambda) \\ & + K'_4 (N_{np} \cos \pi \lambda - M_{np} \sin \pi \lambda) - K''_4 (N_{np} \sin \pi \lambda + M_{np} \cos \pi \lambda)] \end{aligned} \quad (20)$$

Ainsi, pratiquement, on n'aura pas à mettre les quantités complexes α_p , β_p , A_p , B_p ($p = 1, 2$) sous la forme trigonométrique (11); celle-ci n'est utile que pour effectuer commodément quelques calculs intermédiaires.

La marche des calculs précédents est présentée dans [2] d'une manière différente. POLOUBARINOVA-KOTCHINA forme d'abord l'équation du second degré dont les racines sont $e^{2\pi i \lambda_1}$ et $e^{2\pi i \lambda_2}$; il nous semble que notre variante est plus directe et plus rapide. En second lieu, l'auteur précité n'aborde pas la détermination des constantes K_j [Cf. (9) et (11)]. On verra au chapitre suivant l'intérêt pratique de ce complément de la théorie.

Cependant, redisons une fois encore que l'essentiel du chapitre II se trouve déjà dans l'ouvrage fondamental [2].

CHAPITRE III

ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS

12. Nous allons illustrer les généralités du chapitre précédent en discutant d'une manière un peu détaillée les singularités de $f(z)$ aux sommets z_{42} et z_{34} de C . D'après les conventions adoptées aux paragraphes 2 et 3, z_{42} est commun à une équipotentielle C_2 et à une ligne libre C_4 . Pratiquement, la question revient à étudier l'al-

lure de C_4 dans le voisinage d'une paroi perméable. De même, l'étude du voisinage de z_{34} nous permettra de préciser l'allure d'une ligne libre dans le voisinage du point où elle se raccorde à une surface de suintement.

La plupart des résultats ci-après se trouvent déjà dans la thèse de BORELI [4]. Toutefois,

l'étude du point z_{42} est faite, dans un travail précité, par des moyens élémentaires décrits au paragraphe 3; la discussion qu'on va lire est, par ailleurs, plus complète.

13. Faisons $n=4$, $m=2$ dans les formules du paragraphe 6. Il en résulte que pour $a \leq \xi \leq 0$, $\eta=0$, nous avons [Cf. (3) et (4)] :

$$I_m(F) = 0;$$

$$I_m(iF + kZ) = 0.$$

ce qui permet d'écrire :

$$\left. \begin{aligned} Q_{41} &= 1; & P_{41} &= 0; & N_{41} &= 0; & M_{41} &= 0; \\ Q_{42} &= 0; & P_{42} &= 1; & N_{42} &= k; & M_{42} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Posons [Cf. (1)] :

$$a_2 = \sin \pi \alpha; \quad b_2 = -\cos \pi \alpha;$$

$\pi \alpha$ est, d'après cela, l'angle d'inclinaison de la paroi perméable sur l'horizontale. Il s'ensuit (Cf. § 2) que les conditions frontières le long de C_2 s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} I_m(iF) &= 0 \\ I_m[(\cos \pi \alpha - i \sin \pi \alpha) Z] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{pour } \eta = 0; \\ &0 \leq \xi \leq b \end{aligned}$$

On en déduit (Cf. § 6) :

$$\left. \begin{aligned} Q_{21} &= 0; & P_{21} &= 1; & N_{21} &= 0; & M_{21} &= 0; \\ Q_{22} &= 0; & P_{22} &= 0; & N_{22} &= \cos \pi \alpha; & M_{22} &= -\sin \pi \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

14. Portons les valeurs (21) et (22) dans l'équation (17); il vient :

$$\begin{vmatrix} \cos \pi \lambda & \sin \pi \lambda & 0 & 0 \\ -\sin \pi \lambda & \cos \pi \lambda & k \cos \pi \lambda & k \sin \pi \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \pi \alpha & -\sin \pi \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

En développant le premier membre de (23) suivant les éléments de la troisième ligne, on trouve :

$$k \cos \pi \lambda \sin [\pi (\lambda + \alpha)] = 0$$

en sorte que, r et r_1 étant des entiers quelcon-

Admettons — ce qui ne restreint pas la généralité — que $z_{42} = 0$, $f_{42} = f(z_{42}) = 0$. On déduit de là :

$$\left. \begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{i k R_3 \cos \pi \alpha}{(1/2) + r + 1} \zeta^{(1/2)+r+1} v_1(\zeta) \\ z(\zeta) &= e^{\pi i \alpha} \left[\frac{R_3}{(1/2) + r + 1} \zeta^{(1/2)+r+1} v_1(\zeta) + \frac{R_4}{r_1 - \alpha + 1} \zeta^{-\alpha+r_1+1} v_2(\zeta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (24')$$

où $v_1(\zeta)$ et $v_2(\zeta)$ sont encore des fonctions holomorphes à l'origine, telle que $v_1(0) = v_2(0) = 1$; comme $1 > 1 - \alpha > 0$, on voit déjà que $z(0) = 0$ exige que : $r_1 \geq 0$, $r \geq -1$.

ques (dont on précisera ultérieurement les valeurs) :

$$\lambda_1 = (1/2) + r; \quad \lambda_2 = -\alpha + r_1.$$

Notons que $\lambda_1 - \lambda_2$ se réduit à un entier si $\alpha = 1/2$; la paroi perméable est alors verticale. D'après ce qu'on a vu au paragraphe 7, les singularités de F et de Z sont, pour $\alpha = 1/2$, d'un type différent [Cf. (9) et (10')] : nous discuterons au paragraphe 18 ce cas particulier en détail. Jusqu'à nouvel ordre, nous supposons $\alpha \neq 1/2$.

15. Passons maintenant à la détermination des constantes K_j ($j=1, 2, 3, 4$). Pour $\lambda = \lambda_1 = 1/2$, la matrice (23) devient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \pi \alpha & -\sin \pi \alpha \end{vmatrix}$$

Elle est de rang 3; si donc R_3 est une constante réelle, arbitraire — dont nous préciserons ultérieurement le signe — on a : [Cf (18') et (19')] :

$$K_1 = i k R_3 \cos \pi \alpha; \quad K_3 = R_3 e^{i \pi \alpha}.$$

Si, maintenant, on prend : $\lambda = \lambda_2 = -\alpha$, la matrice (23) se réduit à :

$$\begin{vmatrix} \cos \pi \alpha & -\sin \pi \alpha & 0 & 0 \\ \sin \pi \alpha & \cos \pi \alpha & k \cos \pi \alpha & -k \sin \pi \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \pi \alpha & -\sin \pi \alpha \end{vmatrix}$$

De (18) et (19), il résulte alors, R_4 étant une constante réelle arbitraire dont le signe est à préciser) :

$$K_2 = 0; \quad K_4 = R_4 e^{i \pi \alpha}.$$

Alors (9) et (10) entraînent :

$$\left. \begin{aligned} F(\zeta) &= i k R_3 \cos \pi \alpha \zeta^{(1/2)+r} u_1(\zeta); \\ Z(\zeta) &= e^{\pi i \alpha} [R_3 \zeta^{(1/2)+r} u_1(\zeta) + R_4 \zeta^{-\alpha+r_1} u_2(\zeta)] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

16. Nous sommes maintenant en mesure de préciser les valeurs des entiers r et r_1 et les signes des paramètres R_3 et R_4 .

Tout d'abord, observons que, d'après la définition même de z_{42} , la frontière Γ est constituée, dans le voisinage du point f_{42} , par le segment Γ_2 d'équation $\varphi = 0$, $\psi \leq 0$ et le segment Γ_4 , d'équation $\psi = 0$, $\varphi \geq 0$, le domaine Δ étant contenu dans le quadrant : $\varphi \geq 0$, $\psi \leq 0$. Il en résulte [Cf. (24')] qu'on a pour $\alpha - (1/2) < 0$ (donc, pour $\cos \pi \alpha > 0$) :

$$[p + (1/2)] \pi = \arg f(\zeta) = -(\pi/2) + 2q\pi, \\ \text{pour } \zeta = \xi > 0;$$

$$(p + r + 2)\pi = \arg f(\zeta) = 2q\pi, \\ \text{pour } \zeta = \xi < 0,$$

où q est un entier quelconque et où p est défini au moyen de $R_3 = |R_3| e^{i p \pi}$, ($p = 0, 1$). On voit donc que $p = 1$, $r = -1$, en sorte que, R_3 étant pris positif, (24) s'écrit pour $\alpha - (1/2) < 0$:

$$\left. \begin{aligned} F(\zeta) &= -i k \cos \pi \alpha R_3 \zeta^{-1/2} u_1(\zeta); \\ Z(\zeta) &= e^{i \pi \alpha} [-R_3 \zeta^{-1/2} u_1(\zeta) + R_4 \zeta^{-\alpha+r_1} u_2(\zeta)] \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Pour $\alpha - (1/2) > 0$, on fera dans (25) : $R_3 < 0$; car alors $\cos \pi \alpha < 0$.

Il est clair qu'aucune des constantes R_3 et R_4 ne peut être nulle. Si, par exemple, on avait $R_3 = 0$, (25) donnerait : $F(\zeta) = 0$, ce qui est impossible. De même l'hypothèse $R_4 = 0$ entraînerait :

$$\Omega(\zeta) = \frac{F(\zeta)}{Z(\zeta)} = \frac{i k \cos \pi \alpha}{e^{i \pi \alpha}} = C^{iv},$$

Le champ des vitesses serait uniforme dans le voisinage de la singularité, donc uniforme partout, ce qui est absurde. Posons $c = -(R_4/R_3)$; appelons encore $w_1(\zeta) = u_2/u_1$; c'est une fonction holomorphe à l'origine telle que $w_1(0) = 1$; (25) donne :

$$\frac{1}{\Omega(\zeta)} = \frac{e^{i \pi \alpha}}{i k \cos \pi \alpha} [1 + c \zeta^{r_1 + (1/2) - \alpha} w_1(\zeta)] \quad (26)$$

On en déduit aisément le développement limité valable dans le domaine de $\zeta = 0$, chaque fois que : $r_1 + (1/2) - \alpha > 0$:

$$\Omega(\zeta) = i k \cos \pi \alpha e^{-i \pi \alpha} [1 - c \zeta^{r_1 + (1/2) - \alpha} w_1(\zeta) + \dots] \quad (26')$$

où le symbole... désigne une série entière en $c \zeta^{r_1 + (1/2) - \alpha} w_1(\zeta)$.

D'après ce que nous avons vu tout à l'heure :

$r_1 \geq 0$; la formule (26') s'applique chaque fois que $1/2 - \alpha > 0$.

Pour préciser le choix de r_1 , des considérations d'ordre géométrique et physique deviennent nécessaires. Nous avons admis que γ était un contour continu. Cette hypothèse exprime une propriété commune à tous les écoulements physiquement acceptables : le module du vecteur vitesse $\vec{V}$ doit avoir une valeur bien déterminée en chaque point de D — valeur qui peut, éventuellement, devenir infinie. Il en résulte que les coordonnées u , v_1 du point :

$$\Omega_{42} = \Omega(z_{42}) = u - iv = u + i v_1$$

s'obtiennent en résolvant le système :

$$u^2 + v^2 - kv = 0 \quad (27)$$

$$u \cos \pi \alpha - v \sin \pi \alpha = 0$$

dont les racines sont :

$$\begin{aligned} u &= 0 & u &= k \sin \pi \alpha \cos \pi \alpha; \\ v_1 &= 0 & v_1 &= k \cos^2 \pi \alpha. \end{aligned}$$

Or, compte tenu du sens général du mouvement — qui est le sens positif de Ox — on voit que $u \geq 0$ sur γ_2 ; on en déduit (Cf. 27) que v_1 et $(1/2) - \alpha$ sont du même signe le long de cette ligne. Cela montre que $\Omega(0)$ est défini par :

$$\Omega(0) = \Omega_{42} = 0,$$

si $\alpha - (1/2) > 0$

et :

$$\Omega(0) = \Omega_{42} = i k \cos \pi \alpha e^{-i \pi \alpha},$$

si $\alpha - (1/2) < 0$; ces conclusions sont en accord avec (26) et (26'), où $r_1 \geq 0$. Enfin, (27) montre immédiatement que γ_4 est située dans le domaine $v \geq 0$, quel que soit α , $0 < \alpha < 1$. Rappelons aussi que si $\zeta = \xi$ décrit l'axe réel dans le sens positif, $\Omega(\zeta)$ décrit γ dans le sens direct, parcourant, dans cet ordre, γ_4 et γ_2 .

Deux cas sont, dès lors, à considérer :

1° $\alpha - (1/2) > 0$. Alors γ contient le point $\Omega(0) = \Omega_{42} = 0$. Dans le voisinage de Ω_{42} , le domaine δ est défini par les inégalités :

$$u^2 + v^2 - kv \geq 0;$$

$$u \cos \pi \alpha - v \sin \pi \alpha \leq 0,$$

et $\arg \Omega(\xi)$ passe de 0 à $\pi [(1/2) - \alpha]$ lorsque le point $\zeta = \xi$ traverse l'origine en décrivant $\gamma = 0$ dans le sens positif.

Contrôlons ces prévisions en discutant (26). Il est clair que $\Omega(0) = 0$ entraîne :

$$r_1 + (1/2) - \alpha < 0.$$

Comme $r_1 \geq 0$ et $|(1/2) - \alpha| < 1$, cela exige $r_1 = 0$. Alors on déduit de (26) le développement limité :

$$\Omega(\zeta) = \frac{k \cos \pi \alpha e^{i[(1/2) - \alpha] \pi i}}{c} \zeta^{\alpha - (1/2)} [1 - (1/c) \zeta^{\alpha - (1/2)} + O(\zeta^{2\alpha - 1})],$$

où le symbole $O(\zeta)$ désigne, suivant l'usage, un infiniment petit d'ordre ζ . On tire de là les équations paramétriques de γ dans le voisinage de $\Omega = 0$.

$$\left. \begin{aligned} u(\xi) &= \frac{k \cos \pi \alpha}{c} |\xi|^{\alpha - 1/2} - \frac{k \cos \pi \alpha \sin \pi \alpha}{c^2} |\xi|^{2\alpha - 1} + O(\zeta^{3\alpha - 3/2}); \\ v(\xi) &= \frac{k \cos^2 \pi \alpha}{c^2} |\xi|^{2\alpha - 1} + O(\zeta^{3\alpha - 3/2}); \end{aligned} \right\} \text{ pour } \gamma_4 : \quad \zeta = \xi < 0.$$

et :

$$\left. \begin{aligned} u(\xi) &= \frac{k \cos \pi \alpha \sin \pi \alpha}{c} |\xi|^{\alpha - 1/2} [1 - \frac{1}{c} \xi^{\alpha - 1/2} + O(\zeta^{2\alpha - 1})] \\ v(\xi) &= \frac{k \cos^2 \pi \alpha}{c} |\xi|^{\alpha - 1/2} [1 - \frac{1}{c} \xi^{\alpha - 1/2} + O(\zeta^{2\alpha - 1})]; \end{aligned} \right\} \text{ pour } \gamma_2 : \quad \zeta = \xi > 0.$$

Comme $\cos \pi \alpha < 0$, on voit que u ne peut être positif sur γ_4 et v_1 n'est négatif sur γ_2 , dans le voisinage de l'origine $\zeta = 0$, que si :

$$c = -(R_4/R_3) < 0.$$

Ainsi donc, la condition $\Omega(0) = 0$ suffit pour déterminer la valeur de r_1 ; par contre, la discussion des signes de R_4 exige la connaissance, à priori, de la forme qu'affecte le domaine δ dans le voisinage de l'origine $\zeta = 0$, que si :

2° $\alpha - (1/2) < 0$. Alors γ contient le point $\Omega(0) = \Omega_{42} = k \cos \pi \alpha e^{i[(1/2) - \alpha] \pi i}$.

Supposons que le voisinage de Ω_{42} du domaine δ soit, dans ce cas, défini par l'un des deux groupes d'inégalités :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \begin{cases} u^2 + v^2 - kv \geq 0; \\ u \cos \pi \alpha - v \sin \pi \alpha \leq 0. \end{cases} \\ \text{(II)} \quad & \begin{cases} u^2 + v^2 - kv \leq 0; \\ u \cos \pi \alpha - v \sin \pi \alpha \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le cas (I), $\arg [\Omega(\zeta) - \Omega_{42}]$ passe de $\pi(1 - 2\alpha)$ à $\pi[(1/2) - \alpha]$ lorsque ξ traverse l'origine par valeurs croissantes; dans le cas (II), $\arg [\Omega(\zeta) - \Omega_{42}]$ passe, dans les mêmes conditions, de $-2\pi\alpha$ à $-\pi[\alpha + (1/2)]$.

Comparons ces résultats, à priori, avec (26'). Posons $c = |c| e^{pi\pi}$, $p = 0, -1$. Il vient :

$$\arg [\Omega(\xi) - \Omega_{42}] = \pi [(3/2) - \alpha + p] + 2\pi q, \quad \text{pour } \zeta = \xi > 0;$$

$$\arg [\Omega(\xi) - \Omega_{42}] = \pi [2 - 2\alpha + p + r_1] + 2\pi q, \quad \text{pour } \zeta = \xi < 0,$$

q étant un entier quelconque. On voit alors immédiatement que $p = -1$, $r_1 = 0$ dans le cas (I) et que $p = 0$, $r_1 = 0$ dans le cas (II). Dans le cas (I), on prendra pour R_4 un nombre positif et un nombre négatif dans le cas II.

En résumé, quel que soit le signe de $\alpha - (1/2)$, on a : $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = -\alpha$. Si $\alpha - (1/2) < 0$, $R_3 > 0$ [Cf. (25)]; de plus, $R_4 > 0$ dans le cas (I) et $R_4 < 0$ dans le cas (II). Si $\alpha - (1/2) > 0$, $R_3 < 0$ et $R_4 < 0$ dans (25); dans (24), on ferait : $R_3 > 0$ et $R_4 < 0$.

17. Nous sommes maintenant en mesure d'étudier l'allure de la ligne C_4 dans le voisinage de $z_{42} = 0$. Dans le cas où $\alpha - (1/2) > 0$, nous avons, en remplaçant R_3 par $-R_3^2$ et R_4 par $-R_4^2$ dans les formules (25) (à noter qu'on a changé R_3 en $-R_3$ en passant de (24) à (25)) :

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= 2ik R_3^2 \cos \pi \alpha \zeta^{1/2} v_1(\zeta); \\ z(\zeta) &= e^{\pi i \alpha} \left[2 R_3^2 \zeta^{1/2} v_1(\zeta) - \frac{R_4^2}{1 - \alpha} \zeta^{1-\alpha} v_2(\zeta) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Ces formules conviennent aussi au cas (I), si $\alpha - (1/2) < 0$, à condition d'y remplacer R_3^2 et R_4^2 par $-R_3^2$ et $-R_4^2$ respectivement.

Dans le cas (II) [$\alpha - (1/2) < 0$], il suffit d'y changer R_3^2 en $-R_3^2$. Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans l'hypothèse où $\alpha - (1/2) < 0$ (cas I). D'après (28), nous pouvons écrire les dé-

veloppements limités des équations paramétriques $x = x(\xi)$, $y = y(\xi)$, $\xi < 0$ de C_4 sous la forme valable pour de petites valeurs de $|\xi|$:

$$x(\xi) = 2 \sin \pi \alpha R_3^2 \sqrt{|\xi|} - \frac{R_4^2}{1-\alpha} |\xi|^{1-\alpha} + O(|\xi|^{3/2}). \quad (29)$$

$$y(\xi) = -2 \cos \pi \alpha R_3^2 \sqrt{|\xi|} + O(|\xi|^{3/2});$$

Ici, le terme $|\xi|^{1-\alpha}$ est infiniment petit par rapport à $|\xi|^{1/2}$. Il suffira d'y remplacer R_4^2 en $-R_4^2$ pour avoir les équations approchées de C_4 dans le cas (II). A noter que ces deux éventualités (I) et (II) peuvent effectivement se produire; le sens de la courbure de C_4 dans le voisinage de z_{42} change d'un cas à l'autre. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ce point; on trouvera dans la thèse de BORELI [4] tous les détails désirables.

Enfin, les formules (29) conviennent encore au cas $\alpha - (1/2) > 0$, à condition d'y remplacer R_4^2 par $-R_4^2$; mais alors dans (29₁) le terme $|\xi|^{1/2}$ est un infiniment petit par rapport à $|\xi|^{1-\alpha}$; de plus, $O(|\xi|^{3/2})$ est à remplacer par $O(|\xi|^{2-\alpha})$. Sans entrer dans les détails, tirons de (29) quelques conséquences immédiates. D'abord, si $\alpha - (1/2) < 0$, on voit que la pente de la tangente à C_4 au point $z_{42} = 0$ vaut $-\cotg \pi \alpha$; la ligne libre C_4 est normale en z_{42} à la paroi perméable C_2 . Au contraire, si $\alpha - (1/2) > 0$, C_4 admet en z_{42} une tangente horizontale.

Etudions la courbure de C_4 au point z_{42} . Si $\alpha - (1/2) < 0$ (cas I), on tire de (29) l'équation cartésienne de C_4 , sous forme de développement limité, valable dans le voisinage de l'origine :

$$x = -y \operatorname{tg} \pi \alpha - \frac{R_4^2}{(4 R_3^4 \cos^2 \pi \alpha)^{1-\alpha} (1-\alpha)} (-y)^{2(1-\alpha)},$$

Il suffirait de changer R_4^2 en $-R_4^2$ pour avoir ce développement dans le cas II. Il est aisé d'en déduire que la courbure de C_4 en z_{42} est infinie. On obtiendrait une conclusion identique en opérant directement sur les équations paramétriques (29) et en utilisant la relation classique :

$$\mathcal{R} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x' y'' - y' x''}$$

où $\mathcal{R}$ désigne le rayon de courbure de C_4 et où les accents notent la dérivation par rapport à la variable indépendante $t = |\xi|^{1/2}$.

La formule précédente permet aussi d'affirmer que C_4 présente encore en z_{42} une courbure infinie pour $\alpha - (1/2) > 0$.

18. Il nous reste, maintenant, à étudier le cas singulier $\alpha = 1/2$. Ici, l'équation caractéristique (23) se réduit à :

$$k \cos^2 \pi \lambda = 0.$$

qui admet la racine double $\lambda = -1/2$, à un entier additif près. Les raisonnements des paragraphes 10 et 14 montrent que pour $\alpha = 1/2$, on a :

$$K_2 = 0; \quad K_4 = R_4 i,$$

où R_4 est une constante réelle arbitraire, dont le signe reste à préciser. Compte tenu de ces résultats, des formules (21) et (22), où l'on fera $\alpha = 1/2$, les équations (18') et (20) s'écrivent :

$$K'_1 = 0; \quad K'_3 = 0; \quad K''_1 = -\pi k K''_4$$

On en déduit :

$$K_1 = -i \pi k R_4 \quad K_3 = R_3 i.$$

Moyennant (9) et (10'), on peut donc écrire les expressions valables pour $|\zeta|$ petit :

$$F(\zeta) = -i \pi k R_4 \zeta^{-(1/2)+r} u_1(\zeta); \\ Z(\zeta) = i R_3 \zeta^{-(1/2)+r} u_1(\zeta) + R_4 i \zeta^{-(1/2)+r} \log \zeta u_2(\zeta)$$

où r est un entier que nous allons déterminer. A cet effet, il suffit de reprendre l'examen du plan f ; les raisonnements du paragraphe 16 s'appliquent ici immédiatement et prouvent que $r=0$. On voit, du même coup, que $R_4 > 0$; en changeant R_4 en R_4^2 , nous avons les formules :

$$f(\zeta) = -2 i \pi k R_4^2 \zeta^{1/2} v_1(\zeta), \\ z(\zeta) = 2 R_3 i \zeta^{1/2} v_1(\zeta) \\ + 2 R_4^2 i \zeta^{1/2} [\log \zeta v_2(\zeta) - 2 v_3(\zeta)]$$

qui supposent encore : $z_{42} = 0$, $f_{42} = 0$ et où $v_1(\zeta)$, $v_2(\zeta)$, $v_3(\zeta)$ sont toujours des fonctions holomorphes à l'origine, telles que $v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 1$. On déduit de là les équations paramétriques de C_4 dans le voisinage de l'origine :

$$x(\xi) = -R_3 \sqrt{|\xi|} - 2 R_4^2 \sqrt{|\xi|} (\log |\xi| - 2) \\ + O(|\xi|^{3/2} \log |\xi|); \quad \left. \begin{aligned} y(\xi) &= -2 R_4^2 \pi \sqrt{|\xi|} + O(|\xi|^{3/2} \log |\xi|). \end{aligned} \right\} \xi = \xi < 0$$

Il s'ensuit que :

- 1° La tangente à C_4 au point $z = z_{42}$ est horizontale;
- 2° La courbure de C_4 en ce point est infinie.

19. Passons maintenant à l'étude du voisinage du sommet z_{34} , commun à une ligne de suintement C_3 et à une ligne libre C_4 . La discussion étant analogue à celle qu'on vient de faire, nous nous bornerons à l'essentiel. Admettons, pour fixer les idées, que l'on rencontre les éléments contigus C_3 , C_4 dans cet ordre et quand on décrit C dans le sens direct. Alors, nous ferons $n=3$ et $m=4$ dans les formules du paragraphe 6. Donc, pour $\eta=0$ et $a \leq \xi \leq 0$, nous avons (Cf. le paragraphe 2) :

$$I_m(Z e^{-i \pi \alpha}) = 0;$$

$$I_m(i F + k Z) = 0$$

en appelant $\pi \alpha$ l'angle d'inclinaison de la droite de suintement sur l'horizontale. Il s'ensuit [Cf. (11)] :

$$Q_{31} = 0; P_{31} = 0; N_{31} = \cos \pi \alpha; M_{31} = -\sin \pi \alpha; \quad (30)$$

$$Q_{32} = 0; P_{32} = 1; N_{32} = k; M_{32} = 0.$$

De même (Cf. le paragraphe 13), on a, pour $\eta = 0$ et $0 \leq \xi \leq b$:

$$I_m(F) = 0$$

$$I_m(iF + kZ) = 0$$

en sorte que :

$$Q_{41} = 1; P_{41} = 0; N_{41} = 0; M_{41} = 0; \quad (31)$$

$$Q_{42} = 0; P_{42} = 1; N_{42} = k; M_{42} = 0.$$

Les valeurs (30) et (31) des P, Q, M, N portées dans (17) donnent l'équation en λ :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cos [\pi(\lambda - \alpha)] & \sin [\pi(\lambda - \alpha)] \\ \sin \pi \lambda & \cos \pi \lambda & k \cos \pi \lambda & k \sin \pi \lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (32)$$

qui, développée par rapport aux éléments de la troisième ligne du déterminant, s'écrit :

$$k \cos [\pi(\alpha - \lambda)] \sin \pi \lambda = 0$$

Les exposants caractéristiques sont donc :

$$\lambda_1 = r; \quad \lambda_2 = \alpha - (1/2) + r_1$$

où r et r_1 sont des entiers quelconques. On voit que $\lambda_1 - \lambda_2$ ne sera un entier que si $\alpha = 1/2$; la paroi de suintement est alors verticale et ce cas devra être examiné à part. Jusqu'à nouvel ordre, nous admettrons essentiellement : $\alpha \neq 1/2$.

20. Déterminons les constantes K_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Faisons $\lambda = \lambda_1 = 0$ dans la matrice du déterminant (32); il vient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cos \pi \alpha & \sin \pi \alpha \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \end{vmatrix}$$

Les formules (18') et (19') permettent aussitôt d'écrire :

$$K_1 = -k R_3 \sin \pi \alpha; \quad K_3 = R_3 e^{\pi i \alpha} \quad (33)$$

De même, en faisant dans (32) :

$$\lambda = \lambda_2 = \alpha - 1/2,$$

on obtient le tableau :

0	0	0	-1
$\cos \pi \alpha$	$\sin \pi \alpha$	$k \sin \pi \alpha$	$-k \cos \pi \alpha$
1	0	0	0
0	1	k	0

Les formules (18) et (19) donnent alors :

$$K_2 = -k R_4; \quad K_4 = R_4 i. \quad (34)$$

Rappelons, une fois encore, que R_3 et R_4 sont des constantes réelles arbitraires dont le signe est à déterminer. Nous pouvons écrire [Cf. (9) et (10)] :

$$F(\zeta) = -k [R_3 \sin \pi \alpha \zeta^r u_1(\zeta) + R_4 \zeta^{\alpha - (1/2) + r_1} u_2(\zeta)]; \quad (35)$$

$$Z(\zeta) = R_3 e^{\pi i \alpha} \zeta^r u_1(\zeta) + R_4 i \zeta^{\alpha - (1/2) + r_1} u_2(\zeta),$$

où $u_1(\zeta)$, $u_2(\zeta)$ sont, comme toujours, des fonctions holomorphes à l'origine, telle que $u_1(0) = u_2(0) = 1$. Il en résulte, en notant z_0 , f_0 des constantes complexes arbitraires et $v_1(\zeta)$, $v_2(\zeta)$ des fonctions holomorphes à l'origine, telles que $v_1(0) = v_2(0) = 1$:

$$f(\zeta) = f_0 - k \left[\frac{R_3 \sin \pi \alpha}{r+1} \zeta^{r+1} v_1(\zeta) + \frac{R_4}{\alpha + (1/2) + r_1} \zeta^{\alpha + (1/2) + r_1} v_2(\zeta) \right]; \quad (36)$$

$$z(\zeta) = z_0 + \frac{R_3}{r+1} e^{\pi i \alpha} \zeta^{r+1} v_1(\zeta)$$

$$+ \frac{R_4 i}{\alpha + (1/2) + r_1} \zeta^{\alpha + (1/2) + r_1} v_2(\zeta).$$

Il faut observer que ces formules sont valables tant que $r \neq -1$. Sinon le développement de $z(\zeta)$ commencerait par un terme logarithmique. Alors $z(0) = \infty$, cas que nous écartons puisque D est borné. A noter encore que $\alpha + (1/2) + r_1$ ne peut être nul, car r_1 est entier et $0 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 1/2$.

21. Il nous reste maintenant à déterminer les entiers r et r_1 ; nous laissons au lecteur le soin de préciser les signes des constantes R_3 et R_4 . En premier lieu, f_{34} et z_{34} sont bornés en module, par hypothèse. Les formules (36) montrent immédiatement que cela exige :

$$r+1 > 0; \quad \alpha + (1/2) + r_1 > 0 \quad (37)$$

La première de ces relations peut encore s'écrire $r \geq 0$, car $r \neq -1$.

Précisons la forme du domaine δ dans le voisinage du point Ω_{34} . D'après (5) et (6), ce point est à l'intersection des courbes :

$$u^2 + v^2 - kv = 0,$$

$$u \cos \pi \alpha - (v - k) \sin \pi \alpha = 0,$$

c'est-à-dire l'un des points de coordonnées u, v_1 :

$$u = 0; \quad v_1 = k;$$

$$u = -k \sin \pi \alpha \cos \pi \alpha; \quad v_1 = k \sin^2 \pi \alpha$$

Le point Ω_{34} peut effectivement se confondre avec chacun des deux points ci-dessus. Cherchons par exemple une condition pour qu'on ait :

$$\Omega_{34} = -k \sin \pi \alpha e^{-\pi i \alpha}.$$

Supposons que dans le voisinage de Ω_{34} le domaine δ soit défini par les inégalités :

$$u^2 + v^2 - kv \geq \leq 0; \quad (37')$$

$$u \cos \pi \alpha - (v - k) \sin \pi \alpha \geq \leq 0,$$

les signes $\geq$ et $\leq$ se correspondent dans les deux lignes

en sorte que le contour γ présente en Ω_{34} un point anguleux. Il en résulte qu'aucune des constantes R_3 et R_4 ne sauraient être nulle, sinon, d'après (35), la correspondance :

$$\Omega(\zeta) = [F(\zeta)/Z(\zeta)]$$

serait holomorphe à l'origine et, en particulier, la tangente à γ ne subirait pas de discontinuité au point Ω_{34} ; d'ailleurs, $\Omega(\zeta)$ se réduirait à une constante.

Ceci étant, on tire de (35), en prenant $c = (R_4/R_3)$ (c étant une constante réelle finie, non nulle); $m = \alpha - (1/2) + r_1 - r$:

$$\Omega(\zeta) = \frac{-k \sin \pi \alpha [1 + (c/\sin \pi \alpha) \zeta^m w(\zeta)]}{e^{\pi i \alpha} [1 + c i \zeta^m w(\zeta) e^{-\pi i \alpha}]}$$

où $w(\zeta)$ est holomorphe à l'origine, telle que $w(0) = 1$. Si $m < 0$, on voit que $\Omega(0) = \Omega_{34} = ik$, solution écartée. Il faut donc supposer $m > 0$ et on a bien alors :

$$\Omega_{34} = -k \sin \pi \alpha e^{-\pi i \alpha}$$

On peut, dès lors, écrire le développement limité suivant, valable dans le domaine de l'origine :

$$\begin{aligned} \Omega(\zeta) - \Omega_{34} \\ = -ck \sin \pi \alpha e^{-\pi i \alpha} \left[\frac{1}{\sin \pi \alpha} + e^{-i\pi [a + (1/2)]} \right] \zeta^m \\ + O(\zeta^{m+1}) = -ck \cos \pi \alpha e^{-2\pi i \alpha} \zeta^m + O(\zeta^{m+1}). \end{aligned}$$

Posons :

$$c = |c| e^{\pi i p}, \quad (p = 0, 1); \quad \cos \pi \alpha = |\cos \pi \alpha| e^{p' i \pi},$$

p' étant nul si $\alpha < 1/2$ et p' valant 1 si $\alpha > 1/2$.

On voit donc que :

$$\arg [\Omega(\zeta) - \Omega_{34}] = \pi(p + p' + 1 - 2\alpha)$$

pour $\zeta = \xi > 0$; et :

$$\arg [\Omega(\zeta) - \Omega_{34}] = \pi[p + p' + (1/2) - \alpha + r_1 - r]$$

pour $\zeta = |\xi| e^{\pi i}$. Or, l'examen du plan de la variable permet aussitôt d'écrire, pour $\alpha - (1/2) > 0$ [Cf. (37')] :

$$\arg [\Omega(\zeta) - \Omega_{34}] = \pi(1 - 2\alpha)$$

pour $\zeta = \xi > 0$ et :

$$\arg [\Omega(\zeta) - \Omega_{34}] = \pi[(1/2) - \alpha]$$

pour $\zeta = |\xi| e^{\pi i}$, les arguments n'étant définis qu'à une même valeur additive près, valant 0 ou π suivant le choix d'un voisinage particulier de δ près de Ω_{34} . En égalant les valeurs correspondantes de l'argument, on trouve immédiatement les relations où $p' = 1$:

$$p + p' = 0 \text{ ou } 1; \quad r = r_1. \quad (38)$$

D'un autre côté, d'après (37) : $r \geq 0$; donc $r_1 \geq 0$ (Cf. 38). Or, si $r \geq 1$ (donc $r_1 \geq 1$), le vecteur $z - z_0$ tourne d'un angle supérieur à π quand le point $\zeta = \xi$ traverse l'origine $\zeta = 0$ en décrivant l'axe réel [Cf. (36)]. Cette circonstance est inacceptable au point de vue physique. La validité de la solution construite exige, en effet, que le domaine D soit tout entier situé d'un côté de la droite support du segment de suintement. Ainsi, nous sommes conduits à prendre $r = r_1 = 0$; et les formules (36) s'écrivent, en définitive :

$$\left. \begin{aligned} f(\zeta) &= f_0 - k [R_3 \sin \pi \alpha \zeta v_1(\zeta) \\ &\quad + (2R_4/2\alpha + 1) \zeta^{\alpha + (1/2)} v_2(\zeta)]; \\ z(\zeta) &= z_0 + R_3 e^{\pi i \alpha} \zeta v_1(\zeta) \\ &\quad + i(2R_4/2\alpha + 1) \zeta^{\alpha + (1/2)} v_2(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

La relation $r_1 = r$, établie ci-dessus, entraîne : $m = \alpha - (1/2)$; or, les raisonnements précédents supposent justement que $m > 0$, c'est-à-dire que $\alpha > (1/2)$. Nous laissons au lecteur le soin de discuter le cas $\alpha < (1/2)$ et de montrer en particulier que dans cette éventualité les formules (39) subsistent encore. Mais alors :

$$\Omega_{34} = ik$$

REMARQUE. — On notera que dans les deux exemples qui précèdent les entiers r_1 et r n'ont

pu être déterminés, sans ambiguïté, que moyennant un choix *a priori* d'un voisinage de Ω_{34} ou de Ω_{42} appartenant à δ . Mais lorsque se présente un problème concret, des considérations globales permettent toujours de lever cette indétermination d'ordre local.

22. Etudions maintenant la ligne libre C_4 dans le voisinage de la singularité $\zeta = 0$. Posons :

$$z_0 = x_0 + i y_0;$$

il vient, en séparant le réel de l'imaginaire dans la deuxième formule (39) et pour de petites valeurs de $\zeta = \xi > 0$:

$$x = x_0 + R_3 \cos \pi \alpha \xi + \dots,$$

$$y = y_0 + R_3 \sin \pi \alpha \xi + (2 R_4 / 2 \alpha + 1) \xi^{\alpha + (1/2)} + \dots,$$

les termes négligés étant de l'ordre de $O(\xi^2)$, si $\alpha > (1/2)$, et de l'ordre $O(\xi^{(3/2)+\alpha})$ si $\alpha < (1/2)$. Dans le premier cas, on voit que le contour C présente une tangente continue dans le voisinage de la singularité; la ligne libre C_4 se raccorde au premier ordre avec la ligne de suintement, d'équation :

$$(x - x_0) \sin \pi \alpha - (y - y_0) \cos \pi \alpha = 0.$$

Dans le second cas, C_4 présente au point $z_{34} = z_0$ une tangente verticale.

En tout état de cause, ces résultats se retrouvent à partir de l'équation approchée cartésienne de la ligne C_4 :

$$y - y_0 = (x - x_0) \lg \pi \alpha$$

$$+ \frac{2 R_4}{(2 \alpha + 1) (R_3 \cos \pi \alpha)^{\alpha + (1/2)}} (x - x_0)^{\alpha + (1/2)}$$

qui permet d'étudier la courbure de C_4 en z_{34} . On voit aisément que si $\alpha > (1/2)$, la courbure de la ligne libre en z_{34} est infinie comme $\alpha^{-(3/2)}$; si $\alpha < (1/2)$, cette courbure est infinie comme $\alpha^{-2\alpha}$.

On étudierait, de même, Γ_3 à partir de (39).

23. Passons à l'examen du cas singulier $\alpha = (1/2)$. D'après ce qu'on a vu au chapitre II, nous avons encore (Cf. 34) :

$$K_2 = -k R_4; \quad K_4 = R_4 i$$

Les deux exposants caractéristiques sont maintenant : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, à des entiers près; nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les entiers additifs sont nuls. Les formules (30) et (31), portées dans les relations (18') et (20), donnent ici :

$$K'_1 + k K''_3 = 0; \quad K''_1 = 0; \quad K'_3 = \pi K''_4$$

On a donc :

$$K_1 = -k R; \quad K_3 = \pi R_4 + Ri,$$

où R est une constante réelle arbitraire. Par suite :

$$F = -k [R u_1(\zeta) + R_4 \log \zeta u_2(\zeta)],$$

$$Z = (\pi R_4 + Ri) u_1(\zeta) + R_4 i \log \zeta u_2(\zeta)$$

La discussion s'achève aisément. Nous en résumons seulement l'essentiel. Dans le voisinage de $z = z_{34}$, le contour C forme une ligne à tangente continue; la ligne libre C_4 présente, en son extrémité z_{34} , une courbure infinie. Il serait bien facile de compléter notre étude par la discussion du signe des constantes R et R_4 .

CHAPITRE IV

CONCLUSIONS

24. Les exemples précédents nous paraissent de nature à mettre en lumière la variété des singularités que peuvent présenter les fonctions $f(\zeta)$ et $z(\zeta)$ en un point-sommet de C . Il nous reste maintenant à dégager les conclusions que l'Ingénieur peut tirer de notre étude et à tracer la voie qu'il nous paraîtrait opportun de suivre pour perfectionner la théorie des écoulements plans, permanents, à potentiel, des eaux souterraines pesantes.

25. Nous avons déjà fait remarquer au paragraphe 4 que la construction analogique des

écoulements étudiés ici était le seul moyen d'aborder, au bureau d'études, les problèmes concrets; nous avons noté aussi que l'emploi de ces méthodes d'approximation était illégitime dans le voisinage d'une singularité. Les résultats de notre mémoire apportent donc à l'Ingénieur un certain nombre de renseignements, *a priori*, qui peuvent être précieux. Nous savons désormais que, dans certains cas, la courbure de la ligne libre est nulle dans le voisinage d'une singularité, encore que la tangente à la ligne varie continûment. Il y aura alors lieu, pour l'Ingénieur, de déterminer, par un procédé ou par un autre,

un arc de C_4 pas trop éloigné de la singularité et de réunir cet arc au point singulier par une courbe de raccord dont les équations sont explicitées dans notre mémoire. Ceci exige la détermination numérique graphique des coefficients R_j ($j=1, 2, 3, 4$). Nous espérons revenir sur cette technique dans une prochaine publication.

26. Il faut insister sur le fait que l'allure de C_4 dans le voisinage d'une singularité peut dépendre des propriétés globales de l'écoulement. Tel est l'exemple du paragraphe 16. De nouvelles recherches paraissent nécessaires pour préciser l'influence des dimensions générales des éléments de C , donnés, à priori, sur l'allure de la ligne libre.

27. Lorsque le nombre des points singuliers de $f(\zeta)$ ne dépasse pas 3, ces fonctions sont hypergéométriques. Il est bien connu, en effet, que si une fonction $f(\zeta)$, holomorphe dans le demi-plan supérieur $\eta \geq 0$, présente sur l'axe réel trois singularités de type (9) et (10), elle est nécessairement solution d'une équation de GAUSS. Cette remarque a été utilisée dans le grand traité de POLOUBARINOVA-KOTCHINA, déjà tant de fois cité au cours de notre travail.

On voit donc que les séries hypergéométriques

s'introduisent naturellement dans l'art de l'Ingénieur; ces belles fonctions trouvent ainsi une application nouvelle et importante dans la technique. Nous espérons revenir un jour sur ce point.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MUSKAT. — « Flow of homogeneous fluids through porous media. » McGraw-Hill Book Cy, New York and London, 1937.
- [2] POLOUBARINOVA-KOTCHINA. — « Théorie du mouvement des eaux souterraines ». Moscou, 1952, 676 pages (en russe). Voir spécialement le chapitre VII, pp. 304-326.
- [3] J. KRAVCHENKO, G. SAUVAGE DE SAINT-MARC, M. BORELI. — « Sur les singularités des écoulements plans, permanents des liquides en milieux poreux ». C.R. 1954, t. 238, pp. 204-211.
- [4] M. BORELI. — « Contribution à l'étude des milieux poreux », thèse d'ingénieur-docteur, soutenue devant la Faculté des Sciences de Grenoble, janvier 1954. A paraître dans la collection scientifique et technique du Ministère de l'Air.
- [5] J. KRAVCHENKO, G. SAUVAGE DE SAINT-MARC, M. BORELI. — « Sur les singularités des fonctions analytiques définies par certaines conditions aux limites ». Article à paraître.
- [6] A. CASAGRANDE. — « Seepage through dams ». New England water works Association 1937, p. 303.