Ecoulement en rivière après une rupture de barrage. Calcul par la méthode des différences finies associées avec des caractéristiques

Hoang Quoc On - Tran Gia Lich

Institut de Mathématiques, Hanoi

1. Enoncé du problème

Le système d'équations représentant l'écoulement non permanent dans les canaux et rivières à ciel ouvert résulte des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (voir [1], [2]) :

$$\int_G Q \, dt - \omega \, dx = \iint_S q \, dx \, dt$$

$$\int_G \left[P + \frac{Q^2}{\omega} \right] dt - Q \, dx =$$

$$= \iint_S \left[g\omega \left(i - \frac{Q|Q|}{K^2} \right) + R_x \right] dx \, dt \quad (1)$$

où :

$$P = g \int_0^h (h - \zeta) b(x, \zeta) \, d\zeta$$

$$R = g \int_0^h (h - \zeta) \frac{\partial b}{\partial x} d\zeta$$

G = contour fermé dans le plan (x, t)
 S = domaine du plan (x, t) enfermé par G
 x = coordonnée spatiale (distance)
 t = temps
 $Q(x, t)$ = débit passant par ω
 $\omega(x, t)$ = surface mouillée de la section transversale
 $q(x, t)$ = apport latéral par unité de longueur
 i = pente longitudinale du fond
 $K(x)$ = débitance
 $h(x, t)$ = profondeur
 $b(x, \zeta)$ = largeur d'une section à la profondeur ζ .

Dans l'hypothèse de la continuité de toutes les fonctions on déduit de (1) le système suivant :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{Q^2}{\omega} \right) = g\omega \left(i - \frac{Q|Q|}{K^2} \right) + R_x. \quad (2)$$

Dans cet article, pour calculer l'écoulement à surface continue (sans ressauts) on utilise les équations de Saint Venant sous la forme caractéristique équivalente aux équations (2) :

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial t} + (v \pm c) \frac{\partial Q}{\partial x} \right] + B(-v \pm c) \times$$

$$\times \left[\frac{\partial Z}{\partial t} + (v \pm c) \frac{\partial Z}{\partial x} \right] = \Phi + (-v \pm c) q \quad (3)$$

où

$$\Phi = \left[iB + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{h=Cte} \right] v^2 - \frac{g\omega Q|Q|}{K^2}$$

$B(x, t)$ = largeur de la surface libre
 $v(x, t)$ = vitesse dans la section $v = Q/\omega$
 $Z(x, t)$ = élévation de la surface libre
 = célérité des petites perturbations,
 $c = \sqrt{g\omega/B}$.

Le système d'équation (3) est du type hyperbolique quasi linéaire et possède deux familles de caractéristiques dans le plan (x, t) :

$$\frac{dx}{dt} = v \pm c. \quad (4)$$

Flow into a river after rupture in a dam.

Calculation by the finished differences method associated with characteristics

After stating the problem, the authors present the proposed algorithm as well as the results of calculations carried out on computer.

Soit un cours d'eau séparé en deux biefs par un barrage qui rompt brutalement. La rupture crée une discontinuité se propageant vers l'aval et séparant deux zones de l'écoulement : l'une entre la limite amont l_0 et la discontinuité l_1 elle-même, l'autre entre l_1 et la limite aval l_2 . Si l'écoulement dans les deux biefs est, à l'instant initial, tranquille ($v < c$) alors il faut (et il suffit) de spécifier une seule condition à chacune des limites l_0 et l_2 . Ces conditions peuvent être définies par l'une des équations suivantes :

$$Q_{l_i} = f(t); \quad Z_{l_i} = \varphi(t); \quad Q_{l_i} = F(Z_{l_i}); \quad i = (0, 2). \quad (5)$$

La condition de compatibilité à l'interface l_1 est trouvée par l'intégration du système (1) sur le contour G qui enferme un segment de trajectoire $\xi(t)$ de la discontinuité (cf. fig. 1).

1.

L'intégration amène à :

$$C_*[\omega] - [Q] = 0 \quad (6a)$$

$$C_*[Q] - \left[P + \frac{Q^2}{\omega} \right] = 0 \quad (6b)$$

où

$$[f] = f^+ - f^-$$

$f^+ = f(\xi + 0)$ = valeur de f à droite de la discontinuité

$f^- = f(\xi - 0)$ = valeur de f à gauche de la discontinuité

$C_* = d\xi/dt$ = vitesse de propagation de la discontinuité.

A partir du système d'équations (6), en effectuant un certain nombre de manipulations, on trouve :

$$[P] \left[\frac{1}{\omega} \right] + [v]^2 = 0 \quad (7)$$

$$C_* = v^- + \sqrt{\frac{\omega^+}{\omega^-} \frac{P^+ - P^-}{\omega^+ - \omega^-}} \quad (8)$$

d'où :

$$v^- + \sqrt{\frac{\omega^+}{\omega^-} \frac{P^+ - P^-}{\omega^+ - \omega^-}} = v^+ + \sqrt{\frac{\omega^-}{\omega^+} \frac{P^+ - P^-}{\omega^+ - \omega^-}} \quad (9)$$

En posant :

$$f^* = f(h^*) \quad \text{avec} \quad h^+ < h^* < h^-$$

on trouve à partir de (8) et (9)

$$\sqrt{\frac{\omega^+}{\omega^-} \frac{P^+ - P^-}{\omega^+ - \omega^-}} = \sqrt{\frac{\omega^+}{\omega^-} \frac{g\omega^*}{B^*}} < \sqrt{g \frac{\omega^+}{B^+}} = c^+ < c^-$$

$$\sqrt{\frac{\omega^-}{\omega^+} \frac{P^+ - P^-}{\omega^+ - \omega^-}} = \sqrt{\frac{\omega^-}{\omega^+} \frac{g\omega^*}{B^*}} > \sqrt{g \frac{\omega^-}{B^-}} = c^- > c^+.$$

On en déduit que :

$$v^- - c^- < C_* < v^- + c^-, \quad v^+ + c^+ < C_*$$

et qu'une seule condition de compatibilité (7) est nécessaire pour résoudre le problème sur la discontinuité ξ (cf. fig. 2).

2.

Si la hauteur de la discontinuité $\Delta h = h^- - h^+$ est petite, alors on peut développer les fonctions en amont de la discontinuité en série de Taylor et négliger les termes d'ordre supérieur en obtenant :

$$C_* \approx v^+ + c^- \approx v^- + c^+. \quad (10)$$

A partir de (10), en utilisant (6a) (ou (7)), on déduit :

$$Q^+ - Q^- - B(v^- + c^+)(Z^+ - Z^-) = 0. \quad (11)$$

En plus des conditions aux limites et de la condition de compatibilité, on doit spécifier les conditions initiales suivantes pour le temps $t = 0$

$$Z(x, 0) = Z^0(x); \quad Q(x, 0) = Q^0(x). \quad (12)$$

2. Algorithme.

Soit un tronçon d'une rivière ou d'un canal entre les sections l_0 et l_2 comprenant un barrage ou point $l_1 = \xi(0)$. L'écoulement initial (avant la rupture) est subcritique ($v < c$) sur toutes la longueur du tronçon.

On détermine le maillage de calcul en divisant la longueur ($l_0 - l_2$) en N intervalles égaux :

$$l_0 = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = l_2$$

où

$$x_n = (n-1) \Delta x, \quad \Delta x = \frac{l_2 - l_0}{N}.$$

On définit la fonction-grille sur le plan (x, t) :

$$f_n^k = f(x_n, t_k); \quad t_k = \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i$$

où $\tau_i = \Delta t_i$ est l'accroissement du temps que l'on choisira pour chaque étape de calcul en respectant la condition :

$$\tau_i < \frac{\Delta x}{|v^i| + c^i}.$$

La fonction f représente une des fonctions telles que Q , Z , a , b , c (a , b et c sont définis plus loin).

Le problème énoncé est résolu sur le maillage ainsi défini en utilisant la méthode des différences finies associée aux caractéristiques.

En utilisant les caractéristiques, on calcule d'abord Z^+ , Q^+ , Q^- , Q^- sur la discontinuité, les valeurs Z , Q aux limites l_0 et l_2 ainsi qu'au point $l_0 + (\text{Int}[l_1/\Delta x] - 1)\Delta x$, c'est-à-dire au point du maillage immédiatement en amont de la discontinuité située à l'abscisse l_1 .

En utilisant les différences finies, on calcule alors Z , Q aux points restants du maillage.

Pour assurer la stabilité de la méthode de caractéristiques sur le maillage fixe, il faut respecter la condition de Courant-Friedrichs-Levy (cf. [3], [5]) :

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{|v| + c}. \quad (13)$$

Par ailleurs, en utilisant un schéma implicite des différences finies :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_n^{k+1} &= \frac{f_n^{k+1} - f_n^k}{\Delta t}; \\ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_n^{k+1} &= \frac{f_{n+1}^{k+1} - f_{n-1}^{k+1}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (14)$$

pour calculer les termes du second membre au temps t_{k+1} , on s'assure de la stabilité inconditionnelle du calcul, quel que soit $\Delta t/\Delta x$ (cf. [7]).

A l'instant initial de la rupture, les relations (7) et (9) ne sont pas valables. On calcule donc les valeurs initiales Z^- , Q^- , Z^+ , Q^+ en supposant pendant un intervalle de temps court et au voisinage du barrage, le frottement nul, le fond horizontal et la section rectangulaire $B(l_1, h) = \text{Cte}$. On obtient alors de (7) (cf. [4], [8]) :

$$\begin{aligned} v^- &= v^+ + \sqrt{(P^- - P^+) \left(\frac{1}{\omega^+} - \frac{1}{\omega^-} \right)} \\ &= v^+ + \sqrt{\frac{g}{2} [(h^-)^2 - (h^+)^2] \left(\frac{1}{h^+} - \frac{1}{h^-} \right)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Le système d'équation (3) sur les caractéristiques $dx/dt = v \pm c$ s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} dQ + B(-v \pm c) dh &= 0, \quad d(vh) + (-v \pm c) dh = 0 \\ dv &= \mp \frac{c}{h} dh, \quad dv = \mp \sqrt{\frac{g}{h}} dh \end{aligned} \quad (16)$$

$$\int dv = \mp \sqrt{g}; \quad \int \sqrt{\frac{1}{h}} dh + \text{Cte} = \mp 2 \sqrt{gh} + \text{Cte}.$$

A partir de (15) et (16), on déduit la procédure itérative pour calculer Z^- et Q^- sachant que sur les caractéristiques $v \pm 2c = \text{Cte}$, soit :

$$\begin{aligned} h^+ &= Z^+ - Z^0(\xi); \quad v^+ = \frac{Q^+}{\omega(\xi, h^+)}; \quad h^{(0)} = h^+ \\ v_{TD} &= \frac{Q_{TD}}{\omega(\xi, h_{TD})}; \\ h_{TD} &= Z^- - Z^0(\xi); \\ Q_{TD} &= Q^+ = Q^0 \end{aligned}$$

où l'index TD indique la valeur en amont immédiat du barrage $fTD = f(\xi - 0)$.

En posant :

$$h^{(i)} = h^{(i-1)} + h^+ \times 0,01.$$

On itère :

$$\begin{aligned} v_i &= v^+ + \sqrt{\frac{g}{2} [(h^{(i)})^2 - (h^+)^2] \left(\frac{1}{h^+} - \frac{1}{h^{(i)}} \right)} \\ h_s &= \frac{1}{4g} (v_{TD} + 2 \sqrt{gh_{TD}} - v_i)^2. \end{aligned}$$

Si $h_s > h^{(i)}$, on répète le processus d'itération.

Sinon, on obtient :

$$h^- = h^{(i)}, \quad v^- = v_i, \quad Q^- = v^- \omega(\xi, h^-).$$

Pour le cas $v^+ = Q^+ = Q_0 = 0$, on peut calculer h^- et Q^- par une autre procédure (voir [8], [10]) qu'on peut résumer comme suit :

- Trouver la valeur approximative de h^- , grâce au graphe représentant la relation entre $\frac{h^- - h_{DD}}{h_{TD}}$ et $\frac{h_{DD}}{h_{TD}}$ où $h_{DD} = h(\xi + 0)$ est la profondeur du côté droit du barrage.

- Déterminer C_* et v^- à l'aide des deux équations suivantes :

$$2 \sqrt{gh^-} + v^- = 2 \sqrt{gh_{TD}} \quad (17)$$

$$h^- (C_* - v^-) = - (h_{DD})/C_* = 0 \quad (18)$$

ensuite, si l'on veut obtenir des résultats plus précis, on peut utiliser l'égalité suivante :

$$h^- v^- (C_* - v^-) = (g/2) [(h^-)^2 - (h_{DD})^2]$$

pour modifier les valeurs calculées de h^- , v^- , et C_* .

Au-delà des valeurs initiales, la procédure de calcul est différente. Le système d'équations (3) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$dQ + a_1 dZ = b_1 dt \quad (19a)$$

$$dx = c_1 dt \quad (19b)$$

$$dQ + a_2 dZ = b_2 dt \quad (20a)$$

$$dx = c_2 dt \quad (20b)$$

où

$$a_1 = B(-v+c), \quad b_1 = \phi + (-v+c)q, \quad c_1 = v+c \\ a_2 = B(-v-c), \quad b_2 = \phi - (-v-c)q, \quad c_2 = v-c.$$

En supposant qu'on connaît les valeurs des inconnues du problème à l'étage temporel t_k , pour calculer celles à l'étage t_{k+1} , on fera des calculs dans l'ordre suivant :

(i) Déterminer la position $\xi(t_{k+1})$ de la discontinuité et calculer les valeurs de Z^-, Q^-, Z^+, Q^+ correspondantes (voir [3], [4]). A cette fin, il faut :

a) D'abord déterminer la position approximative de la discontinuité :

$$\xi' = \xi^{(1)}(t_{k+1}) = \xi(t_k) + C_*(\xi(t_k), \xi(t_k)) \tau_k$$

où :

$$C_*(\eta, \xi) = 1/2(C_*(\eta) + C_*(\xi)).$$

Plus généralement on notera :

$$f(\eta, \xi) = 1/2(f(\eta) + f(\xi)).$$

où f peut être l'une des fonctions : Z, Q, C_*, a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2$).

b) Calculer les valeurs Z^+, Q^+ du côté droit de la discontinuité par la méthode itérative suivante :

Pour l'itération $i = 1$, les variables étant connues au pas de temps t_k , on pose :

$$Z^{(i-1)} = Z^{(0)} = Z^+(t_k) \\ Q^{(i-1)} = Q^{(0)} = Q^+(t_k) \\ x_A^{(i-1)} = x_A^{(0)} = x_B^{(0)} = \xi(t_k) + 0.$$

A partir de (19b) et (20b), on obtient (voir fig. 3).

$$x_A^{(i)} = \xi' - c_1(\xi' + 0, A^{(i-1)}) \\ x_B^{(i)} = \xi' - c_2(\xi' + 0, B^{(i-1)}).$$

3.

Ensuite, par l'interpolation, on calcule :

$$Z(x_A^{(i)}, t_k), \quad Z(x_B^{(i)}, t_k) \\ Q(x_A^{(i)}, t_k), \quad Q(x_B^{(i)}, t_k).$$

En substituant ces valeurs dans (19a) et (20a), on obtient :

$$Q^{+(i)} - Q_A^{(i)} + a_1(\xi'_{(i)} + 0, A^{(i)})(Z^{+(i)} - Z_A^{(i)}) = \\ = b_1(\xi'_{(i)} + 0, A^{(i)}) \tau_k$$

et

$$Q^{+(i)} - Q_B^{(i)} + a_2(\xi'_{(i)} + 0, B^{(i)})(Z^{+(i)} - Z_B^{(i)}) = \\ = b_2(\xi'_{(i)} + 0, B^{(i)}) \tau_k.$$

La résolution du système de deux équations linéaires ci-dessus nous donne $Z^{+(i)}$ et $Q^{+(i)}$. Ici, il faut noter que chaque fonction $f(\xi'_{(i)} + 0)$, (f signifiant a_1, a_2, b_1, b_2), est calculée à l'aide des valeurs $Z^{+(i-1)}$ et $Q^{+(i-1)}$, qui sont obtenues à l'étape précédente de l'itération au point $\xi' + 0$.

Le processus d'itération (b) continue jusqu'au moment où l'on a :

$$|Z^{+(i)} - Z^{+(i-1)}| < |Z^{+(i)}| \varepsilon$$

et

$$|Q^{+(i)} - Q^{+(i-1)}| < |Q^{+(i)}| \varepsilon$$

où $\varepsilon \leq 10^{-2}$.

c) Calculer les valeurs Z^-, Q^- du côté gauche de la discontinuité ξ' :

4.

Par la même procédure que celle présentée dans b), nous supposons connus, pour $i = 1$, $Z^{-(i-1)}$ et $Q^{-(i-1)}$ à l'étape $(i-1)$ en posant :

$$Z^{-(0)} = Z^{-(t_k)}, \quad Q^{-(0)} = Q^{-(t_k)} \text{ et } x_E^{(0)} = \xi - 0,$$

Il résulte de (19a), (voir fig. 4) :

$$x_E^{(i)} = \xi' - C_1(\xi' - 0, x_E^{(i-1)}) \tau_k.$$

A partir de (19a) et de la condition (7) linéarisée, on obtient :

$$Q^{-(i)} - Q_E^{(i)} + a_1(\xi'_{(i)} - 0, E^{(i)})(Z^{-(i)} - Z_E^{(i)}) = \\ = b_1(\xi' - 0, E^{(i)}) \tau_k$$

$$\alpha Q^{-(i)} + \beta Z^{-(i)} + \gamma = 0$$

où

$$\begin{aligned}\alpha &= -2 \frac{v^{+(k+1)} - v^{-(k)}}{\omega^{-(k)}} \\ \beta &= -g\omega^{-(k)} \left(\frac{1}{\omega^{+(k+1)}} - \frac{1}{\omega^{-(k)}} \right) \\ &\quad + \frac{B^{-(k)} \cdot (P^{+(k+1)} - P^{-(k)})}{(\omega^{-(k)})^2} \\ &\quad + 2Q^{-(k)} \cdot B^{-(k)} \cdot \frac{v^{+(k+1)} - v^{-(k)}}{(\omega^{-(k)})^2} \\ \gamma &= (P^{+(k+1)} - P^{-(k)}) \cdot \left(\frac{1}{\omega^{+(k+1)}} - \frac{1}{\omega^{-(k)}} \right) + \\ &\quad + (v^{+(k+1)} - v^{-(k)})^2 \\ &\quad - \beta Z^{-(k)} \cdot \alpha \cdot Q^{-(k)} - \beta (Z_0^{-(k+1)} - Z_0^{-(k)}).\end{aligned}$$

Dans ces définitions k désigne l'étape t_k , et $k+1$ l'étape t_{k+1} .

La résolution du système à deux équations linéaires ci-dessus nous donne $Z^{-(i)}$ et $Q^{-(i)}$.

Le processus d'itération $c)$ se poursuit jusqu'à la satisfaction des critères :

$$\begin{aligned}|Z^{-(i)} - Z^{-(i-1)}| &< |Z^{-(i)}| \varepsilon \\ |Q^{-(i)} - Q^{-(i-1)}| &< |Q^{-(i)}| \varepsilon, \quad \varepsilon \leq 10^{-2}.\end{aligned}$$

Comme au point $b)$, $a_1(\xi_{(i)} - 0)$ et $b_1(\xi_{(i)} - 0)$ doivent être calculés par rapport aux points $Z^{-(i-1)}$ et $Q^{-(i-1)}$ qui sont obtenus à l'étape précédente au point $\xi' - 0$.

$d)$ Retrouver la position approximative de la discontinuité $\xi(t_{k+1})$:

• Calculer :

$$\xi^{(j)}(t_{k+1}) = \xi(t_k) + C \cdot (\xi(t_k), \xi^{(j-1)}(t_{k+1})) \tau_K.$$

• Ensuite recalculer les valeurs Z^- , Q^- , Z^+ , Q^+ , (compatibles avec la nouvelle position de la discontinuité (b) et c)).

On termine le processus d'itération défini par $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ lorsqu'on satisfait à la condition

$$C \cdot (\xi^{(j)}(t_{k+1})) - C \cdot (\xi^{(j-1)}(t_{k+1})) < |C \cdot (\xi^{(j)}(t_{k+1}))| \varepsilon.$$

(ii) Calculer les valeurs de Z et Q au point intérieur défini par :

$$\chi_F = \left\{ \text{Int} \left[\frac{\xi(t_k)}{\Delta x} \right] - 1 \right\} \Delta x + l_0$$

en appliquant le processus d'itération cité dans le paragraphe $b)$ de (i).

(iii) Aux points x_n qui satisfont la relation $x_F < x_n \leq \xi(t_{k+1})$ on calcule Z et Q par la méthode d'interpolation.

(iv) A l'extrémité amont l_0 , à partir de 2 équations suivantes :

1) La condition à la limite

2) $dQ + a_2 dZ = b_2 dt$ et $dx = c_2 dt$,

en utilisant le processus d'itération cité dans le paragraphe $c)$ de (i), on obtient les valeurs de $Z(l_0, t_{k+1})$ et $Q(l_0, t_{k+1})$.

En utilisant la même technique, on calcule $Z(l_2, t_{k+1})$ et $Q(l_2, t_{k+1})$ à l'extrémité aval l_2 à partir de 2 équations :

— La condition à la limite

— $dQ + a_1 dZ = b_1 dt$ (dans ce cas $dx = c_1 dt$).

(v) Aux points intérieurs qui restent, pour calculer les valeurs de Z et Q , on utilise la méthode des différences finies, ce qui permet de réduire le temps de calcul en évitant les itérations de la méthode des caractéristiques.

Après avoir écrit le système d'équations (3) sous la forme des différences finies avec le schéma implicite (14), on obtient un système d'équations linéaires sous la forme vectorielle :

$$a_n(U_{n+1}^{k+1} - U_n^{k+1}) + b_n U_n^{k+1} = l_n \quad (21)$$

où :

$U_n^{k+1} = (Z_n^{k+1}, Q_n^{k+1})^T$ est le vecteur à 2 composantes, a_n , b_n sont les matrices carrées à 2×2 , d_n est le vecteur à 2 composantes.

On trouvera les solutions du système d'équations (21) par la méthode de balayage matricielle (voir [9]).

L'équation vectorielle (21) peut être résolue comme suit :

$$U_n^{k+1} = \mathcal{L}_n U_{n-1}^{k+1} + r_n \vec{A} + \vec{R}_n$$

où

$$\mathcal{L}_n = (a_n \mathcal{L}_{n+1} + b_n)^{-1} a_n$$

$$r_n = - (a_n \mathcal{L}_{n+1} + b_n)^{-1} a_n r_{n+1}$$

$$\vec{R}_n = (a_n \mathcal{L}_{n+1} + b_n)^{-1} (d_n - a_n \vec{R}_{n+1}),$$

$$N_1 + 1 \leq n \leq N_2 - 1.$$

Les matrices à 2 dimensions $\mathcal{L}_{N_2}$ et r_{N_2} et les vecteurs à deux composantes $\vec{A}$, $\vec{R}_{N_2}$ résultent des conditions aux limites et des équations écrites sous la forme des caractéristiques (3).

Ici, par définition N_1 et N_2 sont des indices des extrémités d'une partie de maillage.

On applique la méthode des différences finies présentées ci-dessus à deux parties séparées de l'écoulement : l'une à gauche de la discontinuité $\xi(t_{k+1})$, où :

$$N_1 = 0 \quad \text{et} \quad N_2 = \left\{ \text{Int} \left[\frac{\xi(t_k)}{\Delta x} \right] - 1 \right\}$$

et l'autre à droite de la discontinuité $\xi(t_{k+1})$, où :

$$N_1 = \left\{ \text{Int} \left[\frac{\xi(t_{k+1})}{\Delta x} \right] + 1 \right\}, \quad N_2 = N.$$

Dans le cas du problème énoncé ici,

$$\mathcal{L}_{N_2} = [0], \quad r_{N_2} = [E] \text{ (matrice unité)}$$

$$\vec{R}_{N_2} = [0], \quad \vec{A} = U_{N_2}^{k+1}$$

et $U_{N_2}^{k+1}$, $U_{N_1}^{k+1}$ sont déjà calculés par la méthode des caractéristiques.

Cet algorithme est aussi appliqué à une rivière naturelle de 400 km avec un barrage au point dont l'abscisse est 200 km, la profondeur initiale de l'eau à la gauche du barrage est $h^- = 104$ m et à la droite du barrage $h^+ = 9$ m ($\Delta h = 95$ m). La condition initiale est $Q(x, 0) = 11\,000$ m³/s. Les largeurs $B(x, h)$, les niveaux du fond $Z_0(x)$ et les aires de sections transversales $\omega(x, h)$, sont tous connus.

Les résultats ont montré qu'après 53 minutes, la discontinuité ξ se déplace d'une distance de 43,355 km

vers l'aval et que la hauteur de la discontinuité $\Delta h = h^- - h^+$ est égale 1,3 m (voir le tableau ci-dessous).

Paramètres	t (secondes)				
	0	516"	938"	1 815"	3 180"
Δh (m)	95	7,5	5,8	3,1	1,3
C_* (m/s)	0	16,95	15,13	11,54	10,17
$\xi(t)$ (km)	207,33	217,88	225,01	236,95	251,085

Bibliographie

- [1] VASSILIEV O.F., GLADYSHEV M.T. — « O raschotie preryvnykh voln v otkrytykh ruslakh » (« Sur le calcul des ondes discontinues dans les canaux à ciel ouvert », en russe), *Izv. AN SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 1966, N° 6, p. 184-198.
- [2] ALALUKHIN G.B. et al. — « Resenie odnomernykh zadach gazovoy dinamiki v podvizhnykh sietkakh » (« Résolution des problèmes unidimensionnels de la dynamique de gaz sur les réseaux de calcul mobiles », en russe), *Izd. Nauka, Moskva*, 1970.
- [3] « *Methods in Computational Physics, Advances in Research and Applications* ». Vol. 3: Fundamental Methods in Hydrodynamics. Academic Press, New York, London 1964, p. 254-291.
- [4] TRAN GIA LICH, NGO VAN LUOC, HOANG QUOC. — On « Raschet preryvnykh voln metodom kharakteristik z postojannoy sietkoy » (« calcul des ondes discontinues par la méthode des caractéristiques sur le maillage constant », en russe), *ZVMI MT*, T. 24, N° 3, Moskva 1984, p. 442-447.
- [5] DAUBERT A., MARVAUD P., FABRE L. et MARGNAC Melle A. — « Quelques applications de modèles mathématiques à l'étude des écoulements non permanents dans un réseau ramifié de rivières ou de canaux ». *La Houille Blanche*, N° 7, 1967, p. 735-746.
- [6] STOCKER J.J. — « *Water Waves. The mathematical theory with applications* ». New York, 1957.
- [7] VASSILIEV O.F., TEMNOEVA T.A., SHUGRIN S.M. — « Chisliennyi method raschota neustanovivshiego dvizheniya vody v otkrytykh ruslakh » (« Méthode numérique de calcul de l'écoulement non stationnaire dans les cours d'eau à ciel ouvert », en russe), *Izv. AN SSSR, Mekhanika*, 1955, N° 2, p. 17-25.
- [8] BENOIST G. — « *Code simplifié de calcul des ondes de submersion* ». Rapport E 43/78/55. Laboratoire national d'hydraulique EDF (France).
- [9] TRAN GIA LICH, BUI THI HOANG, VÔ MINH DŨC. — Une publication en vietnamien.
- [10] KOCHIN N.E., KIBEL I.A., ROZE N.V. — « *Teorietskaja Gidromekhanika* » (« Hydromécanique Théorique », en russe), Moskva, Fizmatgiz, 1963.

De admirandis mundi cataractis. Jean Herbinius. Amsterdam - 1678.