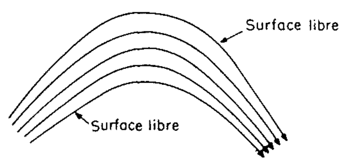
CALCUL DE LA HOULE

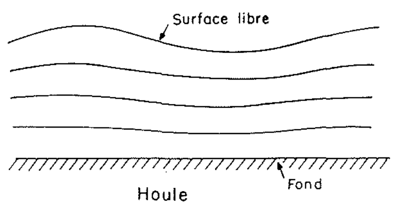
par J.-F. VERNET
Ingénieur en Chef de l'Armement

Position du problème

Nous étudions l'établissement d'un programme de calcul sur ordinateur d'un écoulement à surface libre, tel que l'écoulement d'un jet d'eau, ou le mouvement de la houle à la surface d'un plan d'eau.



Jet d'eau



Houle

Nous considérons l'eau comme un fluide incompressible en contact avec l'air dont la densité est négligeable, de sorte que la pression est constante sur la surface de séparation entre l'eau et l'air (surface libre).

La difficulté du problème consiste à déterminer la forme de la surface libre, car si celle-ci était connue, le problème serait résolu par des méthodes classiques. Le poids de l'eau a une influence importante sur la forme de la surface libre.

Si les deux fluides en contact avaient la même densité (comme dans le cas d'un jet noyé), la forme de la surface de séparation serait plus facile à déterminer; toutefois la même méthode serait applicable.

Nous supposons que la viscosité de l'eau a un effet négligeable, c'est-à-dire que le fluide est parfait.

Dans ce cas on démontre que la circulation est constante le long d'une ligne fluide fermée ([1], p. 140).

En particulier, si la circulation est initialement nulle (comme dans le cas d'un fluide initialement au repos), elle reste nulle et l'écoulement est irrotationnel.

La houle de Von Gerstner ([1], p. 235), qui est mathématiquement la plus simple, correspond à un écoulement rotationnel, mais il n'existe pas de cas pratique où on puisse admettre, même en tenant compte de la viscosité de l'eau et de l'effet du vent, que la répartition de tourbillon correspondant à la houle de Von Gerstner se trouve réalisée. Par contre, les conditions d'une houle irrotationnelle sont souvent réalisées (par ex. propagation d'une houle dans un bassin initialement au repos).

Dans ce qui suit, nous supposons que l'écoulement est irrotationnel. D'autre part nous supposons que l'écoulement est plan (toutes les vitesses sont parallèles à un même plan) et permanent. Cette dernière condition implique, dans le cas de la houle, que l'on fait le calcul dans un système d'axes lié à la crête d'une onde, animée d'une vitesse constante.

J. F. VERNET

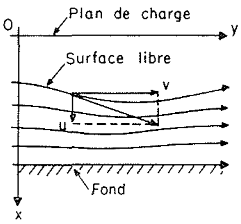
Fonctions analytiques et écoulements

Soit C le corps des nombres complexes, soit D une partie ouverte de C. On dit qu'une application f de D dans C est analytique si, au voisinage de tout point $a \in D$, $f(z)$ est égale à la somme d'une série entière absolument sommable en $(z - a)$.

Une fonction analytique est indéfiniment différentiable et toutes ses dérivées sont analytiques ([6], p. 207-209).

Les fonctions analytiques définissent des écoulements de la façon suivante.

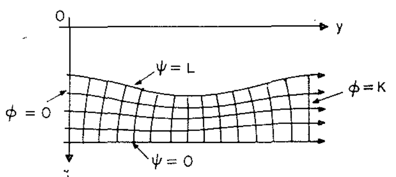
On représente la position d'un point dans le plan (x, y) par la variable complexe $z = x + iy$. On définit une autre variable complexe $Z = \Phi + i\psi$ appelée potentiel complexe, dont la partie réelle Φ est le potentiel des vitesses, et dont la partie imaginaire ψ est la fonction de courant ([1], p. 173-178). Pour tout écoulement plan, irrotationnel d'un fluide incompressible, le potentiel complexe Z est une fonction analytique de la variable de position z.



La dérivée de cette fonction est aussi une fonction analytique de z. Elle définit la vitesse de composantes (u, v) en chaque point de l'écoulement :

$$\frac{dZ}{dz} = u - iv$$

On peut appeler vitesse complexe la fonction dZ/dz.



Le potentiel complexe Z est une fonction analytique de la vitesse complexe dZ/dz; cette fonction est appelée hodographe de l'écoulement ([1], p. 382).

La variable $W = -\log (dZ/dz)$ est une fonction analytique de z. Sa partie réelle en un point est le logarithme de l'inverse de la valeur absolue de la vitesse, et sa partie imaginaire est égale à l'angle que fait la vitesse avec l'axe Ox.

La variable W est aussi une fonction analytique de Z. Si on connaît W (Z) en tout point d'un certain domaine, on en déduit dans ce domaine :

$$\frac{dz}{dZ} = \exp [W (Z)]$$

et par intégration on obtient z (Z).

Ce calcul peut se faire numériquement point par point.

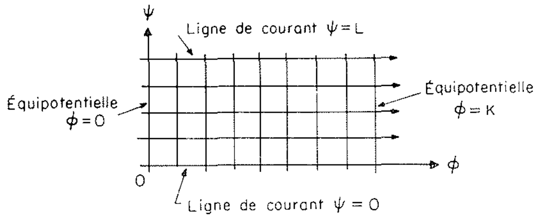
Calcul de la fonction analytique W (Z)

La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction analytique sont des fonctions harmoniques conjuguées. Cette propriété permet de les calculer à l'intérieur d'un domaine déterminé si on connaît sur la frontière les valeurs de l'une des deux fonctions harmoniques conjuguées.

Le calcul est également possible si on connaît une des fonctions harmoniques sur une partie de la frontière, et l'autre fonction harmonique sur l'autre partie de la frontière.

Un tel calcul se fait par itération suivant la méthode de Gauss-Seidel ([2], p. 1 157).

Par exemple, dans le cas de la houle, on peut considérer dans le plan z un domaine limité par la ligne de courant $\psi = L$, qui constitue la surface libre, par la ligne de courant $\psi = 0$, qui constitue le fond supposé plat et horizontal du bassin, et par deux équipotentielles $\Phi = 0$ et $\Phi = K$. (Dans le plan Z, ces frontières définissent un rectangle.) En supposant que la houle est périodique, on peut choisir ces équipotentielles passant par la crête et par le creux maximal de la houle. Alors elles sont des plans de symétrie, donc elles sont verticales, et la direction de la vitesse est horizontale en chacun de leurs points. Il en est de même au fond du bassin. Nous savons donc que la partie imaginaire de W est égale à $\pi/2$ pour $\psi = 0$, pour $\Phi = 0$, et pour $\Phi = K$.



Si nous connaissons la valeur absolue de la vitesse sur la surface libre, nous en déduisons la partie réelle de W pour $\psi = L$, et nous avons les conditions aux limites suffisantes pour calculer W dans tout le rectangle du plan Z, et en déduire z (Z) comme il a été expliqué plus haut. Nous allons voir maintenant comment on peut calculer la valeur absolue de la vitesse sur la surface libre.

Calcul de la valeur absolue de la vitesse sur la surface libre

Le plan de charge d'un écoulement est le plan horizontal sur lequel la pression a une valeur donnée (pression atmosphérique par exemple) si la vitesse est nulle.

La difficulté principale du problème est que les conditions sur la ligne de courant $\psi = L$ correspondant à la surface libre (dans le cas de la houle) ne sont pas connues *a priori*, mais dépendent de la solution du problème.

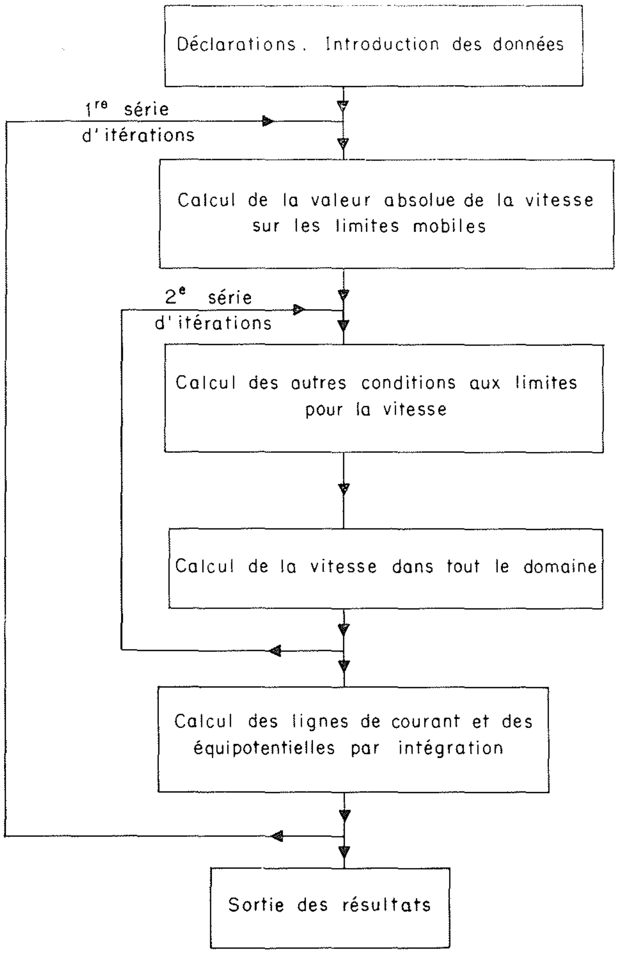
En effet, sur une surface libre, le carré scalaire $(u^2 + v^2)$ de la vitesse est, conformément à la formule de Bernoulli ([1], p. 147), déterminé par la distance x du point correspondant en dessous du plan de charge $(x = 0)$:

$$u^2 + v^2 = 2\,gx$$

avec $g = 9{,}81$ m/s^2. On peut calculer à partir de cette valeur la partie réelle de W.

(En réalité nous avons fait les calculs avec la valeur numérique $g = 10$ m/s^2).

On peut alors procéder à une première série d'itérations selon le schéma suivant : on se donne pour chaque valeur $(\Phi + iL)$ du potentiel complexe sur la surface libre, une valeur de x arbitraire ou résultant de l'itération précédente. On en déduit les conditions aux limites pour W et on effectue une seconde série d'itérations qui fournit W dans tout le rectangle. Par intégration, on en déduit une forme d'écoulement plus approchée que la précédente, (si du moins le processus converge), ce qui termine une itération de la première série. On en déduit de nouvelles conditions aux limites qui permettent de démarrer une nouvelle itération de la seconde série. La seconde série d'itérations est nichée dans la première, conformément à l'ordinogramme suivant :



Particularités du calcul

Relaxation. Surrelaxation.

La connaissance des conditions aux limites pour la partie réelle (respectivement la partie imaginaire) de W entraîne la connaissance des conditions aux limites pour la partie imaginaire (respectivement la partie réelle) parce que ce sont deux fonctions harmoniques conjuguées.

A partir des conditions aux limites, le calcul d'une fonction harmonique à l'intérieur du domaine se fait par une méthode de relaxation sur un réseau de mailles carrées (méthode de différences finies). La valeur de la fonction en un point est la moyenne de ses valeurs aux quatre points qui encadrent le premier. C'est le principe de la deuxième série d'itérations.

En pratique, la convergence du calcul est relativement lente, le taux de convergence étant de l'ordre de 0,97. On accélère la convergence en utilisant une méthode de surrelaxation ([4], p. 109).

On a obtenu de bons résultats avec un taux de surrelaxation variable suivant la progression des itérations, augmentant de 1 à 1,7.

Le même taux de surrelaxation accélère également la convergence des itérations de la première série.

Cependant un taux de surrelaxation trop fort ou appliqué trop brutalement peut empêcher complètement la convergence.

Points singuliers.

Toute fonction analytique cesse d'être analytique en un certain nombre de points appelés points singuliers.

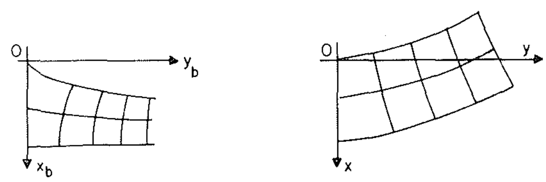
Lorsque la surface libre de l'écoulement reste éloignée du plan de charge ($x = 0$) il n'y a aucun point singulier sur la surface libre. Par contre l'écoulement a un point singulier chaque fois que la surface libre touche le plan de charge. Stokes a démontré que la surface libre présente alors un point anguleux, et que l'angle entre les deux tangentes est égal à 120° ([3], p. 731).

En un tel point, la méthode de calcul décrite ci-dessus ne convient pas. D'autre part on constate que si la surface libre, sans atteindre le plan de charge s'en rapproche de plus en plus au cours de calculs successifs, la convergence est de plus en plus lente et les résultats de plus en plus faux, de sorte qu'une extrapolation serait illusoire.

Le meilleur moyen pour calculer un écoulement avec point singulier sur la surface libre consiste à transformer le point singulier en un point régulier, par une représentation conforme ([1], p. 188). On connaît la transformation convenable grâce au théorème de Stokes énoncé ci-dessus. On en déduit les conditions aux limites dans le plan transformé, on fait tout le calcul dans ce plan, et ensuite la représentation conforme inverse permet de ramener les résultats dans le plan de l'écoulement.

Dans le cas de la houle, en supposant que le point singulier soit à l'origine des coordonnées, et en appelant $x_b + iy_b$ la coordonnée complexe du plan de l'écoulement $x + iy$ celle du plan transformé, la représentation conforme s'écrit :

$$(x + iy) = (x_b + iy_b)^{3/2}$$



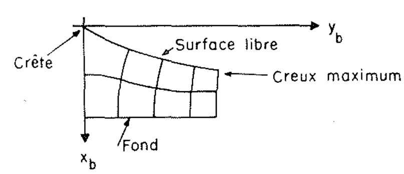
Plan de l'écoulement — Plan transformé

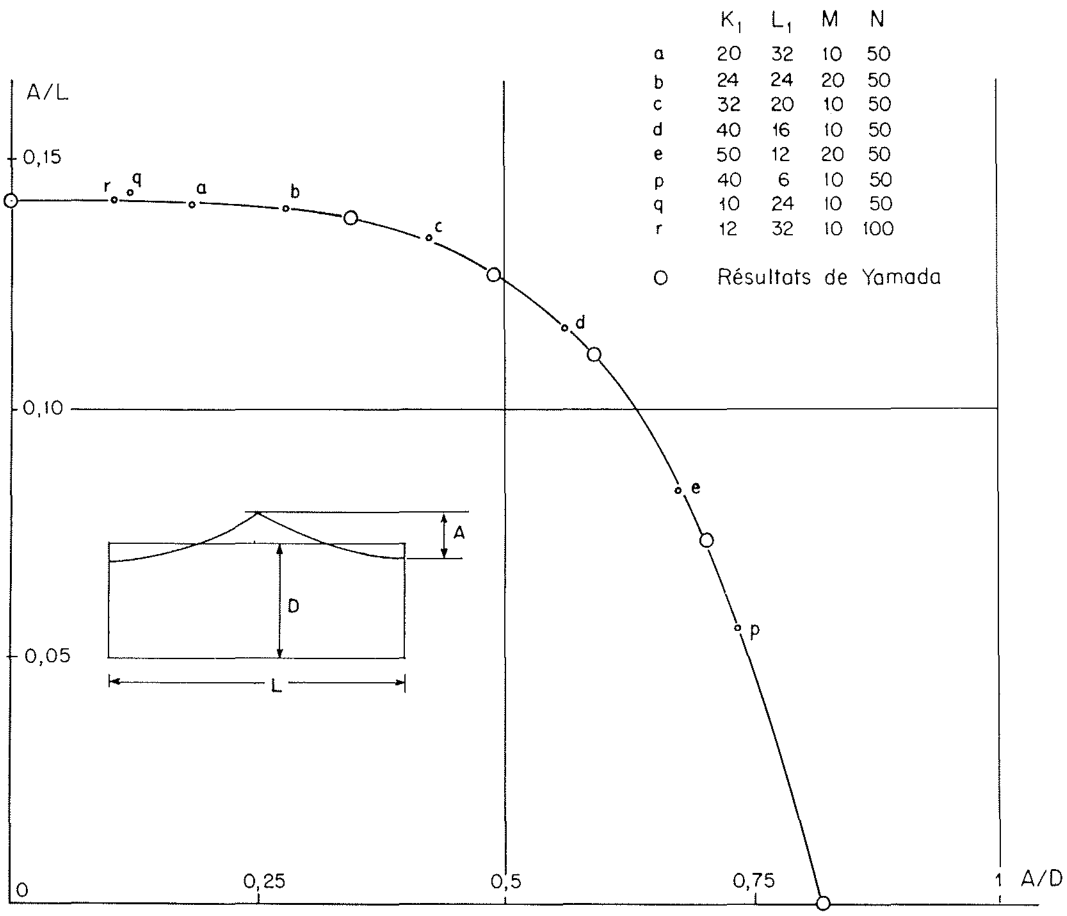
Résultats

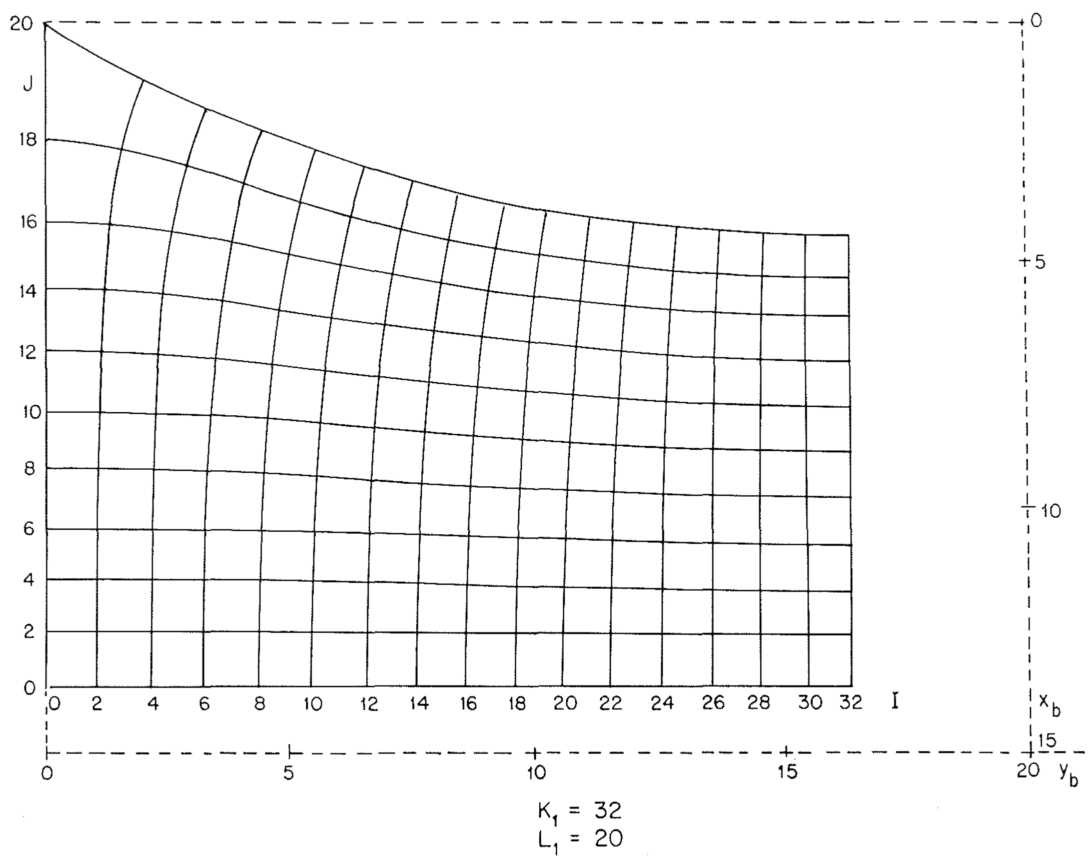
Houle.

Les calculs effectués concernent une houle plane, irrotationnelle dans un fluide incompressible et non visqueux. L'écoulement est supposé plan et permanent, c'est-à-dire que les axes de référence se déplacent avec la vitesse d'une crête de la houle.

La profondeur est finie, le fond est plat et horizontal. Nous avons effectué le calcul dans le cas de la cambrure limite. La surface libre atteint le plan de charge à chaque crête, qui constitue un point singulier de l'écoulement. L'écoulement est supposé symétrique par rapport à deux plans verticaux, l'un passant par la crête, l'autre par le creux maximal de la houle. Il suffit de faire le calcul pour une demi-longueur d'onde.







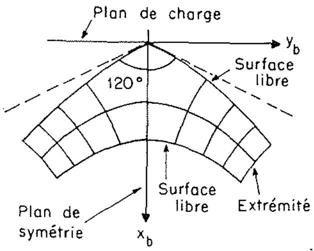
La courbe ci-jointe représente une partie des résultats obtenus, sous forme d'une courbe reliant les paramètres définis sur la figure. On appelle K_1 le nombre d'équipotentielles, L_1 le nombre de lignes de courant, M le nombre d'itérations de la seconde série, N le nombre d'itérations de la première série. Le nombre total d'itérations est le produit $M \times N$.

Sur la même figure on a représenté le point calculé par

Michell ([3], p. 734), pour le cas de la profondeur infinie et quelques-uns des points obtenus par Yamada [5]. Ces résultats calculés par des méthodes différentes concordent parfaitement.

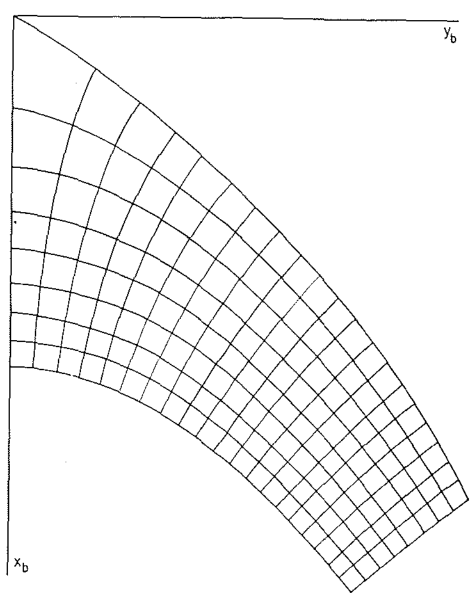
Jet d'eau.

Nous avons calculé la forme d'un jet d'eau plan compris entre deux surfaces libres à la même pression; la surface libre supérieure est supposée atteindre le plan de charge en un point qui est singulier pour l'écoulement. Les tangentes à la ligne de courant passant par ce point forment



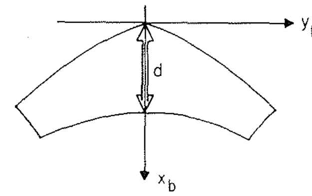
entre elles un angle de 120°. L'écoulement est symétrique par rapport à une équipotentielle verticale passant par le point singulier. Il n'est pas possible de calculer pour ce problème une solution exacte, car l'écoulement devrait être prolongé jusqu'à l'infini. Nous sommes obligés de le limiter à une équipotentielle d'extrémité sur laquelle les conditions aux limites exactes ne sont pas connues.

Pour des équipotentielles de plus en plus éloignées du plan de charge, il est évident que la répartition de pression entre les deux lignes de courant extrêmes se rapproche de plus en plus d'une loi uniforme. Nous avons fait l'hypothèse que cette dernière était strictement réalisée sur l'équipotentielle d'extrémité. L'erreur ainsi commise peut être réduite autant que l'on veut en éloignant suffisamment l'extrémité.



En prenant un débit de 80 m^3/s, et par mètre de largeur perpendiculairement au plan de la figure, (avec $g = 10$ m/s^2), nous avons trouvé que la distance d entre les points les plus élevés de chacune des deux lignes de courant extrêmes était :

$$d = 10{,}0125 \text{ m}$$



Les trois dernières décimales de ce résultat ne sont pas significatives. Le calcul a été effectué avec 25 itérations dans la première série et 10 itérations dans la seconde série.

Ecoulement de débit maximum avec seuil.

L'écoulement du jet d'eau que nous venons de déterminer nous fournit la solution du problème suivant, dans les conditions générales précédentes (fluide parfait, incompressible, pesant, écoulement plan, permanent, irrotationnel). On suppose en outre que la position du plan de charge est donnée, et que la pression correspondante n'est pas la pression atmosphérique, mais est égale à la pression d'ébullition du fluide à la température ambiante. En aucun point situé entre les deux lignes de courant extrêmes la pression ne doit devenir inférieure à cette valeur. Dans ces conditions, quel est le débit maximal qui peut passer au-dessus d'un seuil donné ?

L'écoulement du jet d'eau est une solution du problème, puisque la pression limite est atteinte en tout point des lignes de courant extrêmes. Il ne serait pas possible d'augmenter la vitesse en un point quelconque de l'écoulement sans introduire quelque part une pression inférieure à la pression limite.

En admettant que la distance entre le point le plus élevé du seuil et le plan de charge est égale à 10 m, on obtient ainsi un débit maximal de 80 m^3/s et par mètre de largeur.

C'est le débit maximal qui peut franchir la crête d'un barrage par le moyen d'un siphon, dans les conditions ci-dessus, et en admettant que le niveau de la retenue amont ne dépasse pas la crête du barrage [7].

Pour d'autres valeurs de g ou de la hauteur de gorge du siphon, le débit maximal peut être calculé en utilisant la similitude de Froude.

Un siphon réel ne devrait pas comporter de partie divergente, mais devrait être convergent de l'entrée à la sortie. La forme donnant le débit maximal n'est donc pas la meilleure à d'autres points de vue, mais en modifiant un peu cette forme, le débit maximal est relativement peu diminué.

Références

[1] MANDEL (J.). — « Cours de mécanique des milieux continus ». *Gauthier-Villars* (1966), 2 vol.

[2] BASS (J.). — « Cours de mathématiques ». 4e édition. *Masson* (1968), 2 vol.

[3] WEHAUSEN (J.) und LAITONE (E.). — « Surface waves » in Flügge Handbuch der Physik IX, III. *Springer-Verlag* (1960).

[4] RICHARD (S.) and VARGA. — « Matrix Iterative Analysis ». *Prentice Hall* (1962).

[5] YAMADA (H.) and SHIOTANI (T.). — « On the highest water waves of permanent type ». *Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute*, vol. 18, part. 2, Kyoto University, Japan (December 1968).

[6] DIEUDONNE (J.). — « Eléments d'analyse ». Tome I. *Gauthier-Villars* (1968).

[7] BOLON (G.) et BADRE (M.). — « Etude d'un siphon de débit maximum ». *Ecole Polytechnique*. Travaux personnels des élèves de la promotion 1967.