Conditions analogues à celles de Thoma pour une installation hydroélectrique ayant une cheminée d'équilibre à l'amont et une autre à l'aval des turbines

Conditions analogous to those of Thoma in the case
of a hydro-electric installation having one surge-tank
above the turbines and another below them

PAR R. MEYER

INGÉNIEUR AU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE

SOMMAIRE { 1. Introduction. — 2. Etablissement de l'équation caractéristique. —
3. Limite de stabilité. — 4. Cas où les pertes de charge sont négligeables
devant la chute nette. — 5. Résumé et conclusions.

Nouvelle justification de l'importance des conditions analogues à celles de THOMA. Etude d'une installation comprenant une cheminée d'équilibre à l'amont et une autre à l'aval des turbines. Quand on se place dans le cas habituel où les pertes de charge sont petites devant la chute nette et que l'installation n'est pas fondamentalement instable, on obtient les résultats suivants : l'installation se comporte à peu près comme deux installations séparées, l'une comprenant la partie amont, l'autre la partie aval. On en déduit les pseudo-périodes des oscillations. L'installation est stable si chaque section est supérieure à la section de THOMA correspondante. Ces résultats sont exacts à $4 (\Delta H/H_n)$ près au moins; en particulier quand les deux sections sont juste égales à celles de THOMA, l'installation est toujours légèrement instable. La conclusion importante est qu'une installation ne peut être stable si l'une des sections est inférieure à la section de THOMA, même si l'autre est extrêmement grande.

Further justification of importance of conditions similar to THOMA conditions. Study of an installation having one surge-tank above the turbines and another below. In the usual case of head losses which are low in relation to the net head and of an installation which is not fundamentally instable, the following results are obtained:

The installation behaves almost like two separate installations, composed of the upstream section and the downstream one. The pseudo-periods of oscillation are deduced from this behaviour. The installation is stable if the cross-section of each surge-tank is greater than the corresponding THOMA cross-section. These results are accurate to within $4 (\Delta H/H_n)$. In particular, when the two cross-sections are just equal to the THOMA cross-sections, the installation is always slightly unstable. The important conclusion drawn is that an installation cannot be stable if one of the cross-sections is smaller than the THOMA cross-section, even if the other is very much greater.

INTRODUCTION

L'étude exacte de la stabilité et du comportement d'une installation hydroélectrique comprenant deux cheminées (voir fig. 1) est compliquée. Pratiquement, on ne peut pas aborder cette étude sous forme littérale; seuls des calculs en partie numériques peuvent être faits dans cha-

que cas particulier. Or, avant de faire des calculs numériques, il faut se fixer un certain nombre de paramètres de l'installation. On obtient une bonne idée de la valeur des sections de cheminée à adopter en étudiant l'installation supposée munie d'un régulateur « parfait ». C'est cette étude

FIG. 1

qui est l'objet de la présente publication.

Nous allons d'abord examiner de plus près la valeur que peut avoir cette étude. Cette valeur dépend des hypothèses simplificatrices que nous allons faire. Les principales de ces hypothèses sont :

1. Nous supposons le régulateur parfait.
2. Nous linéarisons les équations.
3. Nous simplifions l'installation.

Nous avons discuté la valeur de la notion « régulateur parfait » dans une récente publication (*), dans laquelle nous avons étudié un certain nombre d'installations munies d'un tel régulateur. Nous rappelons ici brièvement les points essentiels de cette discussion.

Le régulateur d'une turbine a pour mission d'actionner l'organe d'admission d'eau de telle sorte que la puissance hydraulique fournie à la turbine soit autant que possible à chaque instant égale à la puissance mécanique demandée. Si cette condition est vérifiée exactement et en permanence, la vitesse de rotation du groupe (donc aussi la fréquence électrique) est constante en vertu de la relation :

$$\frac{1}{2} I \left| \frac{d(\Omega^2)}{dt} \right| = P_F - P_A$$

I : Moment d'inertie du groupe.

Ω : Vitesse de rotation.

P_F : Puissance hydraulique fournie à la turbine.

P_A : Puissance mécanique demandée.

En réalité, il ne peut pas exister de régula-

teur parfait qui puisse maintenir la différence $P_F - P_A$ rigoureusement nulle à chaque instant, ne serait-ce qu'à cause des retards de manœuvre dus à l'inertie des pièces à déplacer. Les régulateurs réels peuvent au mieux maintenir la différence $P_A - P_F$ constante en moyenne dans le temps de telle sorte que Ω soit toujours plus ou moins voisin de sa valeur de réglage. Il existe donc un temps T tel que la moyenne de $P_A - P_F$ prise sur ce temps soit inférieure à une valeur fixée à l'avance :

$$\left| \int_t^{t+T} (P_A - P_F) dt \right| \leq \alpha \int_t^{t+T} \frac{1}{2} (P_A + P_F) dt$$

Ce temps T caractérise la perfection du régulateur et est un temps de réponse.

Nous allons montrer que si une installation hydroélectrique supposée munie d'un régulateur parfait est stable, on peut en général trouver facilement un régulateur à asservissement temporaire ou accélérotachymétrique la réglant convenablement. Par contre, si une installation est instable quand elle est munie d'un régulateur parfait, elle ne peut en général pas être réglée convenablement avec un régulateur réel.

Soit une installation dont le schéma de réglage est représenté sur la figure 2.

FIG. 2

Les équations de réglage sont :

$$P_F = \varphi \cdot f \cdot d \quad (1)$$

(*) R.G.E., n° 1, 1953; pp. 40-46.

FIG. 3

$f = 0$ satisfait aux conditions d'Hurwitz (a).
 $f = 0$ a une racine imaginaire pure (b).
 $f = 0$ ne satisfait pas aux conditions d'Hurwitz (c).

φ et f : fonctions de transfert du régulateur et du système à régler :

$$d = P_A - P_F$$

D'où :

$$P_F(1 + \varphi \cdot f) = P_A \cdot \varphi \cdot f$$

L'équation caractéristique est donc :

$$1 + \varphi \cdot f = 0 \quad (2)$$

L'équation (1) montre que, pour obtenir une valeur d faible, il faut que $\varphi \cdot f$ soit très grand en valeur absolue. Si le régulateur est parfait, $d = 0$ et $\varphi \cdot f$ est tellement grand que l'équation (2) devient :

$$\varphi \cdot f = 0$$

Cette équation se scinde en deux : $\varphi = 0$ et $f = 0$. L'équation $f = 0$ ne dépend que du système à régler et le signe de ses racines caractérise son aptitude à être réglée sans pompes. On peut d'ailleurs facilement faire une étude plus approfondie en se servant de la méthode de NYQUIST. A la fonction de transfert f correspond une courbe de réponse sur le plan de NYQUIST (fig. 3).

Si l'installation est munie d'un régulateur habituel (asservissement temporaire ou accéléro-tachymétrique), la fonction de transfert φ donne lieu à une courbe de transfert dont l'allure est représentée sur la figure 4. Cette courbe est graduée en ω .

Si le régulateur tend à être parfait, les points figuratifs relatifs à une fréquence donnée tendent à s'éloigner de l'origine.

La fonction $f \cdot \varphi$ est représentée sur la figure 5.

Les points a et b correspondent aux fréquences à partir desquelles le régulateur cesse d'être voisin d'un régulateur parfait.

On voit que le régulateur réel III doit être très différent du régulateur parfait, même aux très

FIG. 4

basses fréquences, donc doit être très imparfait (et en particulier doit avoir un temps de réponse très grand). Il n'est d'ailleurs pas évident qu'on

FIG. 5

I : Avec régulateur parfait,
 II : Avec « bon » régulateur réel,
 III : Régulateur réel, stabilisant une installation qui, munie d'un régulateur parfait, serait instable.

puisse réaliser un régulateur donnant une telle courbe de réponse.

En conclusion, on voit que la limite de stabilité d'une installation supposée munie d'un régulateur parfait caractérise assez bien ce que nous avons appelé « l'aptitude à être réglée convenablement ».

La deuxième hypothèse simplificatrice que nous faisons concerne la linéarisation des phénomènes. C'est la plus contestable. Néanmoins, elle est nécessaire pour notre calcul dont le but n'est d'ailleurs que de donner un ordre de grandeur. On peut montrer que le calcul linéarisé donne dans notre cas, en général, un résultat légèrement trop optimiste.

Les dernières hypothèses simplificatrices concernent l'inertie de l'eau entre les pieds des deux cheminées (fig. 6) et le rendement de la turbine.

FIG. 6

Si on tenait compte de l'inertie de l'eau dans le tronçon indiqué, l'installation munie d'un régulateur parfait serait toujours instable. Mais

la fréquence propre des oscillations serait en général très élevée et à ces fréquences le régulateur réel peut souvent, facilement, apporter une correction.

On voit finalement que l'étude revient à chercher quelle section de cheminée il faut choisir pour que le régulateur puisse être parfait pour les oscillations relativement rapides, le régulateur étant nécessairement « imparfait » pour les fluctuations très rapides.

L'ordre de grandeur des périodes de ces fluctuations rapides est donné par le temps de lancé de l'eau dans le tronçon indiqué sur la figure 6 et est $\Theta_0 = (L_0 Q)/(g \sigma H_n)$. Si les sections de cheminées ne permettent pas une régulation stable avec un régulateur parfait, le régulateur réel devra déjà être imparfait pour les périodes de l'ordre de $\sqrt{\frac{L_{1:2} S_{1:2}}{g \sigma_{1:2}}}$ qui sont en général bien plus grandes que Θ_0 .

Q : Débit de régime.

H_n : Chute nette.

$\sigma_{1:2}$: Section des conduites.

g : Accélération de la pesanteur
(9,81 m/s²).

L_0 : Longueur de conduite entre les pieds des cheminées.

$L_{1:2}$: Longueur de galerie (amont ou aval).

$S_{1:2}$: Section des cheminées amont ou aval.

Finalement, on admet que le rendement de la turbine est constant et égal à 1, comme il est coutume de le faire pour ces problèmes. On pourrait d'ailleurs facilement tenir compte des variations de rendement.

ÉTABLISSEMENT DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

(Pour les notations, voir figure 1)

1. Coups de bélier dans la galerie amont :

$$h_0 - \frac{L_1}{g \sigma_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} - K_1 q_1^2 = h_1$$

2. Remplissage de la cheminée amont :

$$S_1 \frac{dh_1}{dt} = q_2$$

3. Continuité à la base de la cheminée amont :

$$q_1 = q_2 + q_3$$

4. Puissance de la turbine :

$$P = \varpi q_3 (h_1 - h_2)$$

5. Continuité à la base de la cheminée aval :

$$q_3 = q_4 + q_5$$

6. Remplissage de la cheminée aval :

$$S_2 \frac{dh_2}{dt} = q_4$$

7. Coups de bélier dans la galerie de fuite :

$$h_2 - \frac{L_2}{g \sigma_2} \frac{dq_5}{dt} - K_2 q_5^2 = 0$$

Linéarisons ces équations en posant :

$$q_i = q_{i0} + \Delta q_i ; \quad h_i = h_{i0} + \Delta h_i ; \quad \text{etc.}$$

$$1. \quad -\frac{L_1}{g \sigma_1} \frac{d \Delta q_1}{dt} - 2 K_1 q_{10} \Delta q_1 = \Delta h_1$$

$$2. \quad S \frac{d \Delta h_1}{dt} = \Delta q_2$$

$$3. \quad \Delta q_1 = \Delta q_2 + \Delta q_3$$

$$4. \quad \Delta q_3 (h_{10} - h_{20}) + q_{30} (\Delta h_1 - \Delta h_2) = 0$$

$$5. \quad \Delta q_3 = \Delta q_4 + \Delta q_5$$

$$6. \quad S_2 \frac{d \Delta h_2}{dt} = \Delta q_4$$

$$7. \quad \Delta h_2 - \frac{L_2}{g \sigma_2} \frac{d \Delta q_5}{dt} - 2 K_2 q_{50} \Delta q_5 = 0$$

Posons $h_{10} - h_{20} = H_n$: chute nette à la puissance P .

et :

$$\frac{L_1}{g \sigma_1} \frac{q_{10}}{H_n} = \Theta_1 ; \quad \frac{L_2}{g \sigma_2} \frac{q_{50}}{H_n} = \Theta_2 ;$$

$$2 K_1 q_{10} = \beta_1 ; \quad 2 K_2 q_{50} = \beta_2$$

$$\frac{S_1 H_n}{q_{10}} = T_1 ; \quad \frac{S_2 H_n}{q_{10}} = T_2$$

puis :

$$\frac{\Delta q_1}{q_{10}} = Q_1 e^{pt} ; \quad \frac{\Delta q_2}{q_{10}} = Q_2 e^{pt}, \quad \text{etc.}$$

On obtient alors les équations suivantes :

$$1. \quad -(\Theta_1 p + \beta_1) Q_1 = H_1$$

$$2. \quad T_1 p H_1 = Q_2$$

$$3. \quad Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$4. \quad Q_3 + H_1 - H_2 = 0$$

$$5. \quad Q_3 = Q_4 + Q_5$$

$$6. \quad T_2 p H_2 = Q_4$$

$$7. \quad H_2 - (\Theta_2 p + \beta_2) Q_5 = 0$$

On tire Q_2 en fonction de H_1 de (2) d'où Q_1 en fonction de H_1 et Q_3 de (3), puis H_1 en fonction de Q_3 de (1). De même on tire Q_4 en fonction de H_2 de (6), d'où Q_5 en fonction de H_2 et Q_3 de (5), et finalement H_2 en fonction de Q_3 de (7). Ceci donne :

$$H_1 = - \frac{\Theta_1 p + \beta_1}{T_1 \Theta_1 p^2 + \beta_1 T_1 p + 1} Q_3$$

$$H_2 = + \frac{\Theta_2 p + \beta_2}{T_2 \Theta_2 p^2 + \beta_2 T_2 p + 1} Q_3$$

Ces deux équations donnent, avec l'équation (4), l'équation caractéristique en p :

$$1 - \frac{\Theta_1 p + \beta_1}{T_1 \Theta_1 p^2 + \beta_1 T_1 p + 1} - \frac{\Theta_2 p + \beta_2}{T_2 \Theta_2 p^2 + \beta_2 T_2 p + 1} = 0$$

ou :

$$\Theta_1 \Theta_2 T_1 T_2 p^4 + [\Theta_1 T_1 (\beta_2 T_2 - \Theta_2) + \Theta_2 T_2 (\beta_1 T_1 - \Theta_1)] p^3$$

$$+ p^2 [T_1 \Theta_1 + T_2 \Theta_2 + \beta_1 \beta_2 T_1 T_2$$

$$- (\beta_1 \Theta_2 + \beta_2 \Theta_1) (T_1 + T_2)]$$

$$+ p [(\beta_1 T_1 - \Theta_1) + (\beta_2 T_2 - \Theta_2)$$

$$- \beta_1 \beta_2 (T_1 + T_2)] + 1 - \beta_1 - \beta_2 = 0$$

LIMITES DE STABILITÉ

Pour trouver les limites de stabilité de notre installation, nous étudierons son équation caractéristique que nous écrirons :

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \quad (2)$$

Nous avons étudié dans un récent article (*Houille Blanche*, n° 4-1952) de telles équations caractéristiques. Rappelons rapidement les principaux résultats :

On sait que les conditions de stabilité sont données par les déterminants d'HURWITZ. Ces conditions sont, pour l'équation ci-dessus, les suivantes :

Si : $C_0 = a_4 > 0$, il faut que :

$$C_1 = a_3 a_2 a_1 - (a_0 a_3^2 + a_4 a_1^2) > 0$$

$$C_2 = a_0 > 0$$

$$C_3 = a_3 > 0$$

$$C_4 = a_1 > 0$$

Nous avons démontré que seules les courbes $C_0 = 0$, $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$ limitent effectivement les domaines de stabilité. Les autres courbes excluent des domaines entiers formés par les trois

précédentes, sans jamais être elles-mêmes frontalière d'un domaine de stabilité.

Pratiquement, $a_0, a_1, \dots$ sont fonction des paramètres $\alpha_1; \alpha_2, \dots$ caractérisant l'installation (par exemple sections des cheminées d'équilibre, constantes du régulateur, etc.). En multipliant l'équation caractéristique par une fonction convenable, de $\alpha_1; \alpha_2, \dots$, on peut s'arranger pour que les $a_0, a_1, \dots$ ne deviennent jamais infinis pour des valeurs finies de $\alpha_1; \alpha_2, \dots$.

Considérons l'espace (ou le plan) dont les axes sont gradués en $\alpha_1; \alpha_2, \dots$ et admettons qu'il existe un ensemble de valeurs $\alpha_1; \alpha_2, \dots$ (c'est-à-dire un point M_1 de cet espace) pour lesquelles l'installation est stable, et un ensemble de valeurs $\alpha_1; \alpha_2, \dots$ (auxquelles correspond le point M_2) pour lesquelles l'installation est instable (si cette hypothèse n'est pas réalisée, il n'y a évidemment pas de problème de stabilité). Si on fait varier continûment les paramètres $\alpha_1; \alpha_2, \dots$, les racines de l'équation caractéristique varient continûment (comme on le démontre en algèbre); elles varient donc continûment le long d'une courbe reliant les points M_1 et M_2 . Or, en M_1 toutes les racines ont leur partie réelle négative et en M_2 , il y en a au moins une dont la partie réelle est positive. Il existe donc un point sur chaque courbe joignant M_1 à M_2 pour lequel une racine a une partie réelle nulle. L'ensemble de ces points forme un ou plusieurs arcs de courbe qui sont susceptibles de limiter des domaines de stabilité. Si une équation a une racine dont la partie réelle est nulle, cette racine ne peut être que 0 ; ∞ ou $j\omega$ (ω réel; $j = \sqrt{-1}$). Les points de l'espace $\alpha_1; \alpha_2, \dots$ pour lesquels l'équation (2) a une racine infinie, imaginaire ou nulle, sont donnés respectivement par :

$$C_0 = a_4 = 0$$

$$C_1 = a_3 a_2 a_1 - (a_0 a_3^2 + a_4 a_1^2) = 0$$

$$C_3 = a_0 = 0$$

Ce sont donc les seules courbes (ou surfaces) pouvant limiter des domaines de stabilité.

Les conditions relatives aux courbes C_4 et C_5 ne limitent donc pas de domaines de stabilité, mais peuvent exclure des domaines entiers.

Il est à remarquer qu'en tous les points de la courbe C_1 , l'équation caractéristique n'a pas forcément une racine $j\omega$. La courbe C_1 comprend également tous les points pour lesquels l'équation caractéristique a deux racines réelles et de signe contraire.

La courbe C_1 a des points doubles à l'intersection de $a_1 = 0$ et $a_3 = 0$; les tangentes en ces points sont réelles ou imaginaires, selon que :

$$a_2^2 \leq 4 a_0 a_4$$

Dans le cas actuel, nous allons considérer le plan T_1, T_2 . Les limites de domaines de stabilité sont alors $T_1 = 0$; $T_2 = 0$ et $a_1 a_2 a_3 = a_0 a_3^2 + a_4 a_1^2$. Pour que l'installation puisse être stable, il faut en outre que $1 > \beta_1 + \beta_2$. Nous admettrons que cette dernière condition est toujours vérifiée (c'est toujours le cas en pratique). La courbe C_1 est du cinquième degré. Elle a deux points doubles à l'intersection de l'hyperbole $a_3 = 0$ et de la droite $a_1 = 0$. En outre, elle a deux points doubles à l'infini dans les directions $T_1 = 0$ et $T_2 = 0$ et un point double à l'origine. Le genre de cette courbe est donc au maximum $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 - 5 = 1$. Elle est donc composée au plus de 2 arcs non jointifs. Ses asymptotes parallèles aux axes sont :

$$T_1 = \frac{\Theta_1}{\beta_1}; \quad T_1 = - \frac{\Theta_2 (\Theta_1 - \beta_1 \Theta_2 - \beta_2 \Theta_1)}{\beta_2 (\Theta_2 \beta_1 + \Theta_1 \beta_2)}$$

et les deux analogues pour T_2 . On peut chercher facilement les deux autres points d'intersection avec $T_1 = \Theta_1/\beta_1$ (et $T_2 = \Theta_2/\beta_2$), de même que les points d'intersection à distance finie sur les axes (1 sur chaque axe en dehors de l'origine). On vérifie facilement que l'origine est un point double isolé ainsi que les deux points doubles à l'intersection de $a_1 = 0$ et $a_3 = 0$. Tous ces renseignements permettent de donner l'allure de la courbe sans équivoque dans le quadrant $T_1 > 0$; $T_2 > 0$ (fig. 7).

FIG. 7

Les domaines de stabilité sont en blanc.

En ce qui concerne le domaine de stabilité, il n'y a donc qu'une disposition possible.

Dans le cas général, on ne peut guère préciser mieux l'allure de la courbe; elle dépend de trois paramètres: $\beta_1; \beta_2$ et Θ_1/Θ_2 . Par contre, nous allons voir qu'on peut pousser plus loin l'étude dans le cas où β_1 et β_2 sont négligeables devant 1.

CAS OU LES PERTES DE CHARGE SONT NÉGLIGEABLES DEVANT LA CHUTE NETTE

C'est le cas habituel des installations hydro-électriques.

$$\beta_1 = \frac{2 \Delta H_1}{H_n} \quad \text{et} \quad \beta_2 = \frac{2 \Delta H_2}{H_n}$$

sont en général de l'ordre de 10 % au maximum. Dans ce cas, on peut calculer approximativement la distance de la courbe limitant le domaine de stabilité à ses asymptotes $T_1 = \Theta_1/\beta_1$ et $T_2 = \Theta_2/\beta_2$. Cette distance est au maximum de l'ordre de $4 \Delta H_1/H_n$ ou $4 \Delta H_2/H_n$. La courbe est donc à peu près confondue avec ses asymptotes.

Reprenons l'équation caractéristique en négligeant β_1 et β_2 devant 1. Si $\beta_1 T_1$ est de l'ordre de Θ_1 et $\beta_2 T_2$ de l'ordre de Θ_2 , l'équation peut être mise sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} [T_1 \Theta_1 p^2 + (\beta_1 T_1 - \Theta_1) p + 1] \\ [T_2 \Theta_2 + (\beta_2 T_2 - \Theta_2) p + 1] = 0 (*) \end{aligned}$$

On peut en tirer les valeurs approchées des pseudo-périodes et des amortissements :

$$\tau_1 = \sqrt{\Theta_1 T_1} ; \quad \tau_2 = \sqrt{\Theta_2 T_2} ; \quad \delta_1 = \frac{\beta_1 T_1 - \Theta_1}{\tau_1} ;$$

$$\delta_2 = \frac{\beta_2 T_2 - \Theta_2}{\tau_2}$$

$\tau_1 ; \tau_2$: pseudo-périodes d'oscillations.

Cette approximation est d'autant plus justifiée que β_1 et β_2 ne sont souvent, à priori, pas mieux connus qu'à 10 ou 20 % près. La condition de stabilité $T_1 > \Theta_1/\beta_1$, et $T_2 > \Theta_2/\beta_2$ sont donc les conditions techniquement valables. Il suffit de se souvenir que si on choisit les deux sections près de leur limite, il faut majorer cette limite de 10 ou de 20 % (**).

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

Nous avons montré que les conditions analogues à celles de THOMA sont nécessaires pour obtenir la stabilité pour les petites oscillations avec un régulateur qui règle suffisamment rapidement. Si ces conditions sont vérifiées, c'est le régulateur qui limite la qualité du réglage; on peut donc le rendre aussi parfait que possible. Si les conditions de THOMA ne sont pas remplies, l'installation exige pour sa régulation un régulateur réglant lentement, sinon il n'y a pas stabilité pour les petites oscillations (***) .

Pour une installation à deux cheminées d'équilibre, l'une à l'amont, l'autre à l'aval, les conditions de THOMA sont pratiquement :

$$S_1 > \frac{L_1 Q^2}{2 g \sigma_1 H_n \Delta H_1} \cdot k_1 = S_{T_1} \cdot k_1$$

$$S_2 > \frac{L_2 Q^2}{2 g \sigma_1 H_n \Delta H_2} \cdot k_2 = S_{T_2} \cdot k_2$$

k_1 et k_2 étant des coefficients voisins de 1. Si $S_1 \neq S_{T_1}$ et $S_2 \neq S_{T_2}$ il faut choisir en général

(*) Cette équation n'est justifiée qu'à cause de toutes les considérations précédentes. Pour $\beta_1 T_1 \neq \Theta_1$ sa validité n'est pas démontrable *a priori*; en effet on négligerait β_1 mais non $\beta_1 T_1 - \Theta_1$. Or, les deux quantités sont voisines de zéro.

(***) La stabilité pour les petites oscillations n'est pas toujours nécessaire, on peut admettre parfois un petit cycle limite. Néanmoins, le rapport S/S_T (S : section; S_T : section de THOMA) intervient toujours directement dans la détermination du cycle limite.

Fig. 8

Le domaine de stabilité est en blanc

pour k_1 et k_2 des valeurs voisines de 1,3; ce sont des valeurs maxima.

Les périodes d'oscillations sont :

$$\sqrt{\frac{L_1 S_1}{g \sigma_1}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{L_2 S_2}{g \sigma_2}}$$

Il est particulièrement important de noter qu'on ne peut pas « rattraper » l'étroitesse d'une section en agrandissant l'autre.

(**) On peut, à partir des calculs publiés ici, trouver encore un certain nombre d'autres résultats, dont la discussion mènerait trop loin ici.