Quelques résultats théoriques récents concernant les écoulements des nappes d'eau souterraines (*)

A few recent theoretical results concerning ground water flow (*)

PAR R. MEYER

INGÉNIEUR AU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE, GRENOBLE

La présente partie de cet article contient les justifications théoriques des assertions énoncées précédemment et concernant l'étude de l'approximation de Dupuit et l'étude des nappes de faible épaisseur d'une façon générale. Elle contient aussi un certain nombre de remarques d'ordre physique. Ainsi on montre que les écoulements transitoires dans une nappe sont comparables aux phénomènes de houle et d'ondes dans les canaux : tous ces phénomènes sont des « ondes de surface » et disparaissent quand on s'éloigne trop de cette surface. Néanmoins, alors que les ondes à l'air libre ont en général un amortissement très petit, celles se propageant dans les nappes s'amortissent très rapidement à cause de la dissipation de l'énergie. Vue sous cet angle l'approximation de Dupuit est le pendant de la « shallow water theory » des écoulements à surface libre et les simplifications à faire pour arriver à ces approximations sont fort semblables. Par contre l'analogie s'arrête là dans le cas de ces approximations ; le calcul effectif des écoulements est fort différent et, en général, plus aisé dans le cas des nappes d'eau souterraines. En effet les équations sont du type « chaleur » alors que celles de la « shallow water theory » sont du type « onde ». L'équation de la chaleur a des propriétés de régularisation très nettes (un peu comparables à celles des équations du type « elliptique »). Les solutions en sont donc en général plus simples que celles des équations du type onde (surtout quand il y a de multiples réflexions).

This section of the article contains theoretical justifications of statements made previously in connection with Dupuit's approximation, and a general investigation of shallow ground water. It also contains a number of observations of a physical nature. It is shown that transient flows of ground water can be compared with swell and wave phenomena in canals, for all such phenomena are "surface waves" and vanish when the distance from the surface becomes great. However damping in free surface waves is usually slight, whereas the dissipation of energy expended by waves propagated in ground water causes them to die away rapidly. Looked at in this way Dupuit's approximation is the counterpart of the shallow water theory in free surface flows, and the simplifications that have to be made to obtain the approximations are very similar. But here the analogy stops short, for where ground water is concerned the actual flow calculations are quite different and are usually much easier. In actual fact the equations are in the "heat" category whilst those connected with the shallow water theory are wave equations.

The heat equation has very marked regularization properties and for this reason is to some extent comparable with elliptic type equations. Its solutions are generally simpler than those of wave equations, especially where there are multiple reflections.

(*) Cf. *La Houille Blanche*, n° 1, 1955.

SOMMAIRE

CHAPITRE III. — CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES

- 3-1. — ÉQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT DE L'EAU DANS LES MILIEUX POREUX.
 3-2. — VARIATIONS SINUSOIDALES DANS UNE NAPPE SANS ÉCOULEMENT MOYEN ET SUR UNE ASSISE IMPERMÉABLE HORIZONTALE.
 3-3. — APPROXIMATION DE DUPUIT, OU DES « NAPPES DE FAIBLE ÉPAISSEUR », EN RÉGIME SINUSOIDAL.
 3-4. — NAPPES DE FAIBLE ÉPAISSEUR EN GÉNÉRAL.
 3-5. — DISCUSSION PHYSIQUE DES HYPOTHÈSES ET RÉSULTATS DU PARAGRAPHE 3-4.
 (Ici s'arrête la publication réservée au présent numéro)
 3-6. — NAPPES DE GRANDE ÉPAISSEUR.
 3-7. — SURPRESSIONS SUR LES MURS DE QUAI DUES A LA MARÉE.
 3-8. — PHÉNOMÈNES NON SINUSOIDAUX DANS LES NAPPES DE GRANDE ÉPAISSEUR.
 3-9. — CONCLUSIONS DU CHAPITRE III.

CHAPITRE III

CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES

Comme il a été exposé dans la première partie de cet article, le chapitre III contient les justifications théoriques des assertions énoncées précédemment et quelques remarques d'ordre physique. On aura avantage, au cours du chapitre III, à se reporter souvent aux figures correspondantes de la première partie.

3-1. — Equations de l'écoulement de l'eau dans les milieux poreux.

Nous ne voulons ici que rappeler brièvement les équations de l'écoulement et les hypothèses de base. Ces équations sont d'ailleurs traitées dans de nombreuses publications classiques (voir par exemple [2]; [3]); [4] (*); etc...).

HYPOTHÈSES PHYSIQUES DE BASE

a) La loi de Darcy généralisée s'applique partout au sein de la région étudiée :

(*) Les chiffres entre crochets [] renvoient à la bibliographie, p. 758.

$$\vec{v} = -\vec{K} \cdot \vec{\text{grad}} h$$

$$\vec{v} = \frac{Q}{S} \cdot \vec{e}$$

S : surface plane située dans le milieu poreux, perpendiculaire au flux moyen d'eau qui y passe et grande devant les dimensions des particules du milieu poreux.

Q : débit passant par S.

$\vec{e}$: vecteur unitaire perpendiculaire à S.

$\vec{v}$: vecteur appelé : « vitesse de filtration » ou plus souvent « vitesse » (ce n'est pas une vitesse moyenne de l'eau puisque la surface S comprend également des parties solides).

$\vec{K}$: tenseur de perméabilité. En général on le considère comme un scalaire : K.

h : charge hydraulique au point considéré et rapportée à un plan de référence unique pour tout l'écoulement $h = z + (p/\varpi)$: z : cote du point considéré à partir du plan de référence; p : pression sur la surface S; ϖ : poids spécifique de l'eau.

b) Le fluide et le milieu poreux sont incompressibles, d'où l'équation :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

qui s'applique également dans tout l'écoulement.

c) Sur les obstacles fixes et imperméables on admet :

$$v_n = \frac{\partial h}{\partial n} = 0$$

$\vec{n}$: normale à la surface de l'obstacle.

d) Sur les surfaces de contact entre l'eau libre et l'eau souterraine, on a :

$$h = h_0$$

h_0 : charge dans l'eau libre.

e) A la surface libre de l'eau souterraine, on a :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{m}{K} \frac{\partial h}{\partial t}$$

et $h = z$.

$oxyz$: trièdre de référence;

oz : verticale (positive vers le haut);

t : temps;

m : porosité effective;

f) On admet que les paramètres K et m ne varient pas dans le temps.

EQUATIONS DE DÉPART TIRÉES DES HYPOTHÈSES DE BASE :

On peut éliminer v entre les deux équations valables dans tout le milieu poreux d'où :

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} (\vec{K} \operatorname{grad} h) = 0 \text{ au sein du milieu;} \\ \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \text{ sur les obstacles imperméables;} \\ h = h_0 \text{ sur les surfaces de contact avec l'eau libre.} \\ \left. \begin{array}{l} \frac{m}{K} \frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial h}{\partial z} \\ h = z \end{array} \right\} \text{ à la surface libre.} \end{array} \right.$$

L'ensemble des équations (I) permet théoriquement de résoudre le problème.

HYPOTHÈSES SUPPLÉMENTAIRES NÉCESSAIRES AUX CALCULS EXPOSÉS CI-APRÈS :

a) K est un scalaire ne prenant qu'un nombre limité de valeurs constantes.

Dans une région où $K = C^{\text{ste}}$, on a alors :

$$\Delta_3 h = 0$$

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

b) En vue de la linéarisation du problème ainsi défini, on admet que l'écoulement cherché reste voisin d'un certain écoulement donné par $h = H(x, y, z, t)$ et dont il ne diffère que par les conditions aux limites sur les surfaces de contact avec l'eau libre. Nous posons alors pour notre écoulement : $h = H + h_1$.

Comme H et h sont deux écoulements satisfaisant à toutes les équations I, sauf à $h = h_0$, on a :

$$\begin{array}{l} \Delta_3 H = 0; \quad \Delta_3 h = \Delta_3 H + \Delta_3 h_1 = 0 : \text{ dans tout le milieu;} \\ \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right) = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial n} + \frac{\partial h_1}{\partial n} = 0 : \text{ sur les obstacles;} \\ \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{m}{K} \frac{\partial H}{\partial t}; \quad H = z; \\ \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial H}{\partial z} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial h_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial h_1}{\partial y} + 2 \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial h_1}{\partial z} \\ + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial h_1}{\partial z} = \frac{m}{K} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial t}\right); \quad H + h_1 = z \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Delta_3 H = 0; \quad \Delta_3 h = \Delta_3 H + \Delta_3 h_1 = 0 : \text{ dans tout le milieu;} \\ \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right) = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial n} + \frac{\partial h_1}{\partial n} = 0 : \text{ sur les obstacles;} \\ \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{m}{K} \frac{\partial H}{\partial t}; \quad H = z; \\ \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial H}{\partial z} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial h_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial h_1}{\partial y} + 2 \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial h_1}{\partial z} \\ + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial h_1}{\partial z} = \frac{m}{K} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial t}\right); \quad H + h_1 = z \right\} \begin{array}{l} \text{sur la} \\ \text{surface} \\ \text{libre} \end{array}$$

D'où, par soustraction des deux séries d'équations :

$\Delta_3 h_1 = 0$: dans tout le milieu poreux,

$\frac{\partial h_1}{\partial n} = 0$: sur les obstacles imperméables,

$$2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial h_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial h_1}{\partial y} + 2 \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial h_1}{\partial z} - \frac{\partial h_1}{\partial z} - \frac{m}{K} \frac{\partial h_1}{\partial t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{à la} \\ \text{surface} \\ \text{libre} \end{array} \right. \\ - \left[\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Seule la troisième équation est non linéaire. Si les perturbations par rapport à l'écoulement H sont faibles, on peut la linéariser; ceci revient à évaluer à zéro le membre de droite. En plus, si h_1 est petit, la surface libre peut être considérée comme étant en $z = H$.

Nos équations de départ seront donc les équations suivantes (on supprime l'indice 1) :

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} \Delta_3 h = 0 : \text{ dans tout le milieu poreux;} \\ \frac{\partial h}{\partial n} = 0 : \text{ sur les obstacles imperméables;} \\ h = h_0 : \text{ sur les surfaces de contact.} \\ 2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + 2 \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{m}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \left\{ \begin{array}{l} \text{à la surface libre} \\ \text{qui est en } z = H \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Si l'écoulement $H(x, y, z, t)$ est le repos absolu, on a : $H = 0$, d'où :

$$\text{III} \left\{ \begin{array}{l} \Delta_3 h = 0 : \text{ dans le milieu;} \\ \frac{\partial h}{\partial n} = 0 : \text{ sur les parois imperméables;} \\ h = h_0 : \text{ sur les surfaces de contact avec l'eau libre;} \\ \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{m}{K} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 : \text{ à la surface libre qui est en } z = z_0 = C^{\text{ste}}. \end{array} \right.$$

Nous discuterons par la suite la légitimité de la linéarisation.

3-2. — Variations sinusoïdales dans une nappe sans écoulement moyen située sur une assise imperméable horizontale.

La figure 34 montre cette nappe. Les équations de départ sont les équations (III); on place le plan xoz dans le plan de la surface libre de la nappe au repos.

Comme le problème est linéaire, il existe des écoulements tels que toutes les grandeurs varient sinusoïdalement. Ce sont ces écoulements que nous allons étudier maintenant. Pour cela, posons :

$$h(x; y; z; t) = H_0(x; y; z) \cos(\omega t + \varphi)$$

Les calculs se simplifient beaucoup si on

adopte les notations complexes de FRESNEL (*) :

$$h = \mathcal{R} [H e^{j\omega t}] \quad \text{avec } H = H_0 e^{j\varphi} \\ \mathcal{R} [\dots] : \text{partie réelle de } \dots$$

FIG. 34

(*) Ce mode de calcul est employé entre autres par les électriciens pour l'étude des courants alternatifs.

La fonction $H(x, y, z)$ satisfait alors aux équations :

$$\Delta_3 H = 0 : \text{dans le milieu} \quad (3; 4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0 : \text{pour } z = -H_0;$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{m}{K} j \omega H = 0 : \text{pour } z = 0.$$

et aux conditions aux limites en plan déterminant l'excitation de pulsation ω . On résoud ces équations par la méthode classique des fonctions propres, qui se décomposent ici en produit de fonctions :

$$H = \sum_n A(z; n) \cdot B(x; y; n)$$

On déduit de (3,4) :

$$-\frac{A''}{A}(z) = \frac{\Delta_2 B}{B}(x; y) = \lambda^2 (= C^{ste})$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

D'où :

$$A = C \cos(\lambda z + \varphi)$$

$$\Delta_2 B = \lambda^2 B$$

La condition $(\partial H / \partial z) = 0$ pour $z = -H_0$ exige que $\varphi = \lambda H_0$,

d'où :

$$A = C \cos \lambda(z + H_0)$$

La condition à la surface libre exige que :

$$\lambda \sin \lambda H_0 = j \frac{\omega m}{K} \cos \lambda H_0 \quad (3; 5)$$

Cette équation possède une infinité (dénombrable) de solutions complexes : λ_n .

D'où :

$$H = \sum_n \cos \lambda_n(z + H_0) B(x; y; n) \quad (3; 6)$$

Les fonctions $B(x; y; n)$ sont à déterminer à partir des conditions aux limites en plan. Nous

allons étudier de plus près deux cas particuliers importants pour la suite : écoulement plan et écoulement de révolution. Dans ces deux cas, $B(x; y; n)$ est également décomposable en une somme de produits de fonctions orthogonales.

Dans le premier cas :

$$B(x; y; n) \text{ se réduit à } B(x; n)$$

Donc :

$$B'' - \lambda^2 B = 0$$

$$B = E e^{\lambda x} + F e^{-\lambda x}$$

D'où :

$$H = \sum_n \cos \lambda_n(z + H_0) [E_n e^{\lambda_n x} + F_n e^{-\lambda_n x}]$$

Les E_n et F_n sont à déterminer par les conditions aux limites en plan. Soit par exemple :

$$H = H_2(z) \text{ en } x = L$$

$$H = H_1(z) \text{ en } x = 0$$

FIG. 35

On en déduit :

$$H_1(z) = \sum_n \cos \lambda_n(z + H_0) (E_n + F_n)$$

$$H_2(z) = \sum_n \cos \lambda_n(z + H_0) (E_n e^{\lambda_n L} + F_n e^{-\lambda_n L})$$

Le théorème de FOURIER permet de calculer E_n et F_n :

$$E_n + F_n = \frac{\int_{-H_0}^0 H_1(z) \cos \lambda_n(z + H_0) dz}{H_0/2 + [1/(4 \lambda_n)] \sin 2 \lambda_n H_0} = \varphi_1(n)$$

$$E_n e^{\lambda_n L} + F_n e^{-\lambda_n L} = \frac{\int_{-H_0}^0 H_1(z) \cos \lambda_n (z + H_0) dz}{H_0/2 + [1/(4 \lambda_n)] \sin 2 \lambda_n H_0} = \varphi_2(n)$$

D'où finalement :

$$H = \sum_n \cos \lambda_n (z + H_0) \frac{\varphi_1(n) \operatorname{sh} \lambda_n (L - x) + \varphi_2(n) \operatorname{sh} \lambda_n x}{\operatorname{sh} \lambda_n L}$$

On appelle l'expression :

$$H_n = \cos \lambda_n (z + H_0) \frac{\varphi_1(n) \operatorname{sh} \lambda_n (L - x) + \varphi_2(n) \operatorname{sh} \lambda_n x}{\operatorname{sh} \lambda_n L}$$

onde élémentaire d'ordre « n ». H est donc la superposition d'une infinité d'ondes élémentaires.

On peut écrire H_n sous une autre forme :

$$H_n = \cos \lambda_n (z + H_0) \{ \varphi_1(n) [e^{-\lambda x} - e^{-\lambda < x + 2(L-x) >}} - e^{-\lambda < x + 2L >}} \\ + e^{-\lambda < x + 2L + 2(L-x) >}} \pm \dots] + \varphi_2(n) [e^{-\lambda < L-x >}} - e^{-\lambda < L-x + 2x >}} \\ - e^{-\lambda < L-x + 2L >}} + e^{-\lambda < L-x + 2L + 2x >}} \pm \dots] \}$$

Sous cette forme on voit que l'onde φ_1 part de $x=0$, passe au point considéré, se réfléchit sur $x=L$, repasse au point considéré, se réfléchit sur $x=0$, etc. De même pour l'onde φ_2 (voir fig. 35).

On voit donc comment les ondes sont engendrées par les conditions aux limites. L'onde pure sans réflexion est de la forme :

$$H_n = \cos \lambda_n (z + H_0) e^{-\lambda_n x}$$

Physiquement, c'est la seule intéressante, les autres s'en déduisant par des réflexions.

Dans le cas d'un écoulement de révolution :

$$B(x; y; n) \text{ se réduit à } B(\varphi; n)$$

et est donné par :

$$B'' + 1/\varphi B' - \lambda_n^2 B = 0$$

Donc :

$$B = E I_0(\lambda_n \varphi) + F K_0(\lambda_n \varphi)$$

On pourrait faire les mêmes calculs que pour le cas précédent. On trouve finalement qu'il existe aussi ici des ondes pures d'ordre n , mais il y en a de deux sortes : l'une provenant de la limite intérieure, l'autre de la limite extérieure. Dans le cas d'un écoulement plan, il y a une seule espèce d'onde parce que les deux limites jouent exactement le même rôle.

Etudions de plus près les ondes pures. Les nombres $\lambda_n H_0$ sont donnés par l'équation (3,5) que nous pouvons écrire :

$$(\lambda_n H_0) \operatorname{tg}(\lambda_n H_0) = j \frac{\omega m H_0}{K} \quad (3; 7)$$

Les solutions $\lambda_n H_0$ ne sont fonction que du paramètre $\omega m H_0/K$. On peut se faire une idée de ces solutions en traçant le réseau isotherme $Z = z. \operatorname{tg} z$. Ce réseau est schématisé sur la figure 36. On y a tracé en traits pleins quelques courbes sur lesquelles la partie imaginaire de Z est constante et en traits pointillés la courbe sur laquelle la partie réelle est nulle. Les solutions de l'équation en $\lambda_n H_0$ se trouvent évidemment sur cette dernière courbe.

FIG. 36

On voit que la partie réelle de $\lambda_n H_0$ est comprise entre $n\pi$ et $n\pi + \pi/2$.

Dans le cas d'un écoulement plan, l'onde pure d'ordre n est donnée par une expression du genre :

$$H_n = e^{-a_n (x/H_0)} \cdot \cos\left(b_n \frac{x}{H_0}\right) \cdot e^{\pm b_n (z/H_0)} \cdot \cos\left(a_n \frac{z}{H_0}\right)$$

ou :

$$\lambda_n H_0 = a_n + j b_n$$

On voit qu'il y a des ondulations suivant les deux axes Ox et Oz . Entre O et $-H_0$, il y en a une juste « n » (pour l'onde d'ordre « n »). Les ondulations s'éteignent dans le sens ox et ceci

d'autant plus rapidement que n est grand. Pratiquement, $\lambda_{n+1} H_0 - \lambda_n H_0$ est réel et de l'ordre de π .

Le rapport des amortissements de deux ondes d'ordre $n + 1$ et n est donc de l'ordre de :

$$e^{-\pi (x/H_0)}$$

Si les ondes ont une intensité comparable au départ et si on se contente d'une précision de 5 %, on peut négliger les ondes d'ordre supérieur à :

- zéro : à partir de $x \geq H_0$
- un : à partir de $x \geq (1/2) H_0$
- deux : à partir de $x \geq (1/3) H_0$, etc...

A l'aide des formules de développement asymptotiques des fonctions I_0 et K_0 , on vérifie qu'il en est de même dans le cas des écoulements de révolution. D'une façon générale on peut démontrer que le milieu poreux « filtre » les ondes. Pour $x \geq H_0$, on peut en général se contenter de la première onde et écrire :

$$H = \cos \lambda_0 (z + H_0) [E_0 e^{\lambda_0 x} + F_0 e^{\lambda_0 x}]$$

dans le cas des écoulements plans;

et :

$$H = \cos \lambda_0 (z + H_0) B(x; y; 0) \quad (3; 8)$$

avec :

$$\Delta_2 B - \lambda_0^2 B = 0$$

dans le cas général.

On en déduit dans le cas général :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \lambda_0^2 H \quad (3; 9)$$

Vues de cette façon, les ondes d'ordre élevé apparaissent comme des perturbations transitoires rapidement amorties dans l'espace servant à ajuster les conditions aux limites. Le même phénomène a lieu — d'une façon beaucoup plus marquée d'ailleurs — dans le cas de la houle (voir par exemple l'article de MM. BIESEL et SUQUET dans *la Houille Blanche*, n° 4, juillet-août 1951, page 476), et d'une façon générale dans le cas des ondes sans dissipation d'énergie.

D'une façon encore plus intuitive, on peut dire que le phénomène devient à deux dimensions si le point considéré est distant de la limite de la nappe de plusieurs fois l'épaisseur de la nappe. Ceci est un phénomène général et bien connu; il permet de réduire le nombre des dimensions à considérer dans un problème physique donné

et de parler physiquement par exemple de plaques ou de poutres (considérées comme infiniment minces). Il est néanmoins intéressant de pouvoir chiffrer dans chaque cas (comme cela vient d'être fait ici) la distance minimum à respecter à partir des limites.

3-3. — Approximation de Dupuit en régime sinusoïdal.

Étudions d'abord cette approximation dans le cas d'une nappe au repos sur une assise imperméable horizontale. On peut alors la rattacher aisément aux calculs faits au paragraphe 3-2.

D'abord si H_0 est faible, la région $x \leq H_0$ est très petite, donc on n'a pas à se préoccuper des ondes d'ordre plus élevé que zéro. En outre, on peut exprimer facilement λ_0 en fonction de $\omega m H_0 / K$ si ce nombre est petit devant 1.

Dans ce cas, l'équation :

$$(\lambda_0 H_0) \operatorname{tg} (\lambda_0 H_0) = j \frac{\omega m H_0}{K}$$

peut s'écrire :

$$(\lambda_0 H_0)^2 + 1/3 (\lambda_0 H_0)^4 + \dots = j \frac{\omega m H_0}{K}$$

ou :

$$\lambda_0 H_0 = \left(\frac{\omega m H_0}{K} \right)^{1/2} \left[\frac{1+j}{\sqrt{2}} + \frac{1-j}{12} \sqrt{2} \frac{\omega m H_0}{K} + \dots \right]$$

L'approximation de DUPUIT revient justement à admettre que $\omega m H_0 / K$ est petit devant 1 et qu'on peut écrire :

$$\lambda_0 H_0 = \left(\frac{\omega m H_0}{K} \right)^{1/2} \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

L'équation (3; 9) devient alors :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = j \frac{\omega m H_0}{K} H \quad (3; 10)$$

Ceci est l'équation de base des études des nappes dans l'approximation de DUPUIT.

Remarquons que H donne directement la cote de la surface libre en fonction de x et y .

On peut facilement évaluer les erreurs commises en employant cette approximation. Il y en a deux sortes :

- a) Erreurs dues aux ondes d'ordre supérieur; leur ordre de grandeur est $e^{-\pi (x/H_0)}$ en valeur relative;

b) Erreurs dues à l'approximation de la valeur $\lambda_0 H_0$; ils sont de l'ordre de :

$$1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{\omega m H_0}{K} \right)^{3/2} \frac{\sigma}{H_0}}$$

En outre, on néglige en général le facteur :

$$\frac{\cos \lambda_0 (z + H_0)}{\cos \lambda_0 H_0},$$

ce qui revient à l'admettre égal à 1. Il est minimum en $z = -H_0$ et égal à $1/\cos \lambda_0 H_0$.

On peut aussi obtenir l'équation (3;10) par une autre méthode qui consiste à faire, à priori, des hypothèses sur l'écoulement. Nous allons employer cette méthode pour trouver une équation plus générale que (3;10).

Soit une nappe de faible épaisseur coulant sur une assise imperméable (fig. 37).

Pour arriver à l'équation de l'écoulement, compte tenu de l'hypothèse de DUPUIT, nous ferons les hypothèses suivantes :

- 1) La vitesse de l'eau est constante sur chaque verticale;
- 2) Les variations des caractéristiques de la nappe et de l'assise imperméable sont suffisamment petites.

La première hypothèse revient à admettre qu'une fonction analogue à $\cos \lambda_0 (z + H_0)$ est à peu près constante entre la surface libre et le fond de la nappe. La deuxième garantit que les réflexions des ondes dues aux changements de caractéristiques sont faibles.

Moyennant ces hypothèses, nous allons étudier les nappes de faible épaisseur.

Soient :

$H_0(x; y)$: l'épaisseur d'un écoulement non perturbé au point $x; y$ (fig. 4);

$h(x; y; t)$: la différence entre l'épaisseur d'un écoulement perturbé et $H_0(x; y)$;

$U_0; V_0$: vitesse de l'écoulement non perturbé;

$u; v$: (*idem* $\sim h$);

$i_x; i_y$: pente des coupes de l'assise imperméable par des plans parallèles aux plans de coordonnées.

L'équation de continuité est alors :

$$\frac{\partial [(H_0 + h) (U_0 + u)]}{\partial x} + \frac{\partial [(H_0 + h) (V_0 + v)]}{\partial y} + m \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

La loi de DARCY donne :

$$U_0 + u = -K \left[\frac{\partial (H_0 + h)}{\partial x} + i_x \right]$$

$$V_0 + v = -K \left[\frac{\partial (H_0 + h)}{\partial y} + i_y \right]$$

FIG. 37

en tenant compte des équations analogues pour l'écoulement non perturbé et en linéarisant on obtient (si K est constant) :

$$H_0 K \Delta_2 h - \left(U_0 - K \frac{\partial H_0}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} - \left(V_0 - K \frac{\partial H_0}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial y} - h \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) = m \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3; 11)$$

Si $H_0 = C^{ste}$, donc $U_0 = V_0 = 0$, on retombe pour les régimes sinusoïdaux sur l'équation (3; 10).

3-4. — Approximation de Dupuit en général.

Jusqu'ici nous avons supposé que le régime de la nappe variait sinusoïdalement dans le temps. Etudions maintenant des régimes plus complexes.

Si on soumet une nappe à des excitations non sinusoïdales, on peut calculer l'écoulement en décomposant l'excitation en série ou en intégrale de FOURIER. Par transformation de FOURIER inverse, l'équation (3; 10) devient :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{m}{K H_0} \frac{\partial h}{\partial t}$$

qui a été étudiée très en détail par divers auteurs (équation dite « de la chaleur »). L'équation (3; 11) est d'un type un peu plus compliqué.

C'est cette équation que nous allons étudier dans le cas $H_0 = C^{ste}$; $U_0 = C^{ste}$; $V_0 = 0$.

Elle devient alors :

$$H_0 K \Delta_2 h - U_0 \frac{\partial h}{\partial x} = m \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3; 12)$$

Elle donne l'écoulement d'une nappe coulant

uniformément sur une assise imperméable de pente constante et perturbée par une cause quelconque (fig. 38). L'axe Ox est suivant les lignes de plus grande pente; on a évidemment :

$$U_0 = -Ki$$

FIG. 38

Pratiquement, les perturbations les plus intéressantes sont : les pompages et les injections. Nous allons étudier une injection ponctuelle.

L'équation (3; 12) est une équation de la chaleur avec source mobile. On en connaît une solution fondamentale.

$$h_1(x; y; t) = \frac{A}{t} e^{-\frac{[x - (U_0/m)t]^2 + y^2}{4(H_0 K t/m)}}$$

Cette solution satisfait à :

$h = 0$ pour x et $y \rightarrow \infty$, quel que soit t ,

$h = 0$ pour $t = 0$, sauf en $x = y = 0$.

Si on calcule le volume d'eau injecté V en fonction du temps :

$$V(t) = Am \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x; y; t) dx dy$$

on trouve :

$$4 \pi A K H_0$$

Ce volume est constant. La solution :

$$h_1 = \frac{V_0}{4 \pi K H_0 t} \cdot e^{-\frac{[x - (U_0/m)t]^2 + y^2}{4(H_0 K t/m)}}$$

représente donc l'écoulement obtenu par une injection ponctuelle et instantanée d'un volume d'eau V_0 au temps $t = 0$ et au point $x = y = 0$.

Si on injecte un débit Q_0 continu et constant à partir de l'instant $t = 0$, on obtient :

$$h = \int_0^t Q_0 d\theta h_1(t - \theta)$$

Posons $t - \xi = u$, d'où :

$$h = \int_0^t Q_0 h_1(u) du$$

Introduisons des variables sans dimensions :

$$\xi = \frac{U_0 x}{2 H_0 K}; \eta = \frac{U_0 y}{2 H_0 K}; \varphi^2 = \xi^2 + \eta^2$$

$$\tau = \frac{U_0^2 t}{2 H_0 K m}; v = \frac{U_0^2 u}{2 H_0 K m}; \mathcal{H} = \frac{4 \pi K H_0}{Q_0} h$$

On en déduit :

$$\mathcal{H} = \int_0^\tau \frac{dv}{v} e^{-\frac{(\xi-v)^2 + \eta^2}{2v}} = e^\xi \int_0^\tau \frac{dv}{v} e^{-\frac{\varphi^2 + v^2}{2v}}$$

On pose $(v^2 + \varphi^2)/2v = \alpha$, la relation entre α et v est alors schématisée par la courbe de la figure 39.

FIG. 39

$$e^{-\frac{\varphi^2 + v^2}{2v}} \frac{dv}{v} = \pm \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} e^{-\alpha\varphi} \left\{ \begin{array}{l} + : \text{si } v > \varphi \\ - : \text{si } v < \varphi \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\tau < \varphi : \mathcal{H} = e^\xi \int_{1/2(\varphi/\tau + \tau/\varphi)}^\infty \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} e^{-\alpha\varphi}$$

$$\tau = \varphi : \mathcal{H} = e^\xi K_0(\varphi)$$

$$\tau < \varphi : \mathcal{H} = e^\xi \left[K_0(\varphi) + \int_1^{1/2(\varphi/\tau + \tau/\varphi)} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} e^{-\alpha\varphi} \right]$$

$$\tau \rightarrow \infty : \mathcal{H} = 2 e^\xi K_0(\varphi)$$

D'une façon générale, nous écrirons :

$$\mathcal{H} = e^\xi f(\varphi; \tau)$$

Si on fait l'approximation consistant à admettre U_0 négligeable (donc aussi i), on obtient :

$$\mathcal{H} = -\text{Ei} \left(-\frac{\varphi^2}{2\tau} \right)$$

Cette approximation est bonne dans le cas où τ est petit.

On peut facilement évaluer l'ordre de grandeur de l'erreur commise. En effet, pour $(\tau/\varrho) = \varepsilon$ petit, on peut écrire :

$$f(\varrho; \tau) = \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-(\varrho^2/2\tau)u}}{\sqrt{1-(4\varepsilon^2/u^2)}} du$$

En posant $(\varrho^2/2\tau) = \gamma$ et en développant par rapport à ε^2 , on trouve :

$$f(\varrho; \tau) = -\operatorname{Ei}(-\gamma) - \varepsilon^2 \gamma [e^{-\gamma} + \gamma \operatorname{Ei}(-\gamma)]$$

L'erreur relative est donc de l'ordre :

$$\eta \approx \varepsilon^2 \gamma \left[\frac{e^{-\gamma}}{\operatorname{Ei}(-\gamma)} + \gamma \right]$$

L'approximation est donc bonne si ϱ est grand devant τ et si ξ est petit devant 1. Le régime permanent fourni par $\tau \rightarrow \infty$ n'est absolument pas comparable, quelque petit soit i . A partir de $\mathcal{H} = e^{\xi} f(\varrho; \tau)$, on peut tracer les lignes de courant de l'écoulement. $\mathcal{H}$ est une hauteur réduite mesurée à partir du plan $h = ix$. Les vitesses étant fournies par les hauteurs mesurées à partir d'un plan horizontal, nous introduirons la hauteur $h_1 = h - ix$ (le sens des axes est

FIG. 40

défini par la figure 40; sur cette figure, i est positif).

$$h_1 = \frac{Q_0}{4\pi K H_0} e^{\xi} f(\varrho; \tau) - 2 H_0 \xi$$

Posons :

$$\mathcal{H}_1 = h_1 \frac{4\pi K H_0}{Q_0}$$

d'où :

$$\mathcal{H}_1 = e^{\xi} f(\varrho; \tau) - \frac{8\pi K H_0^2}{Q_0} \xi$$

Les lignes $\mathcal{H}_1 = C^{\text{ste}}$ sont orthogonales aux

lignes de courant. La forme du réseau des lignes de courant dépend donc de deux paramètres : τ et $\beta = (8\pi K H_0/Q_0)$. En régime permanent, β seul intervient.

En pratique, β est toujours très grand (au moins de l'ordre de 100). Les formes du réseau d'écoulement sont alors déterminées par des valeurs ξ et η très faibles en général. Considérons par exemple l'écoulement figure 41 représentant

FIG. 41

une injection au point O dans une nappe en écoulement parallèle. La forme de l'ensemble de l'écoulement est déterminée par ce qui se passe au voisinage de O. La distance OP donne une mesure de ce « voisinage ». En P, la vitesse suivant Oξ est nulle et $\varphi = |\xi|$. On en déduit :

$$\mathcal{H}_1 = e^{\xi} K_0(\xi) - \beta \xi$$

$$(\partial \mathcal{H}_1 / \partial \xi) = 0 \text{ donne } e^{\xi} [K_0(\xi) - K_1(\xi)] = \beta$$

Or, si β est grand, la solution ξ de cette dernière équation est forcément petite, donc :

$$e^{\xi} \approx 1; \quad K_0(\xi) \text{ négligeable devant } K_1(\xi)$$

$$\text{et : } K_1(\xi) \approx 1/\xi.$$

$$\text{On en déduit : } OP \approx 1/\beta.$$

Par ailleurs, tant que ξ et φ sont de l'ordre de quelques $1/\beta$ seulement, on a :

$$K_0(\varrho) \approx -\log \varrho \text{ et } e^{\xi} \approx 1$$

Les formes des lignes de courant sont donc les mêmes que celles du réseau $\mathcal{H} = -\log \varrho - \beta \xi$. Ce réseau est isotherme et dérive du champ à potentiel : $Z = \beta z + \log z$ ($z = \xi + j\eta$). On se rend aisément compte que si le réseau des lignes de courant est déterminé pour les faibles valeurs de φ et de ξ , il l'est également pour les grandes.

Le réseau entier de courant a donc pratiquement la forme d'un réseau isotherme. Il n'en est pas du tout de même pour la graduation des lignes d'égale hauteur $\mathcal{H}$. Sur l'axe Oη par exemple, $\mathcal{H}$ croît dans un cas comme $-\log \eta$, dans

l'autre comme $K_0(\eta)$. Or, si $\eta \rightarrow \infty : \log \eta \rightarrow -\infty$ et $K_0(\eta) \rightarrow 0$ (fig. 42).

Pour les grandes valeurs de η , l'erreur devient de plus en plus grande et tend vers l'infini.

FIG. 42

On peut également comparer l'écoulement que nous venons d'étudier à l'écoulement sur une assise imperméable horizontale (fig. 43).

FIG. 43

Dans ce cas on a (sans linéarisation) :

$$\frac{\partial (H U)}{\partial x} + \frac{\partial (H V)}{\partial y} = 0 : \text{continuité.}$$

$$\left. \begin{aligned} U &= -K \frac{\partial H}{\partial x} \\ V &= -K \frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned} \right\} \text{loi de DARCY}$$

Donc :

$$\Delta (H^2) = 0$$

Les écoulements de ce type sont donnés par des réseaux isothermes gradués en H^2 . Les lignes de courant sont celles du réseau isotherme; par contre, les valeurs absolues des vitesses ne sont pas données par la graduation des équipotentiels, mais sont en plus fonction de la hauteur locale de H .

Finalement, il semble donc bien que les réseaux isothermes donnent dans tous les cas une image très bonne des lignes de courant *en régime permanent*. Par contre, la cotation des lignes $\mathcal{H} = C^{\text{ste}}$ donnée par ces réseaux est en général fautive. En plus, cette schématisation n'a pas de sens en régime transitoire.

Jusqu'à présent nous avons admis la nappe illimitée de tous les côtés. Pratiquement elle est toujours limitée. Nous allons étudier quelques cas de nappes limitées.

Si la nappe est limitée par une paroi verticale (ou simplement dont la pente est beaucoup plus grande que i), le flux d'eau à travers une telle paroi est nulle. Pour faire apparaître les flux, on peut écrire l'équation (3; 12) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H_0 K \frac{\partial h}{\partial x} - U_0 h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H_0 K \frac{\partial h}{\partial y} \right) = m \frac{\partial h}{\partial t}$$

ou :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} - \mathcal{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau}$$

Les expressions entre parenthèses sont manifestement les flux supplémentaires dus à la perturbation de l'écoulement. Soit un écoulement avec un puits à l'origine de coordonnées et une paroi rectiligne dont l'équation est :

$$\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha = d \quad (\text{fig. 44}).$$

FIG. 44

Le flux perpendiculairement à cette paroi est :

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} - \mathcal{H} \right) \cos \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \sin \alpha$$

Le problème est donc le suivant :

On cherche une fonction $\mathcal{H}$ satisfaisant à :

$$\Delta^2 \mathcal{H} - 2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = 2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau}$$

dans un demi-plan et à la condition :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \cos \alpha + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \sin \alpha = 2 \mathcal{H} \cos \alpha$$

sur la droite $D : \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha = d$

limitant ce demi-plan, et qui en plus se comporte à l'origine comme le puits étudié précédemment, c'est-à-dire comme :

$$\mathcal{H} = e^{\xi} f(\varphi; \tau)$$

Pour résoudre ce problème, nous introduirons deux nouveaux systèmes d'axes, comme le montre la figure 45.

FIG. 45

D'où la condition $(\partial \mathcal{H} / \partial \nu) - 2 \mathcal{H} \cos \alpha = 0$ sur la droite D : $\nu = 0$.

Posons :

$$\Phi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu} - 2 \mathcal{H} \cos \alpha$$

Φ satisfait alors à l'équation :

$$\Delta_2 \Phi - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau};$$

à la condition $\Phi = 0$ sur $\nu = 0$

et, au point $\eta = \xi = 0$ (puits), à :

$$\Phi = \Phi_1 = \left(\frac{\partial}{\partial \nu} - 2 \cos \alpha \right) [e^{\xi} f(\varphi; \tau)]$$

La solution de ce problème est donc la somme de Φ_1 et de son image par rapport à D. Cette image est visiblement :

$$\Phi_2 = - \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + 2 \cos \alpha \right) [e^{\xi_1} f(\varphi_1; \tau)]$$

La solution en $\mathcal{H}$ du problème est donnée par :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu} - 2 \mathcal{H} \cos \alpha = \Phi_1 + \Phi_2$$

On peut décomposer $\mathcal{H}$ et écrire :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$$

où $\mathcal{H}_1$ satisfait à :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \nu} - 2 \mathcal{H}_1 \cos \alpha = \Phi_1$$

et $\mathcal{H}_2$ à :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \nu} - 2 \mathcal{H}_2 \cos \alpha = \Phi_2$$

On a évidemment :

$$\mathcal{H}_1 = e^{\xi} f(\varphi; \tau)$$

$\mathcal{H}_2$ est donnée par une équation différentielle linéaire. On peut facilement expliciter $\mathcal{H}_2$ sous forme d'une intégrale portant sur $e^{\xi_1} f(\varphi_1; \tau)$.

FIG. 46

FIG. 47

Pour abréger les écritures, nous étudierons par la suite le cas $\alpha = 0$. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \xi} - 2 \mathcal{H}_2 &= - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + 2 \right) [e^{2d-\xi} \cdot f(\rho_1; \tau)] \\ &= - e^{2d-\xi} \left[f(\rho_1; \tau) + f'_{\rho_1}(\rho_1; \tau) \frac{\xi - 2d}{\rho_1} \right] \end{aligned}$$

La méthode classique de résolution donne :

$$\mathcal{H}_2 = - e^{2\xi+2d} \int_C^\xi e^{-3v} \left[f(\rho_2; \tau) + f'_{\rho_2}(\rho_2; \tau) \frac{\partial \rho_2}{\partial v} \right] dv$$

avec :

$$\rho_2^{2v} = \eta^2 + (v - 2d)^2$$

Comme :

$$\mathcal{H}_2 \rightarrow 0 \quad \text{si } \xi \rightarrow \infty, \quad \text{on a : } C = -\infty$$

On peut écrire cette dernière intégrale :

$$\int_{-\infty}^\xi e^{-3v} e^v [f(\rho_2; \tau) + f'_{\rho_2}(\rho_2; \tau)] dv$$

FIG. 48 a

FIG. 48 c

En intégrant par partie, on obtient :

$$\mathcal{H}_2 = - e^{2d-\xi} \left[f(\rho_1; \tau) + 4 e^{3\xi} \int_{-\infty}^\xi e^{-3v} f(\rho_2; \tau) dv \right]$$

Si τ est petit devant ρ , le deuxième terme est négligeable. On trouve alors :

$$\mathcal{H}_2 \approx - e^{2d-\xi} \cdot f(\rho_1; \tau)$$

Dans le cas $\alpha \neq 0$, ce deuxième terme est encore plus négligeable; pour $\alpha = (\pi/2)$ il est absolument nul.

$$\mathcal{H}_2 = - e^{2d-\xi} \cdot f(\rho_1; \tau)$$

représente l'image au sens habituel de :

$$\mathcal{H}_1 = e^\xi \cdot f(\rho_1; \tau)$$

Résumons le calcul que nous venons d'exposer :

La présence d'une paroi imposait à $\mathcal{H}$ une

FIG. 48 b

FIG. 48 d

condition du type mixte; pour résoudre le problème il a suffi de changer de fonction pour se ramener à une condition $\Phi = 0$ sur la paroi. On trouve que la solution en $\mathcal{H}$ contient une image « un peu déformée » du puits par rapport à la paroi. La méthode employée ici est générale ainsi que le résultat trouvé.

Les problèmes de paroi introduisent donc des images, c'est-à-dire des combinaisons de singularités. D'une façon plus générale, on peut étudier d'autres combinaisons de singularités.

Ainsi l'écoulement d'une source dans une bande (fig. 46) s'obtient en considérant une infinité de singularités situées sur une droite perpendiculaire aux bords de la bande. De même on peut obtenir des écoulements autour d'obstacles (exemple fig. 47). On peut aussi étudier des doublets constitués de plusieurs sources et puits infiniment voisins. Ainsi :

$$\mathcal{H} = e^{-\xi} \xi K_1(\rho) - \beta \xi$$

est un écoulement permanent de ce genre. On se rend compte de la multiplicité des cas de figures en ne discutant que le cas de deux sources simples (fig. 48).

D'une façon générale, les remarques faites au sujet de la schématisation des écoulements permanents par des réseaux d'isothermes restent pratiquement valables dans tous ces cas.

3-5. — Discussion physique des hypothèses et résultats du paragraphe 34.

Au paragraphe 34, nous n'avons pas approfondi les discussions soulevées par l'approximation de DUPUIT, et ceci pour alléger le texte qui contient de nombreux calculs. Nous allons maintenant discuter les différents points importants suivants :

- a) Influence de la courbure de la surface libre, obstacles et irrégularités locales de la nappe;
- b) Conditions aux limites;
- c) Régimes non sinusoïdaux.

Nous avons vu que la solution exacte d'un problème d'écoulement en milieu poreux était donnée par la résolution d'un ensemble d'équations et de conditions aux limites très compliqué à résoudre. Cette résolution étant difficile, on peut penser exprimer la solution au moyen d'une série. M. FRIEDERICH [6] a montré (à propos des écoulements à surface libre) comment on pou-

vait former une série en fonction de la courbure de la surface libre. Sa méthode peut être adaptée à notre cas. On voit (comme dans le cas des écoulements à surface libre) que le premier terme du développement est précisément la solution du problème posé en faisant l'hypothèse de DUPUIT. Des calculs de ce genre ont d'ailleurs été faits par plusieurs chercheurs à la suite des travaux originaux de BOUSSINESQ [7]. La deuxième approximation (ou le deuxième terme de la série) fournit l'approximation dite des « ondes cnoïdales ».

Dans le cas des milieux poreux, M. JAEGER [4] a trouvé une méthode très intéressante et très simple pour trouver la deuxième approximation. Signalons d'ailleurs que différentes méthodes mènent à des résultats un peu différents. Nous ne voulons pas entrer ici dans le détail de ces résultats très intéressants mais seulement rappeler que l'approximation de DUPUIT n'est valable que tant que la courbure de la surface libre reste faible, de même d'ailleurs que sa pente (ce dernier point aussi à cause de la linéarisation qui a fait supprimer un terme en i^2).

Quand on résout un problème à l'aide de l'approximation de DUPUIT, deux cas peuvent se présenter :

- 1) La solution trouvée contient des parties pour lesquelles la courbure de la surface n'est pas négligeable;
- 2) La courbure de la surface libre est partout négligeable.

Seuls les cas de la première espèce posent un problème. Il est bon de les connaître à priori. Pour cela, il faut faire appel à l'ensemble des connaissances existantes. Rappelons que (contrairement à ce qui se passe pour les écoulements à l'air libre), la surface libre ne peut que s'abaisser le long des filets fluides et par ailleurs toutes les ondulations ont tendance à disparaître, le milieu étant fortement filtrant. Les fortes courbures ne peuvent donc apparaître qu'au voisinage des limites ou des variations rapides de l'assise imperméable. On peut étudier certains de ces cas, en particulier ceux où l'écoulement est plan (dans des sections verticales). Nous reviendrons sur ce sujet dans un autre article. Les zones de variations rapides de l'assise imperméable peuvent être exclues du domaine des nappes par des frontières (fig. 49).

Ces zones doivent être étudiées à trois dimensions.

S'il est licite de linéariser les équations indéfinies, il est tout aussi licite d'appliquer des conditions aux limites linéaires pour peu qu'on admette comme limite une frontière fictive dis-

FIG. 49

tante de quelques fois l'épaisseur de la nappe de la frontière réelle. Les conditions à la limite possèdent alors la forme :

$$\frac{\partial H}{\partial n} + kH = 0$$

Ainsi par exemple dans le cas de la rencontre d'une nappe avec un plan d'eau à l'air libre plusieurs cas peuvent se présenter (fig. 50).

Il est physiquement clair que le coefficient k dépend essentiellement de la dénivellation entre la nappe au loin et le plan d'eau de la rivière, rapportée à l'épaisseur de la nappe. Plus cette dénivellation est grande en valeur absolue, plus k est petit.

Dans le cas C on a $k = \infty$, c'est-à-dire la condition à la limite devient :

$$H = 0$$

En ce qui concerne les écoulements non sinusoïdaux, on peut les décomposer en série ou intégrale de FOURIER. On voit alors facilement que les écoulements sont bien représentés quand

les variations sont lentes, ils sont par contre très mal représentés quand les variations sont rapides. Néanmoins, comme le milieu poreux est « filtrant » par rapport aux ondes sinusoïdales

FIG. 50

et qu'il arrête les ondes rapides, les erreurs commises sont en général peu importantes, sauf au voisinage des limites. Nous verrons ce point plus en détail dans le prochain paragraphe.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] POLUBARINOVA KOTCHINA. — Полубаринова - Кочина-Теория Движения Грунтовых Вод" Gostekhizdat, Moscou (1952).
- [2] MUSKAT. — « The flow of homogeneous Fluids through porous media ». J. W. EDWARDS Inc. Ann Arbor Michigan (1946).
- [3] TISON. — « Cours d'hydraulique », 2^e partie, Gand, 1950.
- [4] JAEGER. — « Hydraulique technique » (traduction de Mme M. LARONDE). Dunod, 1954, Paris.
- [5] JAHNKE-EMDE. — « Tables of Functions ». Dover Publications (1945), New-York.
- [6] FRIEDRICHS. — Appendice intitulé « On the Derivation of the Shallow Water Theory » à l'article : « The formation of Breakers and Bores » de Mr. J. STOKER dans Communications on Applied Mathematics, vol. 1, n° 1, pp. 81 et suivantes.
- [7] BOUSSINESQ. — « Essai sur la théorie des eaux courantes » dans les « Mémoires présentés à l'Académie des Sciences », Sciences mathématiques et physiques. Tome 23^e, pp. 252 et suivantes. Imprimerie Nationale, Paris (1877).
- [8] FRITZ JOHN. — « Waves in the presence of an inclined barrier » publié dans Communications on Applied Mathematics, vol. 1, n° 2. pp. 149 et suivantes.