Rabattements de nappe

THÉORIE LINÉAIRE ET APPLICATION AUX ESSAIS

Aquifer drawdown

THE LINEAR THEORY AND ITS APPLICATION TO TESTS

PAR J. BRILLANT

INGÉNIEUR A LA SOCIÉTÉ SOLÉTANCHE

Dans les circonstances les plus courantes, le débit extrait d'une nappe aquifère fait appel aux réserves de la nappe et à des apports extérieurs, mais les théories classiques n'envisagent à cet égard que des cas particuliers : les régimes évolutifs sans apports extérieurs, assez voisins des conditions réelles au début du pompage, et les régimes stabilisés qui n'interviennent au contraire qu'après le délai nécessaire à l'épuisement des réserves disponibles.

On considère ici une image plus complète, où réserves et apports se relaient progressivement, en associant les schémas d'alimentation envisagés par Theis (pour les réserves) et par P. Kotchina (pour les apports) : à débit constant, l'analyse fait apparaître une symétrie remarquable dont la vérification expérimentale peut confirmer des hypothèses plus ou moins justifiées a priori et autoriser les extrapolations indiquées par la théorie.

On prévoit par exemple un rayon d'action fictif après stabilisation :

$$R_a = 0,5 (R_2 - R_1) / \log \lambda_1^2$$

... λ_1^2 étant mesuré, au terme d'un essai de durée limitée, par le rapport des pentes d'inflexion sur deux graphiques « rabattement-logarithme du temps », établis pour les distances R_1 et R_2 .

Although the pumping of water from an aquifer usually involves drawing supplies both from aquifer storage and outside inflows, the conventional theories only consider special cases, namely : 1) The development of conditions in the absence of inflows from outside sources and 2) The stable conditions that usually do not occur until all the available storage water has been used up.

In the more complete set of condition considered in this article, outside inflows gradually take over from storage in supplying the water, and the supply patterns considered by Theis and Mme P. Kotchina (for storage and inflows respectively) are associated. The analysis shows a remarkable degree of symmetry at constant flows, the experimental verification of which may both confirm certain apparently more or less justifiable assumptions and the validity of extrapolations suggested by theory. In this way, for instance, the following theoretical radius of influence is suggested for stable conditions :

$$R_a = 0.5 (R_2 - R_1) / \log \lambda_1^2$$

where, for a short-duration test, the value of λ_1^2 is given by the ratio between the inflexion gradients of the two "drawdown vs. log time" graphs for distances R_1 and R_2 respectively.

I. — INTRODUCTION

L'existence d'un régime de pompage permanent dans une nappe aquifère implique celle d'un débit équivalent Q_p restitué à la nappe d'une manière ou d'une autre. Dans les schémas classiques, cette restitution s'effectue au contact de limites plus ou moins éloignées qui définissent une distance équivalente de réalimentation R_a (comme si le niveau d'eau était maintenu constant dans un fossé circulaire à cette distance) et permettent d'évaluer le rabattement S d'une

nappe captive de puissance KH par l'approximation de Dupuit :

$$S_d = \frac{Q_p}{2 \pi \cdot KH} \ln \frac{R_a}{R} \quad (1)$$

(ln, pour logarithme népérien)

valable à toute distance R assez faible devant R_a .

Mais dans de nombreux cas, ces limites n'exis-

tent pas, ou apparaissent manifestement trop lointaines pour justifier la valeur expérimentale de R_e . Il faut en conclure qu'elles ne sont pas toujours apparentes, ou qu'il existe d'autres sources.

Plus généralement, en l'absence d'alimentation localisée, évidente ou présumée, le plus simple et d'ailleurs le plus exact du point de vue statistique est de considérer l'alimentation comme répartie d'une manière continue (à une échelle convenable) et provoquée par le rabattement, donc, en première approximation, proportionnelle à ce rabattement.

D'une manière plus concrète :

1° Mme P. Kotchina [1] considère la nappe exploitée, séparée d'une nappe sous-jacente par un horizon relativement imperméable qui laisse filtrer vers la première un débit proportionnel à la différence de charge de part et d'autre : cette différence est égale au rabattement de la nappe exploitée dans la mesure où la « nappe réservoir » est assez puissante pour que sa charge initiale ne soit pas modifiée de manière appréciable par l'appel d'eau de la nappe exploitée.

2° On peut envisager la nappe exploitée limitée par une surface libre dont les niveaux naturels résultent d'un équilibre statistique entre les apports atmosphériques et les retraits par évaporation : le débit d'alimentation apparaît comme un excédent, proportionnel au rabattement, qui soustrait plus ou moins la nappe à l'évaporation.

3° A très grande échelle, la « nappe réservoir » de Mme P. Kotchina peut être identifiée au réseau de chenaux naturels (cours d'eau de toutes importances) ou artificiels (fossés et canalisations) plus ou moins isolés de la nappe exploitée.

Sous cette forme, on pourrait d'ailleurs étendre l'alimentation proportionnelle à une nappe illimitée dans les trois dimensions, en distinguant dans tout élément de volume :

- Le milieu aquifère banal, assimilé par M. Miche [2] à un réseau de films couramment recoupé par les puits et les forages d'observation;
- Un réseau souterrain de chenaux à grands rayons hydrauliques, dont la mise en com-

munication directe avec les forages est infiniment peu probable, mais la présence systématique justifiée, au même titre que celles des cours d'eau superficiels, par l'action de l'érosion amorcée à la faveur des hétérogénéités primitives.

Tous ces aspects ont leur point commun dans les relations de la nappe avec l'hydrologie régionale (définie par un ensemble de niveaux indépendants du pompage) dont l'existence universelle ne fait pas de doute. Dans les cas particuliers, interviennent par contre :

- Les déformations de la loi « statistique » à l'échelle de durées de pompage et de zones intéressées trop réduites;

Les concentrations systématiques de certaines communications (au contact des berges d'un cours d'eau très rapproché);

- La nature de ces communications, capable de mettre en cause la proportionnalité (régime turbulent ou saturation des communications).

Quoi qu'il en soit, l'alimentation proportionnelle garde bien la valeur d'une approximation, valable pour les petits rabattements en l'absence (ou dans l'ignorance) des localisations particulières.

Les réserves de la nappe interviennent dans le régime transitoire en fournissant par unité de surface un volume d'eau proportionnel au rabattement. Nous rappelons que le coefficient de proportionnalité, ou « module de Theis » [3] représente :

- En nappe libre, le volume d'eau évacué par unité de volume de terrain dénoyé par le rabattement;
- En nappe captive, le volume d'eau essoré par unité de surface et par unité de compression intergranulaire (mesurée en hauteur d'eau et égale au rabattement piézométrique).

Dans le langage « débits », les réserves interviennent donc proportionnellement à la vitesse de rabattement et s'ajoutent aux apports extérieurs — proportionnels au rabattement — considérés précédemment.

II. — THÉORIE

A. — DÉFINITIONS. — UNITÉS : mètre et seconde (fig. 1).

1° Fonction et variables :

S : Rabattement;

R : Distance à l'axe de symétrie;

T : Temps à partir de l'origine du pompage.

2° Paramètres :

K : Perméabilité horizontale du milieu: définit

— et par les conditions aux limites :

$$s = 0 \text{ pour } t \leq 0 \text{ et pour } r \rightarrow \infty \text{ (5 bis)}$$

$$-r \frac{\partial s}{\partial r} \rightarrow 1 \text{ pour } r \rightarrow 0 \text{ (5 ter)}$$

C. — SOLUTION DANS LE CAS GÉNÉRAL.

On justifie directement, ou par la méthode esquissée au paragraphe suivant, l'expression de s sous l'une des trois formes :

$$\begin{aligned} s &= -\frac{1}{2} \int_{\infty}^{r^{2/4}t} e^{-[w+(r^2/4x)]} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t e^{-[y+(r^2/4x)]} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\ln(2t/r)} e^{-r e^{hz}} dz \end{aligned}$$

déduites l'une de l'autre par les relations entre variables d'intégration :

$$z = \ln \frac{2y}{r} = \ln \frac{r}{2x}$$

On vérifie que les courbes $s - \ln(2t/r)$ ($r = C^{te}$), dont l'expression est donnée par la troisième forme, sont symétriques par rapport au point d'inflexion f d'abscisse $\ln(2t/r) = 0$ où l'on a (fig. 2) :

— la pente :

$$\text{tg } \omega_f = \frac{1}{2} e^{-r} \quad (6)$$

— l'ordonnée :

$$s_f = \frac{1}{2} s_{\infty}(r)$$

— le temps :

$$t_f = \frac{1}{2} r \quad (7)$$

— la sous-tangente :

$$g_f = s_f \cdot \frac{1}{\text{tg } \omega_f} = e^r s_{\infty}(r)$$

égale à $\ln 2 t_f/r - \ln 2 t_f/r = \ln T_F/T_F = G_F$ (sur la figure 2 bis relative aux grandeurs réelles, homologues et proportionnelles S et T pour $R = C^{te}$).

Fig. 2

Fig. 2 bis

D. — CAS PARTICULIERS ET CAS LIMITES.

1° Régime de Theis ou régime initial :

$$(s_0 = S_0/Su).$$

— Pour $A = 0$ (absence d'apports extérieurs), r et t sont nuls, mais $r^2/4t$ peut conserver une valeur finie $[(\varepsilon/KH) \cdot (R^2/4T)]$ et la première expression de s prend la forme particulière :

$$s_0 = -\frac{1}{2} \int_{\infty}^{r^2/4t} e^{-x} \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} E_i\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

$E_i(-r^2/4t)$ est la fonction de $r^2/4t$, connue sous le nom d'exponentielle intégrale [4].

— Quand $t \rightarrow 0$, on démontre facilement que $s/s_0 \rightarrow 1$.

Ainsi s_0 peut être considéré comme une forme limite de s quand t (ou T) tend vers zéro (régime initial).

REMARQUE. — On note que s_0 vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial s}{\partial t} \quad (5')$$

et les mêmes conditions aux limites (5 bis) et (5 ter) que s . C'est à ce titre que son expression a été donnée par Fourier à propos de la propagation de la chaleur et reprise par Theis pour les écoulements souterrains.

Inversement, on remonte à l'expression générale de s — vérifiant (5) (5 bis) (5 ter) en passant par l'intermédiaire de $s_v = e^{-t} s_0$ qui vérifie (5) (5 bis) et — $(r \partial s_v / \partial r) \rightarrow e^{-t}$ puis de :

$$s_w = s_v + \Sigma \Delta \tau \cdot s_v (t - \tau)$$

qui vérifie (5) (5 bis) au même titre que ses composantes et :

$$-(r \partial s_w / \partial r) = e^{-t} + \Sigma \Delta \tau e^{-(t-\tau)}$$

A la limite (Intervalle $\Delta \tau$ jointifs de 0 à t et tendant vers zéro) on a :

$$s_w \rightarrow s_L = s_v + \int_0^t s_v (t - \tau) d\tau$$

vérifiant encore (5) (5 bis) et :

$$-(r \partial s_L / \partial r) = e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 \quad (5 \text{ ter})$$

s_L est donc une quatrième expression de s qu'on retrouve d'ailleurs sous sa deuxième forme après le changement de variable $t - \tau = y$ et une intégration par partie.

2° Régime permanent ou régime stabilisé :

$$(s_\infty = S_\infty / Su).$$

Pour $\varepsilon = 0$ ou T infini, t est infini. Le rabattement conserve ou atteint la valeur indépendante de t :

$$s_\infty = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r \operatorname{ch} x} dx = \int_0^\infty e^{-r \operatorname{ch} x} dx$$

Une autre expression de s_∞ peut être obtenue directement parmi les solutions nulles à l'infini de l'équation :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = s \quad (5'')$$

déduite de l'équation générale (5) pour :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

Par définition, ces solutions sont de la forme $MiH_0(ir) \dots iH_0(ir)$ étant la fonction de Hankel équivalente à $-(2/\pi) \ln(\gamma r/2)$ pour $r \rightarrow 0$ [4].

$$(\ln \gamma = C \# 0,5772 - \text{constante d'Euler}).$$

La condition (5 ter) permet d'évaluer $M = \pi/2$ et :

$$s_\infty = \int_0^\infty e^{-r \operatorname{ch} x} dx = \frac{\pi}{2} iH_0(ir) \quad [4]$$

REMARQUE. — Il y a tout intérêt à profiter des valeurs tabulées de la fonction de Hankel pour effectuer le calcul numérique de s sous la forme :

$$\begin{aligned} s \left(\pm \ln \frac{2t}{r} \right) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{-r \operatorname{ch} x} dx \\ &\pm \frac{1}{2} \int_0^{\ln(2t/r)} e^{-r \operatorname{ch} x} dx \\ &= \frac{\pi}{4} iH_0(ir) \pm \frac{1}{2} \int_0^{\ln(2t/r)} e^{-r \operatorname{ch} x} dx \end{aligned}$$

Le second terme, nul au point d'inflexion, peut être calculé par la méthode des trapèzes. (C'est ce qui a été fait pour établir l'abaque général de la relation $s(r,t)$).

3° Approximation de Dupuit : ($s_d = Sd/Su$).

Dans la première forme de s , la fonction sous le signe $\int$ peut être développée en série entière par rapport aux puissances de $r^2/4x$ et — s — représentée par une série d'intégrales de la forme :

$$I_n(X) = \int_{-\infty}^X e^{-x} \frac{dx}{x^n}$$

calculables compte tenu de $I_1 = E_1(-X)$ et de la relation de récurrence :

$$I_n(X) = -\frac{1}{n-1} \left[\frac{e^{-X}}{X^{n-1}} + I_{n-1}(X) \right]$$

En ordonnant le développement par rapport aux puissances de r^2 , on trouve une suite de « coefficients » d'ordre de grandeur logarithmique en « r infiniment petit » ; le premier :

$$\ln [(2/\gamma r) e^{E_1(-t)/2}]$$

peut donc être considéré comme une approximation de s pour $r \rightarrow 0$ et identifié au rabattement de Dupuit (1) évalué en coordonnées réduites par $s_d = \ln(r_a/r)$.

On en déduit :

$$r_a = \frac{2}{\gamma} e^{E_1(-t)/2} \quad (\text{fig. 3})$$

FIG. 3

et comme :

$$E_i(-\infty) = 0$$

$$\text{et } E_i(-t) = \ln \gamma t - t + \frac{t^2}{2 \cdot 2!} - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} \dots$$

il vient :

$$1^\circ r_a \rightarrow (2/\gamma) e^{(\ln \gamma t)/2} = \sqrt{4t/\gamma} \text{ pour } t \rightarrow 0,$$

$$2^\circ r_a \rightarrow 2/\gamma \text{ pour } t \rightarrow \infty,$$

soit en tenant compte des unités R_u et T_u — formules (4). :

$$1^\circ R_a \rightarrow \sqrt{\frac{KH}{A}} \cdot \sqrt{\frac{4At}{\gamma \varepsilon}} = \sqrt{\frac{4KHT}{\gamma \varepsilon}} \text{ pour } T \rightarrow 0.$$

... Rayon d'action fictif du régime de Theis

croissant comme $\sqrt{T}$ (en l'absence d'alimentation extérieure ou au début du pompage).

$$2^\circ R_a \rightarrow \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{KH}{A}} \text{ pour } T \rightarrow \infty,$$

... Rayon d'action permanent ou stabilisé prévu par Mme P. Kotchina (avec $2/\gamma = 1,123$ et A ,

quotient $\frac{\text{Perméabilité}}{\text{Épaisseur}}$ du « substratum »).

REMARQUE. — L'approximation de Dupuit qui prévoit un rabattement nul pour $R = R_a$ justifie l'appellation de rayon d'action... fictif parce que l'approximation n'est généralement pas valable à cette distance (dans les hypothèses actuelles, on a en fait pour $r = r_a$:

$$s_\infty \neq 0,36 - s_0 \neq 0,25 \text{ et } s_0 < s < s_\infty).$$

III. — APPLICATION AUX ESSAIS DE POMPAGE

A. — L'approximation de Dupuit pour $R \ll R_a$:

$$S_d = \frac{Q_p}{2 \pi KH} \ln \frac{R_a}{R} \quad (1)$$

assure la liaison la plus naturelle entre les notions courantes et les aspects particuliers de la théorie actuelle.

1° Dans les circonstances les plus larges, R_a est une fonction indéterminée (du temps, du débit pompé...) résultant de conditions d'alimentation dont le mode n'est pas précisé. La relation (1) détermine sur un graphique $S - \ln R$ (T constant) une droite de pente (fig. 4).

FIG. 4

$$W_T = - \frac{\partial S_d}{\partial \ln R} = \frac{Q_p}{2 \pi K H} = C^{te}$$

Inversement, l'alignement approximatif des points expérimentaux $S_i - \ln R_i$ à la même époque T détermine une droite D_T de coefficient angulaire W_T dont on peut déduire — indépendamment de toute hypothèse plus ou moins restrictive concernant l'alimentation — la valeur $KH = Q_p / 2 \pi \cdot W_T$; cette grandeur représente à titre de moyenne ou d'équivalence ce qu'il est convenu d'appeler la puissance de la nappe.

Si H est connu, la valeur $K = Q_p / 2 \pi \cdot H W_T$ est la perméabilité horizontale équivalente sur la hauteur H , plus précisément la moyenne :

$$\frac{\sum K_i \Delta H_i}{\sum \Delta H_i}$$

FIG. 5

des perméabilités K_i des horizons homogènes successifs d'épaisseur ΔH_i .

2° Dans l'hypothèse de Theis concernant le mode d'intervention des réserves et dans les conditions initiales indépendantes des apports extérieurs éventuels, la loi $R_a(T)$ est précisée sous la forme $R_a = \sqrt{4 K H T / \gamma \varepsilon}$ et l'approximation de Dupuit sous la forme :

$$S_d = \frac{Q_p}{2 \pi K H} \ln \frac{\sqrt{4 K H T}}{\gamma \varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{Q_p}{2 \pi K H} \ln \frac{4 K H T}{\gamma \varepsilon R^2}$$

qui détermine dans un graphique $S - \ln T$ (R constant) une droite D_R (fig. 5)

— de coefficient angulaire :

$$W_R = \frac{\partial S_d}{\partial \ln T} = \frac{1}{2} \frac{Q_p}{2 \pi K H} = \left(\frac{1}{2} W_T = C^{te} \right)$$

— qui coupe l'axe ($S = 0$) pour l'abscisse $\ln T_R$ définie par :

$$\frac{4 K H T_R}{\gamma \varepsilon R^2} = 1 \quad \text{soit } T_R = \frac{\gamma \varepsilon R^2}{4 K H}$$

Inversement, l'alignement des points expérimentaux $S_i - \ln T_i$ à une distance donnée R détermine une droite de coefficient angulaire $W_R = W_T / 2$ dont l'intersection avec l'axe $S = 0$ détermine un temps $T_R = \gamma \varepsilon R^2 / 4 K H$.

On en déduit — indépendamment de toute hypothèse restrictive concernant l'alimentation extérieure, la valeur :

$$\varepsilon = \frac{4 K H \cdot T_R}{\gamma R^2}$$

considérée comme un coefficient de vide apparent (inférieur au coefficient réel qui interviendrait s'il s'agissait d'une nappe libre, dans un terrain complètement asséché entre le niveau initial et le niveau rabattu).

A ce stade, qui reste dans le domaine des méthodes classiques, il convient de remarquer que les droites D_T et D_R ne représentent que des approximations : la première pour les distances R assez réduites devant R_a (correspondant à T donné — fig. 4), l'autre (fig. 5), après un délai suffisant pour justifier des valeurs $R_a(T)$ assez grandes vis-à-vis de R donné; les droites D_T et D_R ne sont que les asymptotes des courbes réelles (telle D_R pour la courbe C_1 dans la figure 5).

Ceci ne soulève pas de difficulté essentielle, l'alignement des points expérimentaux pouvant effectivement être assimilé à l'asymptote pour des valeurs convenables des variables R (assez petites) ou T (assez grandes).

Mais l'approximation graphique apparaît plus douteuse lorsqu'on remarque que la droite D_R

ne représente pas non plus les rabattements pour T assez grand, si ce n'est dans l'hypothèse de Theis admise à titre restrictif (en l'absence d'alimentation extérieure). Or, sans présumer de leur nature ni de leur mode d'intervention, les apports modèrent progressivement les rabattements alors figurés par une courbe C_2 d'asymptote D_R (pour $\ln T \rightarrow -\infty$) et admettant une autre direction asymptotique D moins inclinée que D_R pour $\ln T \rightarrow +\infty$ (avec ou sans asymptote, horizontale ou inclinée, suivant le mode d'alimentation — fig. 5).

Il en résulte que la courbe réelle C , asymptote à C_1 et à C_2 , comporte un point d'inflexion F . La tangente en F qui sera pratiquement prise en compte dans l'alignement des points expérimentaux sous-estime simultanément l'inclinaison ($W < W_R$) et le temps ($T_F < T_R$).

— Dans le cadre le plus large (sans hypothèse restrictive concernant l'alimentation extérieure), une approximation suffisante de W vis-à-vis de W_R ($= 1/2 W_T$ connu) constitue un test raisonnable — sans plus — de l'approximation de T_F (vis-à-vis de T_R) et, en conséquence, de ϵ ;

— Par contre, dans le cadre de l'alimentation extérieure proportionnelle définie par le paramètre A , on démontre que l'erreur relative sur ϵ (par défaut) est équivalente à :

$$\sqrt{\frac{AR^2}{KH}} \ln \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{KH}{AR^2}}$$

et devient négligeable pour R assez réduit.

On saurait d'ailleurs calculer :

$$A = \frac{KH}{R^2} \left(\ln \frac{W_T}{2W} \right)^2$$

et évaluer en conséquence le facteur correctif, mais dès lors qu'on introduit le paramètre A et qu'on présume ainsi du mode d'alimentation extérieure, il semble préférable de s'inspirer des deux méthodes suivantes. Dans un esprit très différent :

- La première est axée sur les propriétés particulières de la relation $s(rt)$: symétrie des courbes C (fig. 2 bis et 5) et expression simple de $\partial s / \partial \ln t$;
- L'autre peut au contraire être considérée comme la méthode générale applicable lorsque les paramètres à évaluer (KH — A — ϵ), qui interviennent dans la relation présumée entre grandeurs observables (S — R — T), peuvent être éliminés par un choix convenable des unités (S_u — R_u — T_u).

B. — En principe, les éléments expérimentaux G_F — S_F — T'_F (fig. 2 bis), relatifs à un seul point

d'inflexion F correspondant à la distance R , sont suffisants. En transposant les formules (7), il vient en effet :

$$(g_f) \quad G_F = e^r s_\infty(r) \quad (7')$$

$$(s_f) \quad \frac{S_F}{S_u} = \frac{1}{2} s_\infty(r) \quad (7' \text{ bis})$$

$$(t'_f) \quad \frac{T'_F}{T_u} = \frac{r}{2} \quad (7' \text{ ter})$$

on en tire r — formule (7') et table I — d'où $R_u = R/r$, puis $S_u (= 2 S_F / s_\infty(r))$ — table II) et $T_u (= 2 T'_F / r)$. Les quantités S_u — R_u — T_u déterminent KH puis A puis ϵ par l'intermédiaire des formules (4) ou fournissent la formule générale du rabattement, déduite de la relation $s(r, t)$ sous la forme :

$$S = S_u \cdot s \left(\frac{R}{R_u}, \frac{T}{T_u} \right)$$

En fait, on ne connaît que l'alignement des points expérimentaux, identifié à une tangente d'inflexion qui ne détermine que la pente $\lg \Omega_F = W$ et l'abscisse ($\ln T_F$) de son intersection avec l'axe $S = 0$ (fig. 2 bis), soit seulement deux relations :

$$W \left(= \left| \frac{\partial S}{\partial \ln T} \right|_F = S_u \left| \frac{\partial s}{\partial \ln t} \right|_f = \frac{S_u e^{-r}}{2} \right) = \frac{S_u e^{-(R/R_u)}}{2}$$

$$\ln T_F \left(= \ln T'_F - G_F = \ln T_u t'_f - g_f = \ln T_u \frac{r}{2} - e^r s_\infty(r) \right)$$

$$= \ln \frac{T_u R}{2 R_u} - e^{(R/R_u)} s_\infty \left(\frac{R}{R_u} \right)$$

pour trois inconnues : S_u , R_u et T_u .

Il faut donc connaître au minimum deux alignements aux distances R_1 et R_2 ... Pratiquement, on aura autant d'alignements que de forages d'observation, fournissant autant de groupes de valeurs corrélatives R_i — W_i — $\ln T_{Fi}$ et il est avantageux de toutes les considérer pour obtenir une moyenne significative. A cet égard, ce sont les procédés graphiques fondés sur l'alignement des points expérimentaux qui font apparaître le plus clairement les mesures les plus aberrantes (à expliquer, corriger ou éliminer) et les groupements particuliers qui peuvent orienter vers une interprétation fragmentaire dans le temps et dans l'espace.

Par exemple, les points d'abscisses R_i et d'ordonnée $\ln 1/W_i$ définissent un alignement de coefficient angulaire $1/R_u$, d'ordonnée à l'origine — $\ln (S_u/2)$, et la deuxième relation fournit autant de valeurs T_u (T_{ui}) qu'on possède de valeurs corrélatives T_{Fi} — R_i ($= R_u \cdot r_i$).

TABLE I	
$e^r s_\infty(r)$	r
$m \rightarrow 0$	$\frac{\pi}{2 m^2}$
0,45	7,59
0,50	6,04
0,55	4,96
0,60	4,16
0,65	3,49
0,70	2,99
0,75	2,56
0,80	2,23
0,85	1,96
0,90	1,715
0,95	1,525
1,00	1,355
1,10	1,095
1,20	0,895
1,30	0,740
1,40	0,620
1,50	0,526
1,60	0,443
1,70	0,376
1,80	0,324
1,90	0,282
2,00	0,244
2,10	0,212
2,20	0,184
2,30	0,161
2,40	0,141
2,50	0,125
2,60	0,110
2,80	0,0875
3,00	0,0552
$M \rightarrow \infty$	$\frac{2}{\gamma} e^{-M}$

TABLE II	
r	$\frac{2}{s_\infty(r)}$
$m \rightarrow 0$	$\frac{2}{\ln 2/\gamma m}$
0,05	0,642
0,10	0,824
0,15	0,986
0,20	1,141
0,25	1,299
0,30	1,458
0,35	1,622
0,40	1,805
0,45	1,975
0,50	2,164
0,55	2,364
0,60	2,573
0,65	2,794
0,70	3,057
0,75	3,277
0,80	3,540
0,90	4,112
1,00	4,755
1,10	5,505
1,20	6,280
1,30	7,195
1,40	8,210
1,50	9,356
2,00	17,56
2,50	32,20
3,00	57,56
3,50	102,1
4,00	174,4
4,50	312,7
5,00	542,0
$M \rightarrow \infty$	$\sqrt{\frac{8 M}{\pi}} e^M$

TABLE III	
r	$\xi(r)$
$m \rightarrow 0$	$\frac{4}{\gamma m^2}$
0,05	1058
0,10	292
0,15	140,7
0,20	85,15
0,25	57,95
0,30	42,47
0,35	32,87
0,40	26,38
0,45	21,78
0,50	18,36
0,55	15,79
0,60	13,75
0,65	12,13
0,70	10,81
0,75	9,705
0,80	8,795
0,90	6,740
1,00	6,276
1,10	5,455
1,20	4,795
1,30	4,273
1,40	3,835
1,50	3,477
2,00	2,320
2,50	1,711
3,00	1,340
3,50	1,093
4,00	0,920
4,50	0,791
5,00	0,691
$M \rightarrow \infty$	$\frac{2}{M}$

On a :

$$T_{ii} = T_{Fi} \cdot \frac{2}{r_i} e^{e^r s_\infty(r_i)} = T_{Fi} \cdot \xi(r_i)$$

(table III)... et on prendra simplement la moyenne des T_{ii} .

Avec deux pentes $W_1 W_2$ relatives à deux distances $R_1 R_2$ on peut évaluer sommairement :

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{KH}{A}} = \frac{2}{\gamma} R_u = \frac{2}{\gamma} \frac{R_2 - R_1}{\ln W_1 - \ln W_2} \\ &= \frac{2 \log e}{\gamma} \frac{R_2 - R_1}{\log W_1 / W_2} \left(\frac{2 \log e}{\gamma} \# 0,5 \right) \end{aligned}$$

C. — La surface de coordonnées $\log s - \log r - \log t$, définie par la relation $s(r)$ et celle de coordonnées $\log S - \log R - \log T$ définie par un ensemble de points expérimentaux de coordonnées $\log S_i - \log R_i - \log T_i$ sont théoriquement superposables par translation de composantes $\log S_u - \log R_u - \log T_u$. Inversement, la comparaison de ces deux surfaces permet d'apprécier le bien fondé de la théorie et d'évaluer $\log S_u - \log R_u - \log T_u$, composantes de la translation opérée pour assurer au mieux la coïncidence.

Dans notre cas particulier, les mesures R_i sont échelonnées en nombre plus ou moins limité

(commandé par celui des forages d'observation). Par contre, les mesures corrélatives $S_{ij} - T_{ij}$ (rabattement en fonction du temps) associées à chaque distance R_i peuvent être très denses et même continues (enregistrement graphique), ce qui fixe les conditions d'application pratique les plus avantageuses.

On dispose une fois pour toutes d'un réseau de « courbes de niveau » (cotées en $\log r$) défini par la relation $s(r, t)$ et par des axes de coordonnées gradués en $\log s$ et $\log t$ (les cotes « $\log r$ » en progression arithmétique de raison ρ assez petite : l'abaque donné pour la relation $s(r, t)$ a été précisément établi sous cette forme avec $\rho = 0,1$).

Par ailleurs, on trace sur un calque le système d'axes gradués en $\log S$ et $\log T$ qui permettent de placer les points $S_{ij} - T_{ij}$ correspondant aux mesures corrélatives Rabattement-Temps effectuées dans chaque forage (R_i) et de tracer chaque courbe de cote $\log R_i$.

On cherchera la meilleure coïncidence des deux réseaux en conservant le parallélisme des deux systèmes de coordonnées.

Dans la position ainsi obtenue, les différences d'ordonnées et d'abscisses entre les deux systèmes représentent respectivement $\log S_u$ et $\log T_u$, $\log R_u$ étant donné par la différence de cote (en principe constante) des courbes en coïncidence. L'appréciation de cette coïncidence sera d'ailleurs facilitée si les mesures $\log R_i$ sont en progression arithmétique de raison multiple de ρ (forages d'observation à des distances échelonnées en progression géométrique de raison $10^{n/10}$ pour comparer à l'abaque).

D. — Rabattements au-dessous du toit de la nappe :

La théorie reste applicable dans les conditions ci-après :

a) K constant (sans restriction concernant la perméabilité verticale K_v);

b) Rabattement S (compté à partir de la hauteur d'équilibre Z_0), défini et effectivement repéré par le niveau dans des piézomètres crépinés sur toute la hauteur de la nappe;

c) S , généralisé sous la forme :

$$\mathfrak{S} = \begin{cases} S & \text{pour } S < Z_0 - H \\ \frac{S(2Z_0 - S) - (Z_0 - H)^2}{2H} & \text{pour } S > Z_0 - H \end{cases}$$

(nappe libre incluse dans la convention

$$Z_0 = H);$$

d) Alimentation proportionnelle à $\mathfrak{S}$ et $\partial \mathfrak{S} / \partial T$ (ou à S et $\partial S / \partial T$ sous réserve que les « grands S » ne concernent qu'une zone de faible étendue au voisinage du puits).

Pour la pratique des essais, une grandeur $\mathfrak{S}$ notablement plus petite que S ne risque guère d'intervenir que sous la forme $\mathfrak{S}_p$ où elle remplace le rabattement S_p dans le puits et représente l'ordonnée de la droite de Dupuit (D_T , fig. 4) pour $R = R_p$ (rayon du puits idéal).

Inversement, les éléments expérimentaux ($D_T, \mathfrak{S}_p$) définissent, par la construction de la figure 4, le rayon efficace d'un puits de forme quelconque... qu'il serait illusoire d'apprécier en fonction des cotes d'exécution : la qualité des filters et la perméabilité locale du terrain (éventuellement remanié par le développement) jouent à cet égard le rôle prépondérant qu'il appartient justement à l'expérience de préciser.

COMMENTAIRES. — 1°. La réserve exprimée en b) est sans objet lorsqu'on admet que la perméabilité verticale est infinie et entraîne des rabattements communs (sur une verticale) à tous les « filets d'écoulement » ; après substitution de $\mathfrak{S}$ à S , la formule (2) exprime simplement que la section de passage (primitivement H) est limitée à la plus petite des hauteurs H et $Z_0 - S$, et la même substitution dans les formules (2') et (2'') est admise (con-

FIG. 6

FIG. 6 bis

FIG. 6 ter

dition d) par hypothèse, ou à titre approximatif quand on peut séparer :

- Une zone $R > mR_a$ où tous les rabattements sont assez faibles pour qu'on puisse indifféremment considérer que l'alimentation est proportionnelle à S , à $\mathfrak{S}$ ou à toute autre grandeur équivalente pour $S \rightarrow 0$;
- Une zone $R < mR_a$ qui fournit (quelle que soit l'hypothèse) une fraction négligeable du débit total.

2°. Les considérations de Tcharnyi [5] permettent d'étendre rigoureusement la démonstration

pour K_v quelconque, mais la réserve b) devient essentielle, et il faut dès lors bien distinguer :

- La méridienne Z (fig. 6 bis et 6 ter) définie par la théorie ou comme « ligne de charge moyenne » repérée par les niveaux dans des piézomètres qui recoupent tous les filets d'écoulement;
- Les lignes de charge distinctes pour les différents filets d'écoulement, et en particulier celle du filet d'écoulement supérieur (Z_v) qui fixerait la surface libre en passant au-dessous du toit, mais reste provisoirement indéterminée entre Z (pour K_v infini) et Z' (pour K_v nul).

IV. — CONCLUSIONS

A. — Sous les réserves qui concernent les localisations particulières de l'alimentation et les précautions à prendre au sujet des nappes libres ou décollées, la théorie linéaire s'applique avec une bonne rigueur aux essais (limités en principe à de « petits » rabattements).

Appliquée aux prévisions, la théorie justifie-rait :

- 1° L'addition pure et simple des rabattements provoqués par un nombre quelconque de puits, même lorsqu'ils sont répartis dans une zone de dimensions appréciables vis-à-vis de R_a (conditions pour lesquelles l'approximation de Dupuit et les transformations conformes ne sont plus rigoureusement justifiées).
- 2° L'évaluation des rabattements sous débit variable : il suffirait de décomposer le débit en éléments constants (positifs ou négatifs) depuis une origine variable jusqu'à l'infini et de faire la somme des rabattements correspondants : par exemple le rabattement provoqué par le débit Q_p maintenu pendant un temps limité T serait :

$$s(r, t) - s(r, t - T)$$

B. — En fait, dans les conditions normales d'exploitation (rabattements de nappe et captages), la théorie linéaire ne représente plus qu'une approximation. Même si on laisse de côté les problèmes concernant la localisation de la surface libre réelle (pratiquement résolu par les méthodes de relaxation — référence [6]), toutes les relations de base exprimées par les équations (2) - (2') - (2'') sont mises en cause :

1° La loi de Darcy n'est plus exacte [7] : mais les divergences portent surtout sur les grandes vitesses au voisinage du puits et la conséquence

la plus tangible est une réduction du rayon équivalent (R_p) pour les grands débits; en particulier le débit permanent maximal Q_M , déterminé en principe par la relation :

$$\mathfrak{S}_p = \frac{Q_M}{2\pi KH} \ln \frac{R_a}{R_p}$$

avec

$$S_p = Z_0 \quad \left(\text{d'où } \mathfrak{S}_p = \frac{2Z_0 - H}{2} \right)$$

et

$$R_a (\text{stabilisé}) = \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{KH}{A}}$$

peut être surévalué, si R_p a été obtenu avec un faible débit d'essai.

2° L'intervention différée des réserves [8] doit accélérer l'évolution initiale du rabattement et la ralentir par la suite.

3° L'alimentation, représentée par une vitesse (AS) proportionnelle au rabattement, ne peut pas croître indéfiniment avec S . Il faudrait la remplacer par une expression de la forme :

$$\frac{ASV}{AS + V} \text{ ou } \frac{2V}{\pi} \text{ Arc tg } \frac{\pi}{2} \cdot \frac{AS}{V} \text{ ou } V \text{ th } \frac{AS}{V} \dots$$

équivalente à la première pour les petits rabattements et limitée à V pour les grands rabattements.

Suivant l'ordre de grandeur des rabattements vis-à-vis de V/A (dans la zone d'alimentation la plus efficace), la solution admettrait deux cas limites :

- L'alimentation sous vitesse AS (la théorie actuelle);
- L'alimentation sous vitesse constante V qui permet d'évaluer un rayon d'action fictif et stabilisé $R_a = \sqrt{Q_p/\pi \cdot e \cdot V}$ proportionnel à la

ABAQUE. — Courbes $\log s$ — $\log t$ (de cote $\log r$).

racine carrée du débit pompé (et $\sqrt{e}$ fois plus petit que le rayon R défini par $V\pi R^2 = Q_p$).

Lorsqu'il n'y a pas d'autre source que la pluviosité (deuxième exemple), V est borné par la « donnée climatique » V_c (la hauteur de pluie annuelle) et la valeur de R_a associée à V_c :

$$\left(\sqrt{\frac{Q_p}{\pi e V_c}} \right)$$

est une limite inférieure (normalement jamais atteinte); ainsi l'inégalité expérimentale :

$$(R_a) = \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{KH}{A}} < \sqrt{\frac{Q_p}{\pi e V_c}}$$

$$\left(\dots \text{grossièrement } \frac{AQ_p}{KH} > 10 V_c \right)$$

implique l'existence d'autres sources que la pluviosité.

C. — Enfin, qu'il s'agisse d'essais ou de prévisions, les localisations particulières de l'alimentation ne peuvent pas toujours être négligées.

Par exemple, si la nappe est au contact d'une berge rectiligne à la distance $R_0/2$, le rabattement doit être évalué dans le cadre même de la théorie linéaire par l'expression plus complète :

$$s' = s(r, t) - s(r', t)$$

r' étant la distance du point considéré au symétrique du puits par rapport à la berge (réelle ou virtuelle) et on évaluerait le rayon d'action fictif et stabilisé sous la forme :

$$R_a = R_A \cdot e^{-s_\infty (2R_0/\gamma R_A)}$$

Pour R_A — rayon d'action fictif correspondant à l'alimentation proportionnelle seule — assez grand devant R_0 , on retrouve bien le rayon d'action classique (le double de la distance à la berge) :

$$R_a \approx R_A e^{\ln(\gamma/2) \cdot (2R_0/\gamma R_A)} = R_0$$

... Mais dès que R_0 est un peu supérieur à $2R_A$, l'exposant $-s_\infty (2R_0/\gamma R_A)$ devient inférieur à 0,05 et R_a est commandé par R_A à moins de 5 % près.

C'est précisément le cas signalé au début où l'alimentation strictement localisée au contact de limites trop éloignées (la berge à la distance $R_0/2$) ne saurait justifier à elle seule la valeur

expérimentale et correcte R_a , peu différente de R_A et éventuellement très inférieure à la valeur classique R_0 .

RÉFÉRENCES

- [1] DE GLEE. — Cours de Tison, 2^e partie, page 402. KOTCHINA (Mme). — *S.H.F., Sixièmes journées de l'hydraulique Q I, C 16*.
- [2] R. MICHE. — *S.H.F., Sixièmes journées de l'hydraulique Q I, C 4*.
- [3] THEIS. — Exposé de M. HOUPEURT : Eléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux, (page 177).
- [4] JAHNKE et EMDE. — Tables of functions, Dover publications.
- [5] TCHARNY. — Commentaires de M. VIBERT et de l'auteur. *Le Génie Civil*, 1/54 et 3/56.
- [6] SOUTHWELL. — Applications de M. E. de CAZENOVE, *La Houille Blanche*. (Présent numéro).
- [7] SCHNEEBELI. — Limite de validité de la loi de Darcy, *La Houille Blanche*, mars-avril 1955.
- [8] BOULTON. — Association Internationale de Recherche Hydraulique, Congrès de Rome, tome II.

NOTRE FRONTISPICE

Cf. page 224

DUPUIT (1804-1865).

Dupuit est peut-être autant, sinon plus connu comme économiste que comme ingénieur et comme hydraulicien. C'est que dans le domaine de l'économie, autant que dans celui des sciences de l'ingénieur, il fit avant tout figure de praticien et d'homme d'action : il a « construit » et non point seulement « calculé » ou pensé.

Celui de ses premiers mémoires qui eut un retentissement considérable en France et en Europe et fut traduit en plusieurs langues, traitait « de la mesure de l'utilité des travaux publics » (1844), et les conclusions en étaient aussi constructives que pertinentes.

Arsène Jules Emile Juvénal Dupuit naquit le 18 mai 1804 à Fossano, ville du Piémont, alors partie de l'Empire français. Polytechnicien en 1822, ingénieur ordinaire des Ponts et Chaussées en 1827, ingénieur en chef à Angers en 1844, les inondations qui avaient désolé cette région les années précédentes l'amènèrent à se pencher sur les problèmes des crues et à publier en 1848 son « *Étude théorique et pratique sur le mouvement des eaux courantes* », dont les parties les plus remarquables étaient l'étude des écoulements à surface libre, des ondes de crue, des courbes de remous en canaux horizontaux ou à pente douce ou raide, et des effets des élargissements et des rétrécissements des canaux en fonction de la ligne de profondeur critique. L'un des premiers, il sut opérer un rapprochement entre le ruissellement et les précipitations.

Chargé en 1850 de la direction des travaux municipaux à Paris, notamment du Service des eaux ainsi que des égouts, il décrivit ses travaux et ses conceptions dans le *Traité théorique et pratique de la conduite et de la distribution des eaux* (1854). En hydraulique théorique, Dupuit révisa la formule de Prony et démontra que la vitesse moyenne n'est pas seulement une fonction de la vitesse à la surface, mais dépend de la pente, de la hauteur du canal et de la vitesse à la paroi.

Dans son métier d'ingénieur, Dupuit, ennemi de la routine et toujours en quête de procédés nouveaux, doué par surcroît d'un robuste bon sens, fit œuvre originale dans les domaines les plus divers, avec un constant souci de garder le contact avec le concret, c'est-à-dire avec l'observation et avec l'expérience.

DUPUIT (1804-1865).

Dupuit, famous both as an engineer and as a hydraulicist, is probably equally well known as an economist—if not more so. In this latter subject—just as in his other activities—he was above all a practical person and a man of action: he not only calculated and thought, but he also “made things”.

A paper entitled “On the measurement of the usefulness of public works”, (1844) which was one of his first, made a considerable impact both in France and other countries, and was translated into several languages. Its conclusions were as constructive as they were pertinent.

Arsène Emile Juvénal Dupuit was born at Fossano in Piedmont—then part of the French Empire—on the 18th May 1804. He graduated from the Ecole Polytechnique in 1822, was appointed an Engineer of the Ponts et Chaussées in 1827, and became Chief Engineer for the city of Angers in 1844. It was as a result of the catastrophic floods experienced in the Angers region during previous years that he came to study problems of this type and, in 1848, he published his “Theoretical and practical study of the movement of flowing water”. The most remarkable parts of this work were his study of free surface flows, flood waves, backwater curves in horizontal canals and canals with various degrees of slope, and the effects of increases and restrictions in canal cross-sectional area on the flow at various critical depth lines. He was one of the first to establish a relation between runoff and precipitation.

Dupuit was appointed Superintendent of Municipal works for Paris in 1850, being mainly responsible for the Water Supply and Sewers Department. His work and ideas are described in this “Theoretical and practical treatise on the ducting and distribution of water” (1854).

In theoretical hydraulics, Dupuit revised Prony's formula by demonstrating that mean velocity not only depends on surface velocities, but also on canal slope and depth, and on the velocities at the canal walls.

As an engineer, Dupuit loathed routine and was constantly on the lookout for new methods. Although this trait, allied with his sound common sense, enabled him to break new ground in several very different fields, he nevertheless constantly endeavoured to keep in touch with the concrete aspect of each problem by observation and experimentation.