LES PHÉNOMÈNES DU SECOND ORDRE RAYONNANTS DANS LES ONDES DE GRAVITÉ

PAR F. BIESEL *

1. Exposé préliminaire

Nous exposons ici les grandes lignes des idées physiques qui se dégagent des calculs détaillés plus loin. Cette première partie énonce donc certains résultats sans les démontrer.

Beaucoup de travaux antérieurs, trop nombreux pour être tous cités, ont traité de la solution des équations non linéaires des ondes de gravité; les notions de termes ou phénomènes du « premier ordre », du « second ordre », etc., sont donc trop connues pour qu'il soit nécessaire que nous les définissions à nouveau; la suite des calculs précisera d'ailleurs sans ambiguïté toutes les nuances nécessaires.

Les solutions du premier ordre rendent compte des phénomènes réels d'une façon déjà remarquable, mais les termes du second ordre apportent des modifications dont l'ordre de grandeur est loin d'être négligeable au point de vue pratique. L'intérêt technologique des termes du troisième ordre, ou au-delà, n'apparaît pas actuellement avec autant d'évidence, sauf peut-être en ce qui concerne la modification de vitesse de propagation, que leur prise en compte permet d'établir. De toute façon, nous nous limiterons ici au second ordre et ne discuterons pas plus avant l'intérêt des termes d'ordre supérieur.

Les modifications apportées par les termes du second ordre, ou, si l'on préfère, les « phénomènes

du second ordre », peuvent se répartir en deux groupes : les phénomènes liés et les phénomènes rayonnants (*).

Les premiers sont ceux qui restent en quelque sorte liés à la configuration des phénomènes du premier ordre; l'exemple le plus caractéristique est la différence de forme entre les crêtes et les creux des houles, les termes du second ordre rendant celles-là plus « pointues » que ceux-ci. On sait, en effet, que pour une houle cylindrique régulière, la première approximation de la forme du profil (dans le plan du mouvement) est donnée par une sinusoïde de longueur d'onde L , tandis que les termes du second ordre apparaissent sous la forme d'une sinusoïde additionnelle de longueur d'onde $L/2$ se déplaçant avec la première de façon que ses crêtes restent calées sur les crêtes et les creux de celle-ci. Ce déplacement se fait ainsi à la vitesse correspondant normalement à une onde « libre » de longueur L et non à une onde de longueur $L/2$; c'est en ce sens que nous disons que cette déformation est « liée » au profil fondamental du premier ordre.

Un autre exemple relatif aux houles cylindriques irrégulières est celui des « ondes d'accompagnement » du second ordre [1] liées cette fois-ci aux « trains » de houle définis par les termes du premier ordre.

On pourrait également citer la surélévation du niveau moyen et le transport de masse qui (distingués des déplacements dus aux ondes d'accompa-

* Directeur Scientifique de la Société Grenobloise d'Etudes et d'Applications Hydrauliques (SOGREAH) Grenoble, France.

(*) Il faudrait dire plus rigoureusement phénomènes du second ordre liés et phénomènes du second ordre rayonnants mais dans ce qui suit nous abrègerons systématiquement ces expressions en sous-entendant « du second ordre ».

gnement dans le cas des houles irrégulières) sont liés aux amplitudes locales des phénomènes du premier ordre.

Les phénomènes rayonnants sont ceux qui se traduisent par une véritable « émission » d'ondes du second ordre se propageant « librement », c'est-à-dire dont les célérités, longueurs d'onde et fréquences satisfont aux relations valables en l'absence de tout autre phénomène. Elles se superposent ainsi purement et simplement au mouvement du premier ordre et rayonnent indépendamment de celui-ci, jusqu'à l'infini ou jusqu'aux obstacles limitant le plan d'eau étudié.

Les phénomènes rayonnants consistent donc en l'émission d'ondes de gravité libres et par conséquent en une radiation d'énergie. Au contraire les phénomènes liés ne peuvent transporter de l'énergie d'une façon indépendante, tout au plus modifient-ils l'énergie transmise par les phénomènes du premier ordre.

Cette remarque laisse pressentir que les combinaisons ou superpositions de phénomènes liés ne pourront avoir un phénomène rayonnant pour résultante. Par contre, des combinaisons de phénomènes rayonnants pourront par interférence conduire à une annulation du rayonnement résultant et par conséquent ne laisser subsister que des phénomènes du type lié. Supposons par exemple que, dans un canal, on ait deux sources S_1 et S_2 , émettant chacune vers la gauche et vers la droite, des ondes libres de fréquences, amplitudes et phases identiques (fig. 1), et soit $L/2$ la distance de ces deux sources, (L étant la longueur d'onde émise). Il y aura alors une perturbation entre S_1 et S_2 et peut-être aussi de part et d'autre de ce segment, mais il n'y aura pas de rayonnement émis au total (*). Cet « exemple » n'est donné que pour mieux faire comprendre la nature des phénomènes d'interférence qui peuvent se produire; il n'a évidemment pas le caractère d'une démonstration rigoureuse qui ne peut être trouvée que dans l'analyse mathématique complète des phénomènes.

Ces considérations ne sont pas des considérations

(*) Ce raisonnement suppose implicitement que la présence de chaque « source » ne perturbe nullement les ondes émises par l'autre source. On peut se demander si des sources satisfaisant à cette condition sont physiquement réalisables. Il est bien certain par exemple que ce ne pourrait être des « volets » à houle ordinaires. En fait, on peut imaginer plusieurs sources satisfaisant à cette condition. Un seul exemple suffira, c'est celui des ondes créées par une fluctuation localisée de la pression en surface. Les mouvements cylindriques créés par plusieurs sources de ce genre se superposent purement et simplement à des perturbations d'ordre de grandeur négligeable près (du quatrième ordre pour des phénomènes composants du deuxième ordre). Nous aurons l'occasion d'étudier ce mode de génération dans la suite de cette note.

philosophiques accessoires mais sont essentielles à la compréhension profonde des phénomènes que nous allons étudier. Nous montrons en effet plus loin que les phénomènes du second ordre peuvent être considérés comme résultant de la superposition de phénomènes liés et de phénomènes rayonnants provenant de tous les points du plan d'eau intéressé par le mouvement. Il semblerait donc, *a priori*, que les phénomènes rayonnants devraient être extrêmement courants; or, dans presque tous les cas où les équations du second ordre ont été établies, aucun phénomène rayonnant n'est apparu. L'explication de ce paradoxe est que ces cas sont en réalité très particuliers et se trouvent être tels que l'interférence mutuelle détruit tous les phénomènes rayonnants (*).

Considérons par exemple une houle cylindrique régulière (monochromatique), de période T , en profondeur constante sur un plan d'eau indéfini. Les mouvements rayonnants du second ordre résulteront de la superposition d'ondes infiniment petites, émises de tous les points du plan d'eau. Ces ondes auront des périodes $T/2$ et des phases liées à celles du mouvement du premier ordre; il en résultera par suite de l'inégalité de longueur des ondes de fréquence T et $T/2$, une annulation par interférence de ces phénomènes rayonnants.

Ce résultat est d'ailleurs satisfaisant pour l'esprit car, ainsi que nous l'avons remarqué plus haut, les phénomènes rayonnants correspondent à une émission d'énergie et il eût été choquant qu'une houle régulière puisse se propager sans modification, tout en « émettant » constamment de l'énergie.

Ces remarques peuvent donner à penser que lorsque des ondes liquides auront un caractère régulier et « sans histoire », les phénomènes rayonnants seront inexistantes ou peu importants, mais que, par contre, il sera possible que ceux-ci se manifestent avec une certaine intensité lorsqu'il « arrivera quelque chose » à la houle. Que peut-il « arriver » à une houle?... Eh bien, par exemple, elle peut rencontrer un obstacle et « diffracter », rencontrer une plage et se briser, elle peut aussi se réfracter plus ou moins fortement sur des fonds variables ou encore tout simplement être engendrée par un batteur. Le calcul au second ordre de tels cas, à l'exception du dernier (**), n'a jamais été effectué; toutefois l'observation montre bien la possibilité d'émission de « phénomènes rayonnants ». Rappelons quelques exemples bien connus :

La diffraction autour d'une jetée d'une houle régulière s'accompagne d'une émission d'ondes de fréquence double bien visibles (fig. 2) qui semblent provenir d'un point situé au voisinage de l'extrémité de la jetée. Ces ondes produisent parfois une agitation non négligeable et il peut être nécessaire d'en tenir compte dans la disposition des ouvrages d'un port.

Leur fréquence double de celle des ondes incidentes laisse présager qu'elles sont bien un phénomène du second ordre.

Lorsqu'une houle, irrégulière cette fois, se brise

(*) La seule exception que nous connaissons dans la littérature actuelle, étant le cas étudié par M. Fontanet dans sa thèse [2].

(**) Thèse de M. P. Fontanet déjà citée et sur laquelle nous reviendrons plus loin.

sur une plage, on observe que des ondes longues, dont la fréquence correspond à celle des trains de houle, semblent repartir vers le large [3]. Ces « surf beats » sont aussi probablement des phénomènes du second ordre.

Enfin, dans certains cas de réfraction, on peut observer la naissance d'ondes de fréquence double des ondes incidentes, analogues à celles mentionnées plus haut pour la diffraction (fig. 3). Il est sans doute également possible que des « surf beats » naissent d'une simple réfraction d'ondes irrégulières, mais probablement d'une façon beaucoup moins intense qu'au cours des déferlements; leur nom reste donc bien approprié.

Ces quelques exemples montrent que les phénomènes du second ordre rayonnants ont une importance pratique non négligeable; malheureusement, ils n'ont guère été étudiés théoriquement jusqu'ici. Les formules faisant l'objet de cet article permettent de combler cette lacune au besoin à l'aide d'intégrations numériques relativement faciles à programmer sur une calculatrice électronique.

Ces formules, utilisées dans leur totalité, permettent également le calcul complet (éventuellement par intégration numérique) des termes du deuxième ordre « liés » pour des configurations de houle très générales; cependant cette possibilité ne sera pas

2/

3/

utilisée systématiquement ici, car, dans la plupart des cas que nous étudierons, notre attention sera uniquement axée sur les phénomènes du second ordre rayonnants.

2. Formules générales

Notations et hypothèses fondamentales.

Le fluide étudié est un liquide homogène, pesant, parfait et incompressible. Le système d'axes utilisé est un système tri-orthogonal Ox, Oy, Oz . Oz est vertical dirigé vers le haut et le plan xOy est choisi de façon que les ordonnées $z = \zeta(x, y, t)$ de la surface libre soient des infiniment petits du premier ordre au plus.

Ceci n'est évidemment possible que si les variations de ζ sont elles-mêmes des infiniment petits du premier ordre, ce que nous posons par hypothèse. Le choix de la cote du plan xOy est donc

arbitraire, à des termes du premier ordre près; cependant, en lui donnant une position telle que les fluctuations positives de ζ aient une amplitude comparable à celle des fluctuations négatives, on rendra vraisemblablement minimales les erreurs dues aux termes d'ordre supérieur au second que nous négligerons. Sans une étude critique de ces termes, il n'est pas possible de donner de recommandations plus précises sur le meilleur choix de la cote du plan xOy .

Suivant un procédé très classique, nous utiliserons un infiniment petit du premier ordre « b », en dehors duquel toutes les autres quantités et fonctions seront considérées comme finies (d'ordre zéro), ainsi que toutes les dérivées utilisées et nous poserons :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z, t) &= b\varphi_1(x, y, z, t) + b^2\varphi_2(x, y, z, t) \\ \zeta(x, y, t) &= b\zeta_1(x, y, t) + b^2\zeta_2(x, y, t) \\ q(x, y, t) &= bq_1(x, y, t) + b^2q_2(x, y, t)\end{aligned}\quad (1)$$

φ étant le potentiel des vitesses que nous supposons provisoirement exister, ζ la cote de la surface libre et q la pression sur la surface libre, pression que nous ne supposerons pas toujours constante par la suite.

Il en découle, avec des notations évidentes ou très courantes (où nous n'explicitons pas les variables x, y, z, t).

$$V = \text{grad } \varphi = b \text{ grad } \varphi_1 + b^2 \text{ grad } \varphi_2 = bV_1 + b^2V_2 \quad (2)$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = b \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = bu_1 + b^2u_2$$

et ainsi de suite pour les autres composantes $v = (\partial \varphi / \partial y)$ et $w = (\partial \varphi / \partial z)$ de la vitesse.

Il est connu, et les formules suivantes le confirmeront, que ces hypothèses permettent de satisfaire aux équations du mouvement en ne négligeant que des quantités d'ordre supérieur au second.

Parmi d'autres résultats connus, que nous n'établirons pas à nouveau ici (ils ressortent d'ailleurs facilement de l'examen des formules) nous rappellerons les suivants :

Si l'on se contente des équations du premier ordre, il est possible de « superposer » deux (ou un nombre quelconque) de mouvements par simple addition des potentiels, des vitesses, des dénivelées, des fluctuations de pression, etc. Ceci n'est plus vrai si l'on s'inquiète des termes du second ordre, car la « superposition » de deux mouvements dont l'amplitude est du premier ordre, s'accompagne de phénomènes d'interaction du second ordre. Ce sont en fait des « termes rectangles » c'est-à-dire que si b est l'infiniment petit fondamental d'un des mouvements et b' celui de l'autre mouvement, les équations du second ordre doivent tenir compte de termes nouveaux en bb' .

Par contre, on peut superposer à tout mouvement du premier ordre n'importe quel mouvement du second ordre, sans créer de termes rectangles d'ordre inférieur au troisième.

Un tel mouvement du « second ordre » aura un infiniment petit principal, b' par exemple, du second ordre et il est clair qu'à l'approximation recherchée on négligera les termes en b'^2 . Les équations pro-

pres à ce mouvement auront donc la forme simple des équations du premier ordre.

Ces remarques s'étendent aussi à la superposition de mouvements rotationnels, si bien que si l'on ne s'intéresse qu'à des mouvements peu rotationnels (comme c'est le cas le plus souvent de la houle en mer), il suffit de se limiter à l'étude des mouvements irrotationnels puisque l'on pourra généraliser immédiatement les résultats obtenus, par la superposition d'un mouvement rotationnel quelconque, du second ordre et satisfaisant bien entendu, pris isolément, aux équations de l'hydrodynamique.

Dans le cas particulier de la houle périodique, plane, régulière (monochromatique), unidirectionnelle, ceci permet d'affirmer que l'on peut avoir un rotationnel du second ordre fonction arbitraire de la profondeur dans le cadre des équations du second ordre (ce résultat a été d'ailleurs étendu, dans des conditions très larges, au cas des équations exactes, par Mme Dubreuil-Jacotin [4]).

C'est en conséquence de la remarque précédente que nous avons pu nous limiter ici à l'étude de mouvements irrotationnels. De plus, nous utiliserons les variables d'Euler, ce qui nous permettra de satisfaire aux conditions d'irrotationnalité (donc d'intégrabilité dynamique) et d'incompressibilité par l'introduction d'un potentiel des vitesses $\varphi(x, y, z, t)$ satisfaisant à :

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

Equations dynamiques

Compte tenu de l'introduction du potentiel défini ci-dessus, on sait que l'équation dynamique au sein du liquide est satisfaite par la répartition de pression :

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \quad (4)$$

p n'est d'ailleurs défini par cette relation qu'à une fonction additive du temps près. Nous supposerons que cette fonction (intégrée) est systématiquement incorporée dans φ , ce qui justifie la forme ci-dessus.

Il ne reste donc à exprimer que la condition de pression en surface, et pour cela nous admettrons provisoirement que cette pression n'est pas constante, mais est une fonction donnée $q(x, y, t)$ ($q = bq_1 + b^2q_2$ bien entendu). Cette condition s'écrit donc :

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{V^2}{2} - gz = \frac{q}{\rho} \quad (\text{pour } z = \zeta) \quad (5)$$

A l'ordre d'approximation choisi, cette condition peut également s'écrire :

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \zeta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial z} - \frac{V^2}{2} - g\zeta = \frac{q}{\rho} \quad (\text{pour } z = 0) \quad (6)$$

ce qui, en introduisant les expressions du type (1) et (2), devient :

$$\begin{aligned}\left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - g\zeta_1 \right) b + \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - g\zeta_2 - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial z} - \frac{V_1^2}{2} \right) b^2 \\ = \frac{q_1}{\rho} b + \frac{q_2}{\rho} b^2 \quad (\text{pour } z = 0)\end{aligned} \quad (7)$$

soit, en égalant les coefficients de b et de b^2 :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + g\zeta_1 = -\frac{q_1}{\rho} \quad (\text{pour } z = 0) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g\zeta_2 = -\frac{q_2}{\rho} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial z} - \frac{V_1^2}{2} \quad (\text{pour } z = 0) \quad (9)$$

Équation de continuité.

La condition :

$$\Delta \varphi = 0$$

équivalente à :

$$\Delta \varphi_1 = 0 \quad \Delta \varphi_2 = 0 \quad (10)$$

satisfait l'équation de continuité (incompressibilité) dans le sein du liquide.

En ce que concerne la surface libre, nous devons exprimer que c'est une « surface fluide », autrement dit que les particules qui sont sur la surface libre $z = \zeta(x, y, t)$ y restent en cours du mouvement. Il suffit d'exprimer que, pour une telle particule, $\zeta(x, y, t) - z$ ne varie pas (reste nul) au cours du mouvement, ce qui peut s'écrire :

$$\frac{D}{Dt} [\zeta(x, y, t) - z] = 0 \quad (\text{pour } z = \zeta) \quad (11)$$

D/Dt désignant, comme c'est l'usage, la dérivée liée à une particule :

$$\left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Cette condition s'exprime donc par :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} - w = 0 \quad (\text{pour } z = \zeta) \quad (12)$$

soit, comme précédemment :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} - w - \zeta \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{pour } z = 0) \quad (13)$$

Ce qui, en introduisant les développements en b , donne :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} - w_1 \right) b + \\ & + \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} - w_2 + u_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} - \zeta_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) b^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{pour } z = 0) \quad (14)$$

soit :

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} - w_1 = 0 \quad (\text{pour } z = 0) \quad (15)$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} - w_2 = \zeta_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} - u_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} \quad (\text{pour } z = 0) \quad (16)$$

Pour mémoire, rappelons que les conditions sur les parois fixes sont :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0$$

les dérivées étant prises suivant la normale aux parois.

Conditions à la surface libre pour φ .

Il est possible d'éliminer ζ des équations (15), (16), (8) et (9) en dérivant ces deux dernières par rapport au temps.

Il en résulte après des transformations et des regroupements que nous ne reproduisons pas en détail ici, les conditions :

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial q_1}{\partial z} \quad (\text{pour } z = 0) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = & \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{q_1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \\ & - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial t} (V_1^2) \quad (\text{pour } z = 0) \end{aligned} \quad (18)$$

Limitons-nous tout d'abord au premier ordre d'approximation. Nous sommes là dans un domaine bien connu et nous savons que l'équation (17), jointe à des conditions aux limites et à l'infini convenables, permet de déterminer le mouvement. Celui-ci consiste en ondes de gravité qui proviennent de l'infini, ou qui sont produites par des mouvements de parois, par des fluctuations de la pression q_1 en surface, etc.

En définitive, même lorsqu'on pousse l'approximation jusqu'au deuxième ordre, les termes du premier ordre satisfont exactement aux mêmes équations que si le second ordre était définitivement ignoré. Il est donc légitime de résoudre les problèmes du second ordre en deux étapes dont la première est parfaitement indépendante de la seconde. Cette première étape consiste à calculer la solution du premier ordre, la seconde étape étant en quelque sorte le calcul d'une « correction » du second ordre.

Les équations (17) et (18) montrent de plus que les termes du premier et du deuxième ordre sont régis par des équations de même forme (les diverses conditions aux limites étant également en pratique de formes comparables). La détermination des termes du second ordre n'offre donc pas plus de difficultés profondes que celles des termes du premier ordre.

Cependant il importe de souligner l'existence d'une différence importante dans le cas où la pression en surface est constante (c'est-à-dire nulle, grâce au choix d'une origine convenable de l'échelle des pressions). On a alors $q_1 = q_2 = 0$, et les équations (17) et (18) deviennent :

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad (\text{pour } z = 0) \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) - \frac{\partial V_1^2}{\partial t} \quad (\text{pour } z = 0) \quad (20)$$

On voit que le second membre n'a disparu que pour les termes du premier ordre. Physiquement, cela signifie que les phénomènes du premier ordre seront des ondes libres (pression constante en surface) tandis que les phénomènes du second ordre seront une combinaison d'ondes « forcées » (c'est-à-dire « causées » par les fluctuations de pression

imposées à la surface libre) et d'ondes libres satisfaisant à l'équation sans second membre.

Les ondes du premier ordre ou, d'une façon plus précise, les débits d'énergie qu'elles transmettent, ne pourront donc provenir que de parois mobiles ou de l'infini, tandis que pour le second ordre tous les points du plan pourront éventuellement être des sources d'énergie rayonnante. En effet, ces phénomènes du second ordre seront identiques aux mouvements d'une onde de gravité dont la surface libre serait soumise à des pressions $q(x, y, t)$ données par l'expression :

$$q = -\frac{\rho}{g} \int^t \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) dt + \rho V_1^2 \quad (21)$$

où z est posé égal à zéro.

Il est clair, en effet, que de telles fluctuations de pression peuvent se combiner avec les fluctuations de niveau de façon à produire un travail non nul, qui alimentera un rayonnement.

Il convient évidemment d'appuyer ce qui précède par des raisonnements plus précis que nous exposerons dans le paragraphe suivant. Toutefois, nous ferons au préalable quelques commentaires sur la formule (21).

Par suite de la façon dont nous avons posé le problème (coordonnées d'Euler $\Delta \varphi_1 = 0$, $\Delta \varphi_2 = 0$), il est clair que les phénomènes du premier ordre (comme d'ailleurs ceux du deuxième ordre) satisfont dans la masse du fluide aux conditions d'incompressibilité et d'intégrabilité des équations dynamiques. Cette intégrabilité permet de calculer la pression avec, bien entendu, les indéterminations habituelles (à une fonction de t près). En résumé, dans la masse fluide, tout se passe bien « par construction », c'est-à-dire que les équations de continuité et d'équilibre sont rigoureusement satisfaites pour les termes du premier ordre. Il n'y a donc qu'aux limites que les conditions imposées ne seront pas rigoureusement satisfaites. Par exemple, à la surface libre, pour ces termes du premier ordre, on a en définitive assuré seulement la nullité des fluctuations de pression du premier ordre; par contre, il subsiste des fluctuations de pression du deuxième ordre, par exemple le terme $-(\rho V_1^2/2)$ (Bernoulli). Le rôle des termes du second ordre sera précisément de compenser ces erreurs. Ce seront donc des mouvements qui ne satisferont pas au second ordre (c'est-à-dire à leur propre ordre de grandeur) à la condition de pression nulle en surface. Ce seront au contraire des mouvements qui, considérés isolément, (cf. ce que nous avons dit plus haut sur la superposition d'un mouvement du premier ordre et d'un mouvement du second ordre) exigeraient des pressions superficielles de signe opposées à celles qu'exigerait le mouvement du premier ordre pour être « exact » au second ordre.

Nous trouverons donc dans q un terme en $\rho V_1^2/2$ opposé au terme de Bernoulli; à ce terme viennent s'en ajouter d'autres, qui résultent du fait que les conditions à la surface libre $z = \zeta$ sont exprimées à la cote $z = 0$. D'une façon assez curieuse, ces termes comprennent à nouveau $\rho V_1^2/2$ et une intégrale sur laquelle on peut faire les remarques suivantes :

Elle provient du premier terme du second membre des équations (20) ou même (18) et, compte

tenu des relations antérieurement établies, ce terme peut s'écrire :

$$-\zeta_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)$$

On voit tout de suite son sens physique par comparaison avec les équations (19) ou (17). Il correspond à l'erreur commise sur le premier terme de ces équations du seul fait du décalage ζ entre la surface libre et la cote $z = 0$, où ce terme est calculé. L'existence de ce terme est à rapprocher du fait que la cote du plan $z = 0$ peut n'être définie qu'à un infiniment petit du premier ordre près. On voit en effet que l'influence (du second ordre) de modifications du premier ordre de la cote de ce plan sera exactement annulée par ce terme.

Nous avons cependant déjà noté que le choix de la position effective du plan $z = 0$ n'est pas aussi arbitraire que ce qui précède pourrait le faire croire, car plus on s'écartera d'une position moyenne, plus les termes du troisième ordre, et au-delà, risquent de croître, si bien que les diverses approximations obtenues, quoique rigoureusement du deuxième ordre, risquent de ne pas être en pratique de « qualité » équivalente.

Une autre conséquence de la présence de cette intégrale est que la pression en surface, à laquelle les termes du second ordre (considérés isolément) doivent satisfaire, n'est définie qu'à une fonction arbitraire de x et de y près. Cette fonction n'influe évidemment pas sur φ et, en fait, n'a pas d'influence non plus sur ζ . Il n'y a donc pas lieu de s'en inquiéter sur le plan physique.

Autres conditions aux limites.

Des considérations analogues s'appliqueraient aux autres conditions aux limites; par exemple pour certaines parois (parois mobiles, générateurs de houle, etc.), les vitesses normales $\partial \varphi / \partial n$ pourront être données sous la forme :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = b d_1 + b^2 d_2 \quad (22)$$

d_1 et d_2 étant des fonctions du point considéré de la paroi.

En ce cas φ_1 satisfera (au premier ordre) à :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = d_1 \quad (23)$$

sur une position intermédiaire de la paroi, position qui sera donc considérée comme limite du domaine des équations de l'écoulement, exactement comme nous avons plus haut ramené la condition de pression en surface au plan $z = 0$. On commettra de ce fait des erreurs du deuxième ordre qui devront être compensées par φ_2 , qui ainsi devra satisfaire à une équation du type :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = d_2 + d_{1,2} \quad (24)$$

(sur une position moyenne de la paroi)

Ainsi, même si d_2 est nul, la paroi considérée pourra, du point de vue des phénomènes du second ordre considérés isolément, se comporter comme une paroi mobile et donc émettre (par exemple) des ondes libres du second ordre.

Ce phénomène a été calculé, dans le détail, par P. Fontanet [2] pour le cas d'un volet battant générateur de houle, animé d'un mouvement rigoureusement sinusoïdal ($d_2 = 0$). Il a montré qu'en effet deux ondes libres étaient émises : la fondamentale, ayant la fréquence du batteur, et une harmonique de fréquence double dont l'amplitude est du second ordre. Cette dernière onde résulte à la fois de l'effet que nous venons de préciser et des effets de surface, dont il a été question plus haut. A notre connaissance, il n'a pas été tenté de séparer ces deux composants.

Dans la présente étude, nous ne considérons pas plus avant le cas des parois mobiles et il est clair que pour les parois fixes, il n'existe pas de termes $d_{1,2}$ (ni non plus, bien entendu, de d_1 et de d_2) puisque les conditions aux limites de l'écoulement peuvent, sans inconvénient s'exprimer exactement sur la paroi considérée.

En définitive les phénomènes du second ordre sont identiques à des ondes engendrées (*) par des fluctuations de pression superficielles (elles-mêmes déterminées par les termes du premier ordre). Ces ondes doivent bien entendu satisfaire également aux différentes autres conditions aux limites.

Toutes ces considérations nous conduisent à examiner en détail la génération des ondes par des fluctuations de pression superficielle.

3. Etude de mouvements engendrés par des fluctuations de pression superficielle

Nous sommes donc amenés à poser le problème de la détermination de mouvements dont le potentiel satisfait aux équations :

$$\Delta\varphi = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial q}{\partial t} \quad (\text{pour } z = 0) \quad (26)$$

$q(x, y, t)$ étant une fonction donnée exprimant la valeur de la pression en surface.

Ainsi que les équations ci-dessus le montrent, nous nous limitons au premier ordre d'approximation, qui sera suffisant puisque nous appliquerons nos résultats à des termes du deuxième ordre, la première approximation étant donc pour eux déjà du deuxième ordre. Nous commencerons par l'étude d'une série de cas particuliers que nous pourrions traiter d'autant plus rapidement que certains sont déjà classiques.

Ondes « cylindriques » (à deux dimensions) régulières, en profondeur constante.

Supposons qu'aucune des grandeurs relatives au mouvement ne varie avec y et que l'on ait $v = 0$, φ en particulier, n'est fonction que de x, z et t .

Nous allons supposer que la pression superficielle $q(x, t)$ varie sinusoïdalement avec x et « se

déplace » à vitesse constante dans le sens des x croissants. On aura :

$$q = q_0 \cos(\mu x - \omega t + \theta_0) \quad (27)$$

q_0 et θ_0 étant des constantes réelles. En utilisant la notation imaginaire usuelle (*) on peut écrire :

$$q = \bar{q} e^{i(\mu x - \omega t)} \quad (28)$$

$\bar{q}$ étant une constante éventuellement complexe (module q_0 , argument θ_0). On sait qu'il existe en général une solution du système (25) (26) de la forme :

$$\varphi = \bar{\varphi} \operatorname{ch} \mu(z + h) e^{i(\mu x - \omega t)} \quad (29)$$

$\bar{\varphi}$ étant une constante éventuellement complexe et h la profondeur. Il est facile de vérifier que cette équation satisfait à l'équation générale (25), à la condition sur le fond :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad (\text{pour } z = -h) \quad (30)$$

et à la condition en surface si $\bar{\varphi}$ a une valeur convenable. Cette dernière condition s'écrit en effet, en tenant compte de (28) et (29) :

$$\bar{\varphi} (-\omega^2 \operatorname{ch} \mu h + \mu g \operatorname{sh} \mu h) e^{i(\mu x - \omega t)} = i\omega \frac{\bar{q}}{\rho} e^{i(\mu x - \omega t)}$$

On en tire immédiatement, si la première parenthèse est différente de zéro :

$$\bar{\varphi} = \frac{i\omega}{\rho(\mu g \operatorname{sh} \mu h - \omega^2 \operatorname{ch} \mu h)} \bar{q} \quad (31)$$

d'où :

$$\varphi = \frac{i\omega \bar{q} \operatorname{ch} \mu(z + h)}{\rho(\mu g \operatorname{sh} \mu h - \omega^2 \operatorname{ch} \mu h)} e^{i(\mu x - \omega t)} \quad (32)$$

soit, en repassant à la notation réelle :

$$\varphi = -\frac{\omega q_0 \operatorname{ch} \mu(z + h)}{\rho(\mu g \operatorname{sh} \mu h - \omega^2 \operatorname{ch} \mu h)} \sin(\mu x - \omega t + \theta_0) \quad (32 \text{ bis})$$

Notons aussi que cette formule s'adapte aisément au cas où la direction de propagation serait différent de Ox . Dans le sinus, μx devrait être remplacé par $\mu_1 x + \mu_2 y$ avec $\mu_1^2 + \mu_2^2 = \mu^2$, et on aurait :

$$\varphi = -\frac{\omega q_0 \operatorname{ch} \mu(z + h)}{\rho(\mu g \operatorname{sh} \mu h - \omega^2 \operatorname{ch} \mu h)} \sin(\mu_1 x + \mu_2 y - \omega t + \theta_0) \quad (32 \text{ ter})$$

Le dénominateur est nul lorsqu'il existe entre μ et ω la relation correspondant à la houle libre, c'est-à-dire lorsque la célérité $c = \omega/\mu$ ou la fréquence angulaire ω sont celles d'une houle libre de longueur $L = 2\pi/\mu$, ce qui s'exprime par :

$$c = c_0 \quad \text{ou} \quad \omega = \omega_0 \quad (33)$$

où nous avons posé :

$$c_0 = \sqrt{\frac{g \operatorname{th} \mu h}{\mu}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{g \mu \operatorname{th} \mu h} \quad (34)$$

(*) Ou éventuellement provenant de (engendrées à) l'infini lorsque cela n'est pas exclu par la condition aux limites à l'infini.

Il y a alors en quelque sorte résonance entre la fluctuation de pression et le plan d'eau et dans ce cas la forme générale (29) ne peut plus correspondre à une solution finie. Au voisinage de la résonance, c'est-à-dire pour ω voisin de ω_0 , la « réponse » du plan d'eau, c'est-à-dire son mouvement, devient très grande.

Remarquons encore que, d'une façon générale, les phases du potentiel ϕ sont en avance ou en retard de $\pi/2$ par rapport à celles de la pression suivant que ω est plus petit ou plus grand que ω_0 .

Les dénivelées $\zeta(x, t)$, peuvent se calculer d'après la formule (8) qui donne :

$$\zeta = -\frac{q}{\rho g} - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (35)$$

Après quelques transformations, il vient :

$$\zeta = -\frac{1}{1 - (\omega^2/\mu g \operatorname{th} \mu h)} \frac{\bar{q}}{\rho g} e^{i(\mu x - \omega t)} \quad (36)$$

$$\text{ou encore : } \zeta = \zeta_s \frac{1}{1 - (\omega^2/\omega_0^2)} \quad (37)$$

ζ_s désignant la dénivelée « statique » $[-(q/\rho g)]$ et ω_0 la fréquence angulaire de la houle libre de même longueur d'onde que la fluctuation de pression (formule 34).

Ces résultats s'étendent facilement au cas des ondes forcées stationnaires où la pression superficielle est donnée par une expression de la forme :

$$q = q_0 \cos \mu (x - x_0) \cos (\omega t - \theta_0) \quad (38)$$

Ces fluctuations de pression peuvent être considérées comme résultant de la superposition de deux « trains de pression » du type que nous venons d'étudier (formule 27) qui auraient pour équations :

$$q_1 = \frac{q_0}{2} \cos (\mu x - \omega t + \theta_1) \quad (39)$$

$$q_2 = \frac{q_0}{2} \cos (-\mu x - \omega t + \theta_2)$$

où l'on aurait :

$$\mu x_0 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \quad \text{et} \quad \theta_0 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

Ces deux trains se propagent en sens inverse et ont des vitesses, amplitudes, longueurs d'onde et fréquences identiques.

On peut également écrire :

$$q = \bar{q} \cos \mu (x - x_0) e^{-i\omega t} \quad (40)$$

On en déduit aisément de notre remarque et des résultats précédents :

$$\phi = \frac{i\omega \bar{q} \operatorname{ch} \mu (z + h)}{\rho (\mu g \operatorname{sh} \mu h - \omega^2 \operatorname{ch} \mu h)} \cos \mu (x - x_0) e^{-i\omega t} \quad (41)$$

$$\zeta = -\frac{1}{1 - (\omega^2/\mu g \operatorname{th} \mu h)} \frac{\bar{q}}{\rho g} \cos \mu (x - x_0) e^{-i\omega t} \quad (42)$$

$$\text{ou encore : } \zeta = \zeta_s \frac{1}{1 - (\omega^2/\omega_0^2)} \quad (43)$$

formule identique à la formule (37).

Ondes cylindriques en profondeur constante, pression sinusoïdale localisée.

En restant dans le cadre des mouvements à deux dimensions, il est intéressant d'étudier l'effet d'une variation de pression localisée, c'est-à-dire en fait s'exerçant sur une bande extrêmement étroite limitée par deux parallèles à l'axe Oy .

Les démonstrations que nous esquisserons ici sont purement formelles, car elles font intervenir des intégrales non convergentes. Les résultats obtenus peuvent néanmoins être justifiés plus rigoureusement par des procédés trop classiques (frottements infiniment petits, etc.) pour qu'il soit souhaitable d'alourdir le texte en les redonnant en détail.

Nous nous limiterons ici au cas d'une fluctuation sinusoïdale de pression. On aura donc :

$$q = 0 \quad \text{si } |x| > \frac{\varepsilon}{2} \quad (44)$$

$$q = q_0 \cos (\omega t - \theta_0) \quad \text{si } |x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ou si l'on préfère pour cette dernière expression :

$$q = \bar{q} e^{-i\omega t} \quad \text{si } |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (45)$$

Nous avons supposé, dans les formules ci-dessus, que la zone de pression était centrée sur $x = 0$, ce qui est une restriction facile à lever en cas de besoin.

Suivant des procédés classiques, nous ferons tendre ε vers zéro en conservant au produit $\varepsilon \bar{q}$ une valeur finie $\bar{Q}$ (force par unité de largeur) et nous représenterons la pression par :

$$q = \frac{1}{\pi} \bar{Q} e^{-i\omega t} \int_0^\infty \cos \mu x d\mu \quad (46)$$

La formule (41) nous permettra alors d'écrire :

$$\phi = \frac{i\omega \bar{Q}}{\pi \rho} e^{-i\omega t} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \mu (z + h) \cos \mu x}{\mu g \operatorname{sh} \mu h - \omega^2 \operatorname{ch} \mu h} d\mu \quad (47)$$

L'intégrale peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu (z + h) e^{i\mu x}}{\mu g \operatorname{sh} \mu h - \omega^2 \operatorname{ch} \mu h} d\mu \quad (48)$$

et s'intégrer par la méthode des résidus.

Le dénominateur s'annule pour une infinité de valeurs, dont un seul couple est réel, et que nous désignerons par :

$$\begin{aligned} &\pm \mu_0 \\ &\pm i\mu_j \quad (j=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

μ_0 et les μ_j étant réels positifs et ces derniers étant indexés par ordre de valeur croissante.

Pour x positif le contour d'intégration comprendra l'axe réel sauf au voisinage des points $\pm \mu_0$ qui seront contournés par un demi-cercle (supérieur par exemple) de rayon infiniment petit et le contour reviendra par un demi-cercle de rayon infiniment grand situé du côté des imaginaires positifs.

Pour x négatif, ce dernier demi-cercle devra être pris du côté des imaginaires négatifs.

En définitive le potentiel résultant aura la forme :

$$\varphi = - \frac{2 i \omega Q}{\rho g} \frac{\operatorname{ch} \mu_0 h \operatorname{ch} \mu_0 (z+h)}{\operatorname{sh} 2 \mu_0 h + 2 \mu_0 h} \sin \mu_0 x e^{-i \omega t} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 i \omega Q}{\rho g} \frac{\cos \mu_j h \cos \mu_j (z+h)}{\sin 2 \mu_j h + 2 \mu_j h} e^{-\mu_j x} e^{-i \omega t} \quad \text{pour } x > 0 \quad (49)$$

et :

$$\varphi = + \frac{2 i \omega Q}{\rho g} \frac{\operatorname{ch} \mu_0 h \operatorname{ch} \mu_0 (z+h)}{\operatorname{sh} 2 \mu_0 h + 2 \mu_0 h} \sin \mu_0 x e^{-i \omega t} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 i \omega Q}{\rho g} \frac{\cos \mu_j h \cos \mu_j (z+h)}{\sin 2 \mu_j h + 2 \mu_j h} e^{\mu_j x} e^{-i \omega t} \quad \text{pour } x < 0 \quad (50)$$

Les premiers termes de ces expressions représentent des clapotis libres, tant du côté des x négatifs que du côté des x positifs. Ainsi, cette solution ne satisfait pas à la condition d'absence de sources à l'infini (puisque un clapotis résulte de la rencontre de deux trains d'ondes de sens contraire). Pour satisfaire à cette condition, il suffit d'ajouter à φ l'expression :

$$- \frac{2 \omega Q}{\rho g} \frac{\operatorname{ch} \mu_0 h \operatorname{ch} \mu_0 (z+h)}{\operatorname{sh} 2 \mu_0 h + 2 \mu_0 h} \cos \mu_0 x e^{-i \omega t} \quad (51)$$

qui est manifestement une solution des équations sans second membre, puisque c'est le potentiel d'un clapotis « libre ». Les premiers termes du potentiel deviennent alors :

$$- \frac{2 \omega Q}{\rho g} \frac{\operatorname{ch} \mu_0 h \operatorname{ch} \mu_0 (z+h)}{\operatorname{sh} 2 \mu_0 h + 2 \mu_0 h} e^{i(\mu_0 x - \omega t)} \quad \text{pour } x > 0 \quad (52)$$

et :

$$- \frac{2 \omega Q}{\rho g} \frac{\operatorname{ch} \mu_0 h \operatorname{ch} \mu_0 (z+h)}{\operatorname{sh} 2 \mu_0 h + 2 \mu_0 h} e^{-i(\mu_0 x + \omega t)} \quad \text{pour } x < 0 \quad (53)$$

Ces termes représentent deux ondes progressives émises vers l'infini de part et d'autre de la fluctuation de pression. Celle-ci se comporte donc comme une véritable source de radiations.

Les autres termes intervenant dans l'expression du potentiel décroissent exponentiellement de part et d'autre de l'origine de la perturbation; ce sont donc des phénomènes localisés, ou liés à la perturbation de pression, qui s'opposent, par ce caractère, aux phénomènes rayonnants évoqués ci-dessus. On peut d'ailleurs montrer facilement qu'aucun transport moyen d'énergie ne correspond à ces phénomènes liés.

Perturbation quelconque en onde cylindrique et en profondeur constante.

Le résultat ci-dessus nous donne en principe le moyen de calculer par intégration l'effet d'une fluctuation de pression variant sinusoidalement avec le temps, mais dont la phase et l'amplitude peuvent varier d'une façon quelconque avec x , étant entendu que nous restons toujours dans le cadre des mouvements cylindriques en profondeur constante.

Dans le cas de fluctuations de pression non sinusoidales, mais susceptibles d'être représentées par des intégrales ou des séries de Fourier, une intégration ou une sommation supplémentaire permet éga-

lement de résoudre le problème. Les termes constants pouvant intervenir dans les séries de Fourier ne posent pas de problème, puisque la solution correspondant à une pression q constante (et aux conditions à l'infini) est évidemment :

$$\varphi = 0 \quad \zeta = - \frac{q}{\rho g} \quad (54)$$

cette formule étant valable quelle que soit la configuration du fond et aussi bien pour les mouvements à trois dimensions que pour ceux que nous venons d'étudier.

Remarques complémentaires.

Il semble donc qu'une répartition de fluctuation de pression doive en général provoquer non seulement des phénomènes locaux, mais aussi des phénomènes rayonnants, c'est-à-dire des émissions vers l'infini d'ondes libres (ne provenant pas, évidemment, de l'infini opposé). Or, dans un des exemples précédents (train de fluctuation sinusoidale dans le temps et dans l'espace) nous n'avons pas trouvé de phénomènes rayonnants. Les mouvements du second ordre étaient soit des clapotis forcés, soit des ondes progressives forcées, et même si l'on avait superposé une onde progressive libre au mouvement calculé, (ce que l'on peut toujours faire à l'ordre d'approximation choisi), il n'y aurait pas eu « émission » d'une onde, mais seulement « passage » d'une onde en transit de $-\infty$ à $+\infty$ ou l'inverse.

Ceci ne nous surprendra pas, puisque nous avons déjà rappelé que des mouvements sinusoidaux peuvent s'annuler par addition, et qu'il est donc possible que les phénomènes rayonnants s'annulent mutuellement par interférence. Un exemple très simple d'une telle annulation a été donné dans l'exposé préliminaire en considérant dans un canal deux sources identiques distantes de $L/2$.

Ondes circulaires produites en profondeur constante par une fluctuation de pression sinusoidale localisée sur un plan d'eau infini (sans obstacle).

Nous supposons maintenant que la variation de pression s'exerce uniquement à l'intérieur d'un cercle de rayon ε où elle a la valeur :

$$q = q_0 \cos(\omega t - \theta_0)$$

soit, en notation imaginaire :

$$q = \bar{q} e^{-i \omega t} \quad (55)$$

Nous ferons tendre ε vers zéro et $\bar{q}$ vers l'infini, en conservant constant le produit :

$$\pi \varepsilon^2 \bar{q} = \bar{Q} \quad (56)$$

Nous ne donnons ci-après que les lignes générales, d'ailleurs très classiques, de la solution mathématique du problème. A partir de ces indications, il est facile de reconstituer le raisonnement dans toute la rigueur souhaitée. Nous utiliserons un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz passant par le centre O du cercle où s'exerce la pression, r étant le rayon vecteur.

Nous cherchons tout d'abord une solution de la forme :

$$\varphi = \bar{\varphi} e^{-i\omega t} \quad (57)$$

avec :

$$\bar{\varphi} = \int_0^\infty \bar{f}(\mu) J_0(\mu r) \operatorname{ch} \mu(z+h) d\mu \quad (58)$$

(Sur le sens des lettres surlignées voir note de la deuxième colonne de la page 409).

En admettant, sans démonstration, la légitimité de la différentiation sous le signe somme, on vérifie aisément que φ satisfait aux conditions :

$$\Delta\varphi = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad (\text{pour } z = -h) \quad (59)$$

En ce qui concerne la condition de pression en surface, nous pouvons substituer (55), (57) et (58) dans l'équation (17) où nous supprimons les indices; on obtient :

$$\bar{q} = \int_0^\infty \frac{\rho}{i\omega} (g\mu \operatorname{th} \mu h - \omega^2) \bar{f}(\mu) \operatorname{ch} \mu h J_0(\mu r) d\mu \quad (60)$$

Cette équation peut s'inverser (formules de Fourier-Bessel) et donne alors :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{i\omega\mu} (g\mu \operatorname{th} \mu h - \omega^2) \bar{f}(\mu) \operatorname{ch} \mu h &= \int_0^\infty \bar{q} J_0(\mu r) r dr \\ &= \int_0^\epsilon \frac{\bar{Q}}{\pi\epsilon^2} J_0(\mu r) r dr \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{Q}}{\pi\epsilon^2} \int_0^\epsilon r dr = \frac{\bar{Q}}{2\pi} \end{aligned} \quad (61)$$

en admettant, également sans démonstration, la validité du passage à la limite. On a donc :

$$\bar{f}(\mu) = \frac{i\omega\mu\bar{Q}}{2\pi\rho(g\mu \operatorname{th} \mu h - \omega^2) \operatorname{ch} \mu h} \quad (62)$$

soit :

$$\bar{\varphi} = \frac{i\omega\bar{Q}}{2\pi\rho} \int_0^\infty \frac{\mu J_0(\mu r) \operatorname{ch} \mu(z+h)}{(g\mu \operatorname{th} \mu h - \omega^2) \operatorname{ch} \mu h} d\mu \quad (63)$$

En introduisant la fonction de Hankel :

$$H_0^{(1)} = J_0 + iY_0$$

l'intégrale figurant dans cette expression peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu \operatorname{ch} \mu(z+h) H_0^{(1)}(\mu r)}{\mu g \operatorname{sh} \mu h - \omega^2 \operatorname{ch} \mu h} d\mu \quad (64)$$

qui a les mêmes pôles que l'équation (48) et peut s'intégrer par la méthode des résidus. Le contour à prendre est le même sauf à l'origine qui doit être exclue, $H_0^{(1)}$ y présentant une singularité logarithmique.

En définitive, le potentiel résultant aura la forme :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= -\frac{i\omega\bar{Q}}{\rho g} \frac{\mu_0 \operatorname{ch} \mu_0 h \operatorname{ch} \mu_0(z+h)}{\operatorname{sh} 2\mu_0 h + 2\mu_0 h} Y_0(\mu_0 r) e^{-i\omega t} \\ &+ \sum_{j=1}^\infty \frac{2i\omega\bar{Q}}{\pi\rho g} \frac{\mu_j \cos \mu_j h \cos \mu_j(z+h)}{\sin 2\mu_j h + 2\mu_j h} K_0(\mu_j r) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (65)$$

où $K_0(\mu_j r)$ est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce :

$$K_0(\mu_j r) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(e^{i(\pi/2)} \mu_j r) \quad (66)$$

Le premier terme de cette expression représente un clapotis annulaire et ainsi ne satisfait pas à la condition d'absence de sources à l'infini. On peut facilement satisfaire à cette condition en ajoutant à φ l'expression :

$$-\frac{\omega\bar{Q}}{\rho g} \frac{\mu_0 \operatorname{ch} \mu_0 h \operatorname{ch} \mu_0(z+h)}{\operatorname{sh} 2\mu_0 h + 2\mu_0 h} J_0(\mu_0 r) e^{-i\omega t} \quad (67)$$

qui représente le potentiel d'un clapotis annulaire « libre » et est donc une solution des équations sans second membre. Ainsi, le premier terme devient :

$$-\frac{\omega\bar{Q}}{\rho g} \frac{\mu_0 \operatorname{ch} \mu_0 h \operatorname{ch} \mu_0(z+h)}{\operatorname{sh} 2\mu_0 h + 2\mu_0 h} H_0^{(1)}(\mu_0 r) e^{-i\omega t} \quad (68)$$

ce qui représente une onde circulaire émise par la fluctuation de pression.

Les autres termes représentent des perturbations qui décroissent exponentiellement en s'éloignant de l'origine. Ce sont donc des phénomènes locaux ou « liés »; on peut d'ailleurs montrer qu'ils ne transportent pas d'énergie.

Dans la mesure où on ne s'intéressera qu'aux phénomènes de second ordre « rayonnants », on pourra donc négliger ces derniers termes.

Perturbations quelconques en profondeur constante sur un plan d'eau infini (sans obstacle).

Le résultat ci-dessus nous donne en principe le moyen de calculer par intégration l'effet d'une fluctuation de pression q variant sinusoïdalement avec le temps, mais dont la phase et l'amplitude peuvent varier d'une façon quelconque avec x et y .

Si on se limite aux termes rayonnants, on peut obtenir la contribution à φ de la pression q agissant sur un élément de surface $dx \times dy$ en substituant $q dx dy$ à $\bar{Q}$ dans (68). Ainsi, le potentiel en un point quelconque de coordonnées x, y, z est donné par :

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z, t) &= \int_\eta \int_\xi -\frac{\omega\bar{q}(\xi, \eta)}{\rho g} \times \\ &\times \frac{\mu_0 \operatorname{ch} \mu_0 h \operatorname{ch} \mu_0(z+h)}{\operatorname{sh} 2\mu_0 h + 2\mu_0 h} H_0^{(1)}(\mu_0 r) e^{-i\omega t} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (69)$$

ξ et η étant les coordonnées du point mobile d'intégration qui parcourt tout le plan et r valant $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$.

Le calcul peut également s'étendre à des mouvements non sinusoïdaux représentables par des séries ou des intégrales de Fourier.

La dénivelée ζ_2 , propre aux termes rayonnants du second ordre (considérés isolément) peut s'écrire en notation imaginaire :

$$\begin{aligned} \zeta_2(x, y) &= \int_\eta \int_\xi -\frac{i\mu_0^2 \bar{q}(\xi, \eta)}{2\rho g} \times \\ &\times \frac{\operatorname{sh} 2\mu_0 h}{\operatorname{sh} 2\mu_0 h + 2\mu_0 h} H'_0(\mu_0 r) e^{-i\omega t} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (69 \text{ bis})$$

Cas où le plan d'eau est limité par des obstacles.

Les formules que nous venons d'établir restent applicables à des plans d'eau limités par des obstacles (quais, digues, etc.) parfaitement absorbants, en admettant que l'obstacle parfaitement absorbant est celui que l'on peut remplacer par une prolonga-

tion infinie du plan d'eau sans que cela perturbe le mouvement.

Dans le cas d'obstacles parfaitement réfléchissants (parois verticales), les intégrales ci-dessus ne conviendront en général pas, car elles donnent des solutions qui ne satisfont pas nécessairement au droit de ces parois, à la condition de vitesse normale nulle $[(\partial\varphi_2/\partial n) = 0$ ou $(\partial\zeta_2/\partial n) = 0$, n étant la normale de la paroi].

On constituera donc une solution de la forme :

$$\Phi_2 = \varphi_2 + \Psi_2 \quad \text{ou} \quad Z_2 = \zeta_2 + \gamma_2 \quad (70)$$

Ψ_2 ou γ_2 étant les potentiels ou les dénivelées d'une onde libre de fréquence $2k$ satisfaisant le long des parois aux conditions :

$$\frac{\partial\Psi_2}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \quad \frac{\partial\gamma_2}{\partial n} = -\frac{\partial\zeta_2}{\partial n}$$

et satisfaisant également à des conditions de radiation à l'infini (absence de sources à l'infini).

Le problème de calcul de Ψ_2 ou de γ_2 est soluble par intégration suivant les méthodes utilisées pour les calculs de diffraction [5].

Certains cas particuliers se résoudront plus facilement par la méthode des images, l'exemple le plus simple étant celui d'un demi-plan limité par une paroi rectiligne parfaitement réfléchissante (paroi verticale). Les intégrales (69) et (69 bis) peuvent de nouveau être prises sur le plan tout entier en donnant à q des valeurs « images ». Par exemple, si le plan d'eau est le demi-plan des x positifs, on posera :

$$q(-x, y) = q(x, y) \quad (x > 0) \quad (70 \text{ bis})$$

Nous n'insistons pas sur ces méthodes très connues.

4. Application à divers cas

On peut appliquer les formules générales ci-dessus à un très grand nombre de problèmes qui jusqu'ici n'ont pas été résolus au second ordre. Auparavant il n'est pas sans intérêt de « retrouver » quelques résultats classiques, soit à titre de vérification, soit afin de se familiariser avec la méthode sur des cas simples.

Houle cylindrique régulière en profondeur constante.

Le potentiel au premier ordre peut par exemple se mettre sous la forme :

$$\varphi_1 = \frac{ak}{m} \frac{\text{ch } m(z+h)}{\text{sh } mh} \sin(mx - kt)$$

k et m étant liés par :

$$k^2 = mg \text{ th } mh \quad (71)$$

et la surface libre ayant, au premier ordre, l'équation :

$$\zeta = a \cos(mx - kt) \quad (72)$$

En substituant cette valeur de φ_1 dans la formule (21), on obtient :

$$q = \frac{3}{4} \frac{a^2 \rho k^2 \cos(2mx - 2kt)}{\text{sh}^2 mh} + \frac{1}{2} \frac{a^2 \rho k^2}{\text{sh}^2 mh} \text{ch } 2mh \quad (73)$$

Nous pouvons négliger le terme indépendant du temps et en utilisant la formule (32 bis) où l'on a posé :

$$\varphi = \varphi_2; \quad \omega = 2k; \quad \mu = 2m;$$

$$q_0 = \frac{3}{4} \frac{a^2 \rho k^2}{\text{sh}^2 mh}; \quad \theta_0 = 0 \quad (74)$$

il vient, compte tenu de (71) et (72), le potentiel du second ordre :

$$\varphi_2 = \frac{3}{8} a^2 k \frac{\text{ch } 2m(z+h) \sin(2mx - 2kt)}{\text{sh}^4 mh} \quad (75)$$

formule classique.

Houles cylindriques croisées.

Nous allons calculer les termes du second ordre relatifs à deux houles cylindriques régulières, distinguées par les indices i et j , se propageant dans deux directions quelconques faisant des angles α_i et α_j avec l'axe Ox .

Le potentiel du premier ordre peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \frac{a_i k_i}{m_i} \frac{\text{ch } m_i(z+h)}{\text{sh } m_i h} \sin \left[\begin{array}{l} m_i(x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i) \\ - k_i t + \theta_i \end{array} \right] \\ & + \frac{a_j k_j}{m_j} \frac{\text{ch } m_j(z+h)}{\text{sh } m_j h} \sin \left[\begin{array}{l} m_j(x \cos \alpha_j + y \sin \alpha_j) \\ - k_j t + \theta_j \end{array} \right] \end{aligned} \quad (76)$$

où :

$$k_i^2 = m_i g \text{ th } m_i h; \quad k_j^2 = m_j g \text{ th } m_j h \quad (77)$$

En substituant cette valeur de φ_1 dans la formule (21), on obtient, en négligeant les termes indépendants du temps :

$$\begin{aligned} q = & \frac{3}{4} \frac{a_i^2 \rho k_i^2}{\text{sh}^2 m_i h} \cos 2 \left[\begin{array}{l} m_i(x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i) \\ - k_i t + \theta_i \end{array} \right] \\ & + \frac{3}{4} \frac{a_j^2 \rho k_j^2}{\text{sh}^2 m_j h} \cos 2 \left[\begin{array}{l} m_j(x \cos \alpha_j + y \sin \alpha_j) \\ - k_j t + \theta_j \end{array} \right] \\ & + \frac{a_i a_j \rho}{2 \text{sh } m_i h \text{sh } m_j h} \\ & \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k_i + k_j} \left[k_j^3 \frac{\text{sh } m_i h}{\text{sh } m_j h} + k_i^3 \frac{\text{sh } m_j h}{\text{sh } m_i h} \right] \\ + 2 k_i k_j \left[\text{ch } m_i h \text{ch } m_j h \cos(\alpha_i - \alpha_j) \right. \\ \left. - \text{sh } m_i h \text{sh } m_j h \right] \end{array} \right\} \\ & \times \cos \left[\begin{array}{l} (m_i \cos \alpha_i + m_j \cos \alpha_j) x \\ + (m_i \sin \alpha_i + m_j \sin \alpha_j) y \\ - (k_i + k_j) t + \theta_i + \theta_j \end{array} \right] \\ & + \frac{a_i a_j \rho}{2 \text{sh } m_i h \text{sh } m_j h} \\ & \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k_i - k_j} \left[-k_j^3 \frac{\text{sh } m_i h}{\text{sh } m_j h} + k_i^3 \frac{\text{sh } m_j h}{\text{sh } m_i h} \right] \\ + 2 k_i k_j \left[\text{ch } m_i h \text{ch } m_j h \cos(\alpha_i - \alpha_j) \right. \\ \left. + \text{sh } m_i h \text{sh } m_j h \right] \end{array} \right\} \\ & \times \cos \left[\begin{array}{l} (m_i \cos \alpha_i - m_j \cos \alpha_j) x \\ + (m_i \sin \alpha_i - m_j \sin \alpha_j) y \\ - (k_i - k_j) t + \theta_i - \theta_j \end{array} \right] \end{aligned} \quad (78)$$

Pour les deux premiers termes, à la direction de propagation près, nous nous trouvons ramenés au problème de la houle cylindrique que nous venons d'étudier. En ce qui concerne chacun des deux autres, on peut appliquer la formule (32 ter). Pour le premier de ceux-ci par exemple, on posera :

$$\omega = \omega' = k_i + k_j; \quad \mu_1 = \mu'_1 = m_i \cos \alpha_i + m_j \cos \alpha_j;$$

$$\mu_2 = \mu'_2 = m_i \sin \alpha_i + m_j \sin \alpha_j$$

$$\mu = \mu' = \sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}; \quad \theta'_0 = \theta_i + \theta_j$$

pour la deuxième on posera :

$$\omega = \omega'' = k_i - k_j; \quad \mu_1 = \mu''_1 = m_i \cos \alpha_i - m_j \cos \alpha_j;$$

$$\mu_2 = \mu''_2 = m_i \sin \alpha_i - m_j \sin \alpha_j$$

$$\mu = \mu'' = \sqrt{\mu_1''^2 + \mu_2''^2}; \quad \theta''_0 = \theta_i + \theta_j \quad (79)$$

Il viendra en définitive :

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \frac{3}{8} a_i^2 k_i \frac{\text{ch } 2 m_i (z+h)}{\text{sh}^4 m_i h} \times \\ & \times \sin [2 m_i (x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i) - 2 k_i t + 2 \theta_i] \\ & + \frac{3}{8} a_j^2 k_j \frac{\text{ch } 2 m_j (z+h)}{\text{sh}^4 m_j h} \times \\ & \times \sin [2 m_j (x \cos \alpha_j + y \sin \alpha_j) - 2 k_j t + 2 \theta_j] \\ & - \frac{a_i a_j \text{ch } \mu' (z+h)}{2 \text{sh } m_i h \text{sh } m_j h [\mu' g \text{sh } \mu' h - \omega'^2 \text{ch } \mu' h]} \\ & \times \left\{ \left[k_j^3 \frac{\text{sh } m_i h}{\text{sh } m_j h} + k_i^3 \frac{\text{sh } m_j h}{\text{sh } m_i h} \right] + 2 k_i k_j \omega' \times \right. \\ & \times [\text{ch } m_i h \text{ch } m_j h \cos (\alpha_i - \alpha_j) - \text{sh } m_i h \text{sh } m_j h] \\ & \times \sin (\mu'_1 x + \mu'_2 y - \omega' t + \theta'_0) \\ & - \frac{a_i a_j \text{ch } \mu'' (z+h)}{2 \text{sh } m_i h \text{sh } m_j h [\mu'' g \text{sh } \mu'' h - \omega''^2 \text{ch } \mu'' h]} \\ & \times \left\{ \left[-k_j^3 \frac{\text{sh } m_i h}{\text{sh } m_j h} + k_i^3 \frac{\text{sh } m_j h}{\text{sh } m_i h} \right] + 2 k_i k_j \omega'' \times \right. \\ & \times [\text{ch } m_i h \text{ch } m_j h \cos (\alpha_i - \alpha_j) + \text{sh } m_i h \text{sh } m_j h] \\ & \times \sin (\mu''_1 x + \mu''_2 y - \omega'' t + \theta''_0) \end{aligned} \quad (80)$$

Dans le cas particulier $\alpha_i = \alpha_j$ on retrouve les formules connues de la houle irrégulière cylindrique au second ordre.

Ondes circulaires.

Pour traiter plus commodément un exemple d'onde circulaire, nous généraliserons tout d'abord le résultat obtenu plus haut pour une fluctuation de pression localisée.

Au lieu de supposer que la variation de pression (54) s'exerce dans un cercle de rayon ε , nous supposons qu'elle s'exerce entre deux cercles centrés sur l'origine et de rayon R et $R + \varepsilon$. La relation (56) deviendra alors :

$$\bar{Q} = 2 \pi R \varepsilon \bar{q}$$

En utilisant le même système de coordonnées et le même cheminement mathématique que pour la fluctuation concentrée, nous sommes amenés jusqu'à la relation (61) qui devient :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{i \omega \mu} (g \mu \text{th } \mu h - \omega^2) \bar{f}(\mu) \text{ch } \mu h &= \int_0^\infty \bar{q} J_0(\mu r) r dr \\ &= \int_R^{R+\varepsilon} \frac{\bar{Q}}{2 \pi R \varepsilon} J_0(\mu r) r dr \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{Q} J_0(\mu R)}{2 \pi R \varepsilon} \int_R^{R+\varepsilon} r dr \\ &= \frac{\bar{Q}}{2 \pi} J_0(\mu R) \quad (81) \end{aligned}$$

L'équation (63) est donc simplement transformée :

$$\bar{\varphi} = \frac{i \omega \bar{Q}}{2 \pi \rho} \int_0^\infty \frac{\mu J_0(\mu R) J_0(\mu r) \text{ch } \mu (z+h)}{(g \mu \text{th } \mu h - \omega^2) \text{ch } \mu h} d\mu \quad (82)$$

Pour $r > R$ cette intégrale se résout comme précédemment par la méthode des résidus en substituant $H_0^{(1)}(\mu r)$ à $J_0(\mu r)$.

L'équation (65) devient :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & - \frac{i \omega \bar{Q}}{\rho g} \frac{\mu_0 \text{ch } \mu_0 h \text{ch } \mu_0 (z+h)}{\text{sh } 2 \mu_0 h + 2 \mu_0 h} \\ & \times J_0(\mu_0 R) Y_0(\mu_0 r) e^{-i \omega t} + \sum_{j=1}^\infty \frac{2 i \omega \bar{Q}}{\rho g} \\ & \times \frac{\mu_j \cos \mu_j h \cos \mu_j (z+h)}{\sin 2 \mu_j h + 2 \mu_j h} J_0(\mu_j R) K_0(\mu_j r) e^{-i \omega t} \end{aligned} \quad (83)$$

pour $r > R$.

Si on a $r < R$, il suffit d'intervertir r et R pour avoir la solution :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & - \frac{i \omega \bar{Q}}{\rho g} \frac{\mu_0 \text{ch } \mu_0 h \text{ch } \mu_0 (z+h)}{\text{sh } 2 \mu_0 h + 2 \mu_0 h} \\ & \times Y_0(\mu_0 R) J_0(\mu_0 r) e^{-i \omega t} + \sum_{j=1}^\infty \frac{2 i \omega \bar{Q}}{\rho g} \\ & \times \frac{\mu_j \cos \mu_j h \cos \mu_j (z+h)}{\sin 2 \mu_j h + 2 \mu_j h} K_0(\mu_j R) J_0(\mu_j r) e^{-i \omega t} \end{aligned} \quad (84)$$

pour $r < R$.

Le premier terme de l'expression (83) représente, comme précédemment, un clapotis annulaire qui ne satisfait pas à la condition d'absence de sources à l'infini. Pour remédier à ce défaut, il suffit d'ajouter à φ l'expression (67) multipliée par le nouveau facteur $J_0(\mu_0 R)$.

Les premiers termes de (83) et (84) deviennent alors :

$$- \frac{\omega \bar{Q}}{\rho g} \frac{\mu_0 \text{ch } \mu_0 h \text{ch } \mu_0 (z+h)}{\text{sh } 2 \mu_0 h + 2 \mu_0 h} J_0(\mu_0 R) H_0^{(1)}(\mu_0 r) e^{-i \omega t} \quad (85)$$

pour $r > R$;

$$- \frac{\omega \bar{Q}}{\rho g} \frac{\mu_0 \text{ch } \mu_0 h \text{ch } \mu_0 (z+h)}{\text{sh } 2 \mu_0 h + 2 \mu_0 h} H_0^{(1)}(\mu_0 R) J_0(\mu_0 r) e^{-i \omega t} \quad (86)$$

pour $r < R$.

A l'extérieur du cercle de rayon R , on a donc une onde circulaire se dirigeant vers l'infini. Ce résultat est le même que lorsque la fluctuation de pression est concentrée au centre, au facteur $J_0(\mu_0 R)$ près que l'on peut considérer, en quelque sorte, comme un « coefficient d'influence » (réel).

A l'intérieur du cercle, le mouvement est un clapotis circulaire pour lequel $H_0^{(1)}$ est également une sorte de coefficient d'influence (complexe).

A ces mouvements, il faudra ajouter les termes

locaux dont les potentiels figurent sous les signes somme de (83) et (84).

Ces formules peuvent aisément s'appliquer à la recherche des termes rayonnants engendrés par une fluctuation de pression quelconque ne dépendant que de R .

On intégrera en remplaçant Q par l'élément différentiel $2\pi\bar{q}RdR$ et on obtiendra :

$$\begin{aligned} \varphi = & \int_0^r -\frac{2\pi\omega\bar{q}(R)}{\rho g} \frac{\mu_0 \operatorname{ch} \mu_0 h \operatorname{ch} \mu_0 (z+h)}{\operatorname{sh} 2\mu_0 h + 2\mu_0 h} \\ & \times J_0(\mu_0 R) H_0^{(1)}(\mu_0 r) e^{-i\omega t} R dR \\ & + \int_r^\infty -\frac{2\pi\omega\bar{q}(R)}{\rho g} \frac{\mu_0 \operatorname{ch} \mu_0 h \operatorname{ch} \mu_0 (z+h)}{\operatorname{sh} 2\mu_0 h + 2\mu_0 h} \\ & \times H_0^{(1)}(\mu_0 R) J_0(\mu_0 r) e^{-i\omega t} R dR \\ = & -\frac{2\pi\rho}{\rho g} \frac{\mu_0 \operatorname{ch} \mu_0 h \operatorname{ch} \mu_0 (z+h)}{\operatorname{sh} 2\mu_0 h + 2\mu_0 h} e^{i\omega t} \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & H_0^{(1)}(\mu_0 r) \int_0^r \bar{q}(R) J_0(\mu_0 R) R dR \\ & + J_0(\mu_0 r) \int_r^\infty \bar{q}(R) H_0^{(1)}(\mu_0 R) R dR \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (87)$$

En chaque point on a donc un potentiel qui peut s'interpréter grossièrement comme représentant la somme d'un clapotis et d'une onde circulaire se propageant vers l'infini, les amplitudes et les phases de ces deux phénomènes variant d'un point à l'autre.

Cette variation fait que, en toute rigueur, on ne peut considérer, même localement, que l'on a un mouvement résultant de la superposition d'un clapotis et d'une onde circulaire divergente. Cette conclusion serait pourtant exacte pour les points à la distance r de l'origine si $\bar{q}(R)$ était nul au voisinage de $R=r$.

En négligeant l'effet purement local de la pression, ce qui est d'autant plus normal que l'on a négligé les termes locaux des formules (83) et (84), on peut donc admettre cette interprétation physique des équations (87).

Ainsi donc, à des perturbations locales près, les termes rayonnants du second ordre représentent en chaque point un clapotis circulaire (sans singularité à l'origine) et une onde circulaire divergente. On peut, si on le préfère, interpréter cette combinaison comme étant celle de deux clapotis déphasés dont l'un présente (prolongé jusqu'à l'origine) une singularité logarithmique :

$[aJ_0 + bH_0^{(1)} = (a+b)J_0 + ibY_0]$
ou comme deux ondes circulaires l'une convergente, l'autre divergente :

$$[aJ_0 + bH_0^{(1)} = (b+a/2)H_0^{(1)} + a/2H_0^{(2)}]$$

Nous n'insistons pas sur ces interprétations; par contre, nous pensons utile de faire les remarques suivantes :

Même en abandonnant les conditions de régularité à l'origine et l'absence de sources à l'infini, il sera impossible de supprimer les termes du second ordre rayonnants pour toutes les valeurs du rayon, puisque dans l'équation (87) les coefficients de $H_0^{(1)}(\mu_0 r)$ et de $J_0(\mu_0 r)$ varient avec r (limite des intégrales).

Si on prend le cas particulier où le mouvement du premier ordre est lui-même une onde circulaire divergente monochromatique, il est clair, sans effectuer les calculs dans le détail, que les ondes rayonnantes du second ordre seront de fréquence double. Or, rappelons que ce sont des ondes libres, qui se propagent donc avec leur célérité propre différente de celle des ondes du premier ordre. Ceci fait qu'en se superposant à celles-ci, elles leur donnent un profil qui se déforme constamment en fonction de la variation continue des déphasages premier ordre/second ordre. Ceci montre qu'il n'existe pas, pour les ondes circulaires, la possibilité d'un mouvement périodique régulier comparable, *mutatis mutandis*, aux houles régulières périodiques à deux dimensions (houles de Lévi-Civita par exemple). En plus des déformations graduelles, variations graduelles de longueur d'onde, diminution d'amplitude avec le rayon, etc., il y aura toujours ces déformations rapides de chaque ondulation.

Système quelconque d'ondes « monochromatiques » en profondeur constante.

Rappelons tout d'abord quelques formules classiques. Avec la notation imaginaire déjà utilisée, le potentiel au premier ordre du mouvement monochromatique en profondeur constante le plus général peut s'écrire :

$$\varphi_1(x, y, z, t) = \bar{\varphi}_1(x, y, z) e^{-ikt} \quad (88)$$

$\bar{\varphi}_1$ étant complexe et l'égalité ne concernant que la partie réelle du second membre. En l'absence de parois mobiles (*) on a :

$$\bar{\varphi}_1(x, y, z) = f_1(x, y) \operatorname{ch} m(z+h) \quad (89)$$

La dénivellation au premier ordre étant notée en imaginaires :

$$\zeta_1(x, y, t) = \bar{\zeta}_1(x, y) e^{-ikt} \quad (90)$$

on a la relation classique :

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \quad (\text{pour } z=0) \quad (91)$$

d'où :

$$ik\bar{\zeta}_1 = m\bar{f}_1 \operatorname{sh} mh \quad (92)$$

ce qui permet d'écrire (89) sous la forme :

$$\bar{\varphi}_1 = -\frac{ik \operatorname{ch} m(z+h)}{m \operatorname{sh} mh} \bar{\zeta}_1 \quad (93)$$

si, enfin, nous posons :

$$\zeta_1 = \zeta'_1 + i\zeta''_1 \quad (94)$$

ζ'_1 et ζ''_1 étant réels, nous obtenons :

$$\varphi_1 = \frac{k \operatorname{ch} m(z+h)}{m \operatorname{sh} mh} (\zeta''_1 \cos kt - \zeta'_1 \sin kt) \quad (95)$$

Nous pouvons substituer cette valeur dans l'équa-

(*) Il ne faut pas non plus qu'il y ait de parois obliques (non verticales) mais cela est exclu implicitement par la condition de profondeur constante.

tion (21). Il vient après quelques transformations et en tenant compte de la relation :

$$k^2 = mg \operatorname{th} mh$$

$$q = \frac{\rho g}{2 m \operatorname{th} mh} \times \left\{ \begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial \zeta''}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta''}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \zeta'}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \zeta'}{\partial y} \right)^2 \right] \cos 2kt \\ & + m^2 (\zeta''^2 - \zeta'^2) \left(\operatorname{th}^2 mh - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 mh} \right) \\ & - 2 \left[\frac{\partial \zeta'}{\partial x} \frac{\partial \zeta''}{\partial x} + \frac{\partial \zeta'}{\partial y} \frac{\partial \zeta''}{\partial y} \right. \\ & \left. + m^2 \zeta' \zeta'' \left(\operatorname{th}^2 mh - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 mh} \right) \right] \sin 2kt \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

En notation imaginaire ($q = \bar{q} e^{-2ikt}$) posons :

$$\bar{q} = \frac{\rho g \bar{A}}{2 m \operatorname{th} mh} \quad (97)$$

avec par conséquent :

$$\bar{A} = \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \zeta''}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta''}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \zeta'}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \zeta'}{\partial y} \right)^2 \\ & + m^2 (\zeta''^2 - \zeta'^2) \left(\operatorname{th}^2 mh - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 mh} \right) \\ & - 2i \left[\frac{\partial \zeta'}{\partial x} \frac{\partial \zeta''}{\partial x} + \frac{\partial \zeta'}{\partial y} \frac{\partial \zeta''}{\partial y} \right. \\ & \left. + m^2 \zeta' \zeta'' \left(\operatorname{th}^2 mh - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 mh} \right) \right] \end{aligned} \right] \quad (98)$$

La relation (69 bis), où nous posons $\omega = 2k$ et où μ_0 sera donc la racine positive de $g\mu_0 \operatorname{th} \mu_0 h = 4k^2$, donne après quelques transformations :

$$\zeta_2(x, y) = \frac{-i\mu_0 \operatorname{ch}^2 \mu_0 h e^{-i2kt}}{\operatorname{ch} \mu_0 h \operatorname{sh} \mu_0 h + \mu_0 h} \times \iint_{\xi, \eta} \bar{A}(\xi, \eta) H_0^{(1)}(\mu_0 r) d\xi d\eta \quad (99)$$

Rappelons qu'en principe le point d'intégration (ξ, η) parcourt tout le plan d'eau. Si celui-ci n'est pas indéfini, il pourra être nécessaire d'ajouter à φ_2 un potentiel d'ondes libres Ψ_2 de façon à satisfaire aux conditions aux limites, ainsi que cela a été exposé plus haut (formule 70).

La formule (99) pourra se prêter à l'intégration numérique, permettant ainsi de calculer les phénomènes du second ordre rayonnants dans des cas très généraux. L'exemple qui suit en est une illustration.

Calcul de diffraction (exemple numérique).

Nous terminerons cette série d'exemples par l'étude numérique d'un cas de diffraction d'une houle cylindrique régulière de période 10 s et d'amplitude 10 m se propageant par des profondeurs de 15 m (longueur d'onde environ 109 m). Cette houle aborde normalement une jetée verticale rectiligne mince infinie dans laquelle il y a une brèche de trois longueurs d'onde de large.

Ce problème a été étudié simultanément sur modèle réduit à l'échelle de 1/100 par les Services maritimes de la SOGREAH et par le calcul de

M. P. Gaillard, ingénieur des Services scientifiques.

Sur le plan théorique les formules utilisées pour résoudre le problème au premier ordre sont celles indiquées par MM. Biesel et Ranson [5] utilisant la deuxième fonction de Green, soit, avec nos notations, (formule 6 de l'article cité, dont le signe est erroné) :

$$\bar{\zeta}_1(x, y) = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} \right)_j H_0^{(1)}(mr_j) \Delta s_j \quad (100)$$

la largeur de la passe étant divisée en J segments de longueur Δs_j , r_j représentant la distance du centre du $j^{\text{ème}}$ segment du point x, y et $(\partial \bar{\zeta} / \partial n)_j$ représentant symboliquement la valeur de la dérivée normale « extérieure » de $\bar{\zeta}$ au centre du $j^{\text{ème}}$ segment, pour le mouvement extérieur non perturbé.

Cette dernière hypothèse est usuelle en matière de calculs de diffraction, elle n'est évidemment pas rigoureusement exacte dans le cas d'une brèche; physiquement elle correspondrait plus exactement au cas d'un batteur rectiligne (paroi oscillante) prolongé par deux parois fixes infinies. L'expérience montre cependant que les résultats obtenus sont valables avec une bonne approximation pour le cas de la brèche.

Notre intention n'est d'ailleurs pas de discuter de la valeur de l'approximation du premier ordre, mais de montrer comment, à partir de celle-ci, on peut calculer les corrections du deuxième ordre, ou d'une façon précise les termes rayonnants qui nous intéressent ici.

La formule (100) nous permet de calculer $\bar{\zeta}_1$ et donc ζ' et ζ'' en tout point du plan d'eau. Nous pouvons en déduire les dérivées partielles de ces fonctions nécessaires pour calculer $\bar{A}$ (formule 98) soit indirectement par « différences finies », en calculant les $\bar{\zeta}_1$ en des points voisins, soit directement en différenciant (100) qui devient :

$$\frac{\partial \bar{\zeta}_1}{\partial x} = -\frac{im}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} \right)_j H_1^{(1)}(mr_j) \cos \alpha_j \Delta s_j \quad (101)$$

$$\frac{\partial \bar{\zeta}_1}{\partial y} = -\frac{im}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} \right)_j H_1^{(1)}(mr_j) \cos \beta_j \Delta s_j$$

α_j et β_j représentant respectivement les angles avec Ox et Oy du vecteur allant du centre du $j^{\text{ème}}$ segment au point de coordonnées x et y (cf. fig. 4).

Une fois $\bar{A}$ calculé, on peut appliquer la formule (99) en tenant compte des remarques faites sur la prise en compte d'une paroi rectiligne (cf. formule 70 bis).

Le calcul numérique exige évidemment que l'intégrale (99) soit transformée en somme finie. Pour ce faire, on pourra, suivant des procédés classiques, diviser le plan xOy en rectangles de côtés $\Delta x, \Delta y$. Une autre difficulté subsiste du fait que les intégrales considérées doivent en principe s'étendre sur la totalité du plan xOy ; ceci est d'autant plus grave que le terme à intégrer ne décroît que lentement lorsque le point d'intégration s'éloigne vers l'infini; en fait, l'intégrale n'est d'ailleurs pas absolument convergente.

Sur le plan pratique, tout cela signifie que, pour obtenir une précision satisfaisante, il peut devenir nécessaire de faire porter l'intégration numérique sur un domaine extrêmement vaste; or les dimen-

sions des rectangles élémentaires $\Delta x \cdot \Delta y$ doivent rester petites par rapport à la longueur d'onde; on risque donc d'être conduit à des calculs extrêmement longs.

Heureusement les techniques usuelles de calcul numérique nous offrent plusieurs méthodes permettant de limiter considérablement le champ de l'intégrale sans perdre exagérément de précision. Celle que nous avons employée pour obtenir les résultats numériques ci-après consiste essentiellement à « tronquer » les fonctions de Bessel intervenant dans l'intégrale (99). A partir d'une certaine valeur de r , les valeurs de ces fonctions sont graduellement réduites jusqu'à s'annuler au-delà d'une autre valeur limite R .

Ceci limite donc effectivement les intégrations à des domaines n'excédant pas le cercle de rayon R entourant le point (xy) . En fait, nous avons pris $R = 10 \lambda_2$, λ_2 étant la longueur d'onde rayonnée du second ordre ($\lambda_2 = 2\pi/\mu_2$); les valeurs numériques étaient :

$$L = \frac{2\pi}{m} = 109 \text{ m}$$

(longueur d'onde du premier ordre),

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{\mu_2} = 38,4 \text{ m}$$

6/ Carte des amplitudes du second ordre (de creux à crête) dans le rectangle calculé. Les cotes sont en mètres pour une amplitude extérieure de 10 m (période : 10 s, profondeur : 15 m).

Second-order wave height plot (trough to crest) in the calculated rectangle. Levels are in metres for 10 m outside wave height (10 s period, 15 m depth).

7/ Lignes isophases des ondes du second ordre. Les lignes pleines représentent une des positions des crêtes au cours de leur déplacement indiqué par la flèche.

Constant-phase lines for second-order waves. Continuous lines are one of the wave crest positions during their travel as shown by the arrow.

La zone où les phénomènes rayonnants du second ordre ont été calculés est le petit rectangle représenté sur la figure 5. Ses dimensions sont $L \times L/2$ soit $109 \times 54,5 \text{ m}^2$.

Ainsi qu'il ressort des remarques précédentes, il est nécessaire que les valeurs du premier ordre soient calculées jusqu'à une distance $10 \lambda_2$ des points de ce rectangle. En fait, ces valeurs ont été calculées dans le grand rectangle représenté également sur cette figure et dont les dimensions sont $7,1 L \times 4,6 L$, soit : $7740 \times 502 \text{ m}^2$ environ.

Les rectangles élémentaires étaient des carrés de côté $L/10$ (10,9 m). Les valeurs du premier ordre ont donc été calculées en $71 \times 46 = 3266$ points soit, compte tenu de la symétrie du problème, pour 6532 points. Les calculs du second ordre ont été faits pour cinquante points dans le rectangle $L \times L/2$. Il est bien évident que, pour des calculs pratiques, une telle densité de points serait, pour les calculs du second ordre, parfaitement inutile; elle n'est justifiée ici que parce qu'il s'agit d'un travail de recherche et de mise au point. Pour la pratique, la densité des points de calcul du second ordre pourrait être considérablement réduite; par contre, un domaine beaucoup plus grand devrait être exploré.

L'essentiel des résultats du calcul est représenté sur les figures 6 et 7. La première donne une carte

des amplitudes de l'agitation du second ordre dans le rectangle où elle a été calculée. Cette carte est cotée en mètres (mesurés de creux à crête). La figure 7 donne une carte de lignes d'égaux phases, les lignes et traits pleins sont espacées de 2π en phases, elles représentent donc des positions possibles pour les « crêtes » des ondes secondaires.

On voit que le phénomène du second ordre calculé « ressemble » considérablement à une onde circulaire émise par le musoir le plus proche. Le phénomène réel n'est pas tout à fait aussi simple puisque, par exemple, les amplitudes (fig. 6) fluctuent assez considérablement au lieu de diminuer régulièrement en s'éloignant du centre d'émission. Nous n'avons pas cherché à interpréter dans le détail ces fluctuations, mais notons qu'elles s'expliquent facilement (qualitativement) par la superposition de deux systèmes d'ondes circulaires issus des deux musoirs. Ces modulations des phénomènes du second ordre n'ont donc aucun caractère anormal.

Comparaison avec les résultats du modèle réduit.

Il convient de signaler ici une lacune sur le plan des mesures expérimentales : l'amplitude incidente n'a pas été mesurée directement. Le modèle consistait essentiellement en une brèche dans une jetée rectiligne verticale, mais garnie extérieurement d'absorbants de houle. On pensait qu'un tel ensemble serait suffisamment absorbant pour que l'on puisse considérer la houle incidente comme égale à celle donnée par le batteur devant une plage parfaitement absorbante.

Ainsi, le seul « étalonnage » du batteur devait suffire à déterminer cette amplitude incidente et le batteur avait été réglé pour faire une amplitude de 60 mm (rappelons que l'échelle des longueurs du modèle était le $1/100^e$ par rapport à des profondeurs et des périodes « nature » de 15 m et 10 s). Au cours de l'exploitation des mesures qui avaient été faites essentiellement dans la zone calculée, on s'est aperçu que les ondes diffractées du premier ordre mesurées étaient sensiblement plus grandes que celles calculées avec cette amplitude incidente. Or de nombreuses études antérieures [6] avaient montré que les calculs de diffraction du premier ordre donnaient des ordres de grandeur convenables.

Le modèle ayant été détruit dans l'intervalle, on a dû se contenter de « reconstituer » l'amplitude extérieure à partir des mesures de l'onde diffractée du premier ordre. Cette reconstitution a conduit à adopter une amplitude incidente de 72 mm (au lieu de 60 mm) qui a été utilisée pour les comparaisons des phénomènes du second ordre.

Cette différence est probablement due à des réflexions multiples entre modèle et batteur; la brèche elle-même, malgré les apparences, n'est pas un absorbeur parfait et les absorbeurs disposés sur la face extérieure des ouvrages étaient aussi, nécessairement, assez sommaires, car on ne pouvait leur donner des dimensions importantes sans perturber considérablement l'expérience.

Les mesures utilisées pour les comparaisons ont été faites aux points marqués 9 H, 10 H, 11 H et

12 H visibles sur la figure 6 (ainsi qu'à un point 8 H de la même série).

La figure 8 a servi à reconstituer l'amplitude incidente à partir des phénomènes du premier ordre; l'échelle verticale de la courbe calculée a ainsi été ajustée au mieux pour correspondre aux mesures de la même zone (amplitude incidente 72 mm).

La figure 9 montre la comparaison entre les amplitudes calculées et mesurées, c'est-à-dire en fait extraites des mesures par analyse harmonique.

L'étude des phases n'a pas été faite à partir des mesures; elle aurait cependant été possible en principe. On peut toutefois affirmer que le phénomène physique se présente bien de la façon indiquée par le calcul des phases, c'est-à-dire essentiellement

comme un ensemble d'ondes circulaires émises par le musoir le plus proche. La figure 7 est d'ailleurs parfaitement convaincante sur ce point.

Dans l'ensemble, et compte tenu de la difficulté du problème, les résultats de ces comparaisons sont assez satisfaisants. Il serait néanmoins souhaitable de poursuivre, avec le maximum de précautions expérimentales, l'étude des phénomènes du second ordre liés au problème de la diffraction. Les calculs pourraient ainsi bénéficier d'une base sûre pour les applications pratiques. En particulier, il faudrait s'attacher à déterminer avec le maximum de précision l'amplitude a_0 incidente, puisque celle des phénomènes du second ordre est proportionnelle à a_0^2 . Une erreur de 20 % sur a_0 donne donc des erreurs de l'ordre de 40 % sur l'amplitude des phénomènes du second ordre. De ce point de vue, l'imprécision qui subsiste dans notre détermination de a_0 est très regrettable.

Références

- [1] F. BIESEL. — Equations générales au second ordre de la houle irrégulière. *La Houille Blanche*, n° 3, (mai-juin 1952).
- [2] P. FONTANET. — Théorie de la génération de la houle par un batteur plan. *La Houille Blanche*, n° 1 (janvier-février 1961).
- [3] W.H. MUNK. — Surf Beats. *Trans. Amer. Geophysical Univ.*, vol. 30, n° 6 (décembre 1949).
- [4] Mme DUBREUIL-JACOTIN. — Thèse sur la détermination rigoureuse des ondes permanentes périodiques d'amplitude finie. *Journal de Mathématiques, Gauthier-Villars* (1934).
- [5] F. BIESEL, R. RANSON. — Calculs de diffraction de la houle. Communication AIRH, Dubrovnik (1961).
- [6] J.P. MONTAZ. — Etude expérimentale systématique en vue de l'utilisation des modèles mathématiques pour l'étude de la diffraction pure de la houle. *La Houille Blanche*, n° 7 (1964).

Abstract

Radiating second-order phenomena in gravity waves

by F. Biesel *

From the mathematical point of view, an irrotational gravity wave problem (in a homogeneous inviscid fluid) consists of finding a velocity potential ϕ as the solution of a system of differential equations and boundary conditions. The latter include the "free surface" condition which, as a rule, states that the pressure at the free surface is constant (atmospheric pressure). They also include what could be called "generating boundary conditions" specifying, for instance, the motion of some solid boundaries and/or the existence of sources at infinity. These "generating conditions" (which, broadly speaking, are the non-zero "second members" of the equation system) exclude the solution $\phi = 0$ [or its equivalent $\phi = f(t)$] in other words they do cause at least some sort of motion to occur. Moreover if, as we shall assume, "parasite" forms of motion are eliminated by appropriate precautions (e.g. vanishing dissipative forces) the solution will be uniquely determined by the generating conditions. In particular, if there are no generating conditions, no motion will occur.

Since the set of wave equations is non-linear—principally because of the free surface condition—its rigorous solution is a rather formidable mathematical undertaking and, in fact, has only ever been successfully achieved in a few very special cases. One therefore has no alternative but to make do with approximate solutions, the simplest of which are obtained by solving the linearised system, and are generally referred to as "first order (of approximation) solutions". Because of their linearity, these solutions are very practical tools in wave analysis. For instance, the velocity potential satisfying several generating conditions is the sum of the velocity potentials referring to each generating condition taken individually (all other "second members" being zero). These individual potentials are themselves merely proportional to the corresponding second member, and so on.

Because of the linear character of these solutions, several powerful mathematical methods can be used to deal with the gravity wave problem. In fact, it can be claimed that, with these methods and the use of modern electronic computing facilities, it is now possible to at least find numerical solutions to the first order of approximation for most practical gravity wave problems.

Some of the equations are obviously not rigorously satisfied by first-order solutions; errors remain, the principal parts of which are proportional to the squares and binary products of the "second members". These errors, or rather their "quadratic" principal parts, can be corrected by modifying the first-order solution so as to convert it into a second-order solution. It can be shown that this second-order solution can be constructed in the following way:

1. A first order solution ϕ_1 is found, regardless of whether there is any need to find a second-order solution. This, as we said above, is a problem which can very often be solved satisfactorily;
2. A second-order correction ϕ_2 is added to ϕ_1 and must satisfy the following conditions: ϕ_2 must be a solution of the same linearised equations that are satisfied by ϕ_1 , but with different "second members", which are quadratic

* Directeur Scientifique de la Société Grenobloise d'Etudes et d'Applications Hydrauliques (SOGREAH) Grenoble, France.

functions of φ_1 and its derivatives. Thus, the first-order solution can be said to create what really amounts to generating boundary conditions for the second-order solution.

When Euler variables are used, the most important of these generating conditions for practical purposes are those created at the free surface where they will have the same generating effect as a pressure fluctuation. This shows that the second-order terms are almost as "easily" found as the first-order ones. Both obey the same set of equations, but the surface condition has a second member for the second-order terms, while there is usually none for the first-order terms. This does not introduce many new difficulties into the mathematical problem, however, and the second-order equations for gravity waves can just as well be solved with electronic machines as the first-order equations, except that they require a much greater expense of machine time.

We shall not go into computing details, but rather concentrate on the physical implications of the above. The second-order phenomenon can be considered as a "wave" system obeying the usual (linearised) wave equation but generated by a fluctuating pressure distribution on the free surface (and of course satisfying the other boundary conditions). This pressure q is given by the following relation :

$$q(x, y, t) = -\frac{\rho}{g} \int^t \frac{\delta \varphi_1}{\delta t} \frac{\delta}{\delta z} \left(\frac{\delta^2 \varphi_1}{\delta t^2} + g \frac{\delta \varphi_1}{\delta z} \right) dt + \rho V_1^2$$

where φ_1 is the first-order potential, x, y, z are tri-rectangular coordinates (Oz vertical upwards), and V_1 is the velocity ($\text{grad } \varphi_1$), all values being at $z = 0$ (free surface).

This formula is absolutely general. If, to be more specific, we consider a "monochromatic" first-order wave, i. e.,

$$\varphi_1(x, y, z, t) = \varphi_1(x, y, z) \cos kt + \varphi_1(x, y, z) \sin kt$$

it follows from the above that the frequency of the pressure fluctuations (the non-fluctuating part is of no importance) is twice that of the first-order wave.

It is easy to prove that any local surface pressure fluctuations of a given frequency will give rise to a circular wave of the same frequency radiating energy in all directions. Second-order phenomena can therefore be considered as resulting from waves emitted by practically all the points of the free surface at which some first-order motion occurs. They should therefore generally have a "radiating" character, i.e. second-order waves should be generated "by" the first order phenomena and then radiate independently, as free waves, and in particular, with the velocity corresponding to their own wave length and frequency.

The second-order solutions which have been worked out so far show, on the contrary, no apparent generation of such second-order waves. As a rule, it has only been found that individual waves are subject to local distortion (e.g. crests sharper than troughs), that special "accompanying waves" travel with irregular wave trains and so on, but these phenomena remain "linked" with the underlying first-order phenomena, and in particular, they propagate at the same velocity and not at the velocity corresponding to "free" waves of the same length and period.

The explanation of this apparent contradiction is that the known second-order solution in fact only concerns very simple cases, in all of which the second-order "radiation" is cancelled out by interference. How this happens is clearly illustrated in a two-dimensional monochromatic wave, for instance, where the second-order emission is distributed along the entire course of the first-order waves, the phase distribution being uniform through all possible angles.

Finally, for second-order radiation to occur, "something" must happen to the waves to disrupt their orderly array and upset the finely-balanced mutual cancelling out of their second-order emissions. In fact, "things" do happen to real waves which never conform to the rigid patterns of the available second-order theories (at least at most points of interest such as harbours, beaches, etc.). Real waves refract, diffract, break and ... are generated.

In all these cases, the theory outlined here indicates that some second-order radiation should occur, and allows to answer the question of how important this radiation is liable to be in practice. Experience has shown that this kind of question should not be brushed aside because, although the first-order phenomena are by far the largest, many second-order phenomena are nevertheless also of engineering significance. A mathematical model of wave penetration in a harbour must therefore also be able to allow for such effects, just in case.

In conclusion, it should be emphasized that the existence and occasional importance of second-order radiating phenomena has been confirmed by experience. Figure 2, for instance, shows clearly how second-order wave emission results from diffraction around the end of a pier. Although not very high, these waves penetrate into a region in which practically no first-order phenomena occur, so that they are the main wave action to be considered in these areas.

Figure 3 shows the sudden appearance of second-order radiation in a complicated refraction wave pattern, in which the first-order refraction pattern is shown by the white lines.

It is clear from this picture that "mild" refraction does not cause any appreciable second-order radiation; it mainly seems to originate from the most "disorderly" part of the wave pattern.