

Le tableau qui suit résume les diverses applications du four électrique à la fabrication de l'acier et l'importance pour chacune d'elles, du rôle réservé à l'énergie électrique.

TABLEAU DES FABRICATIONS POSSIBLES

PROCÉDÉS	OPÉRATIONS RÉALISÉES	ÉNERGIE MASSIQUE EN KW-H : TONNE
Fabrication intégrale partant du minerai.....	Fusion et réduction du minerai.....	2800 à 3200
	Oxydation des impuretés.....	
	Désoxydation du métal affiné.....	
	Recarburation à la nuance.....	
Partant de la fonte solide	Fusion du métal brut.....	1000 à 1100
	Oxydation des impuretés.....	
	Désoxydation du métal affiné.....	
	Recarburation à la nuance.....	
Partant d'un mélange de fonte et riblons solides	Fusion du métal brut.....	900 à 1000
	Oxydation partielle des impuretés.....	
	Désoxydation du métal affiné.....	
	Recarburation à la nuance.....	
Partant de la fonte liquide.....	Chauffage du métal.....	450 à 250
	Oxydation des impuretés.....	
	Désoxydation du métal affiné.....	
	Recarburation à la nuance.....	
Partant de la fonte liquide et des riblons solides.....	Fusion des riblons et chauffage du mélange.....	700 à 800
	Oxydation partielle des impuretés.....	
	Désoxydation du métal affiné.....	
	Recarburation à la nuance.....	
Partant de l'acier inachevé d'un convertisseur ou d'un four Martin.	Oxydation réduite des impuretés.....	200 à 300
	Désoxydation du métal affiné.....	
	Recarburation à la nuance.....	

Tous les procédés mixtes de la métallurgie actuelle peuvent être assimilés à l'un des exemples cités dans le tableau précédent qui donne une idée approchée de la consommation d'énergie correspondante et par suite du prix de revient possible, car il est bien évident que tous les perfectionnements mécaniques imaginés pour réduire le coût des manutentions seront appliqués dans l'avenir aux appareils électriques.

Il n'est pas douteux non plus que la conquête d'une nouvelle source d'énergie dans les gaz des hauts-fourneaux ne donne à bref délai un essor important à la création des appareils électriques d'élaboration de l'acier, surtout si le rôle de ces appareils est réduit à une simple mise au point après les opérations classiques du convertisseur ou du four Martin.

ÉTUDE SUR LES

**BARRAGES EN MAÇONNERIE**

et Murs de Réservoirs

(suite)

ÉTUDE DES ACTIONS MOLÉCULAIRES DÉVELOPPÉES DANS UN BARRAGE RECTILIGNE

Avant de procéder au calcul des actions moléculaires développées dans un barrage en maçonnerie, nous allons tout d'abord démontrer qu'un pareil barrage peut pratiquement être assimilé à une poutre encastree à une de ses extrémités et libre à l'autre.

Considérons, en effet, une console dont l'un des côtés AC est horizontal, et qui supporte une charge verticale  $F$ , (ou un système équivalent de forces verticales), et négligeons provisoirement le poids de cette console. Supposons, en

outre, qu'au lieu d'être encastree directement dans un mur vertical, cette console soit fixée, par des boulons ou des rivets tels que AB, contre une pièce qui, elle, est encastree dans le mur. Si le serrage des boulons est suffisant, tout se passe comme si la console et son encastrement formaient une seule pièce.

La charge verticale  $F$  produit, dans la section AB, un moment fléchissant  $M_1$  et un effet tranchant  $T$ . Cet effort tranchant tend à cisailer les boulons A et B et à faire glisser la console. Le moment fléchissant produit un effort d'arrachement de l'écrou du boulon A et un effort de compression de la console sur son siège en B. Supposons maintenant que l'on vienne à appliquer sur la console une force horizontale  $N$  (ou un système équivalent de forces horizontales). Cette force  $N$  va tendre à appliquer la console contre sa pièce d'encastrement, et sa composante en A va diminuer l'effort d'arrachement du boulon A. Si la force  $N$  est convenablement choisie, il pourra arriver, que, non seulement

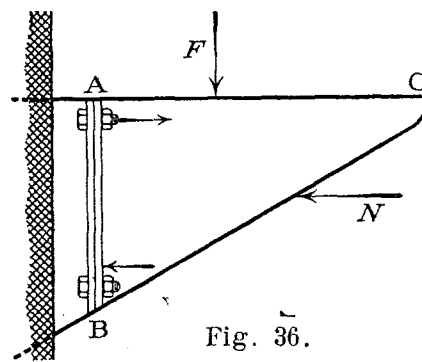


Fig. 36.

cet effort d'arrachement devienne nul, mais même qu'il se transforme à son tour en un effort de compression sur la pièce d'encastrement. Enfin, si la force  $N$  est assez grande, le frottement développé en AB pourra être supérieur à l'effort de glissement provoqué, suivant cette section, par

l'effort tranchant  $T$ . Si cette double condition est réalisée, il est bien certain que l'on peut enlever les deux boulons A et B, puisqu'ils n'ont plus à supporter aucun effort.

Faisons tourner maintenant toute la figure de 90°, de manière que la console et la force  $N$  deviennent verticales, et la charge  $F$  horizontale, nous trouvons que cette console représente exactement le cas d'un barrage en charge, la section de jonction AB devenant un joint horizontal quelconque, par exemple la surface de séparation du mur de barrage et du rocher, la pièce d'encastrement devenant le rocher lui-même. Si AB est une section quelconque à mi-hauteur, la partie inférieure du mur remplace la pièce précédente d'encastrement.

Si la force  $N$ , qui est ici le poids du barrage, était telle, en grandeur ou position, qu'il subsista encore en A un effort d'arrachement, il faudrait que la résistance des maçonneries à la traction soit suffisante pour compenser cet effort.

Puisqu'un barrage peut être assimilé à une poutre encastree, nous avons tous les éléments nécessaires pour pouvoir déterminer les efforts auxquels le barrage est soumis en chaque point.

En effet, l'état élastique en un point quelconque d'un corps est déterminé lorsqu'on connaît les actions moléculaires qui agissent sur ce point.

Soit M un point quelconque d'une section horizontale d'un barrage; considérons-le comme le sommet d'un parallépipède infiniment petit. L'axe longitudinal du barrage étant supposé rectiligne, et les forces extérieures auxquelles est soumis le barrage, c'est-à-dire son poids et la poussée de l'eau, restant constantes au fur et à mesure qu'on se déplace sur la section horizontale considérée et parallèlement à l'axe de l'ouvrage, les actions moléculaires parallèles à cet axe qui proviennent des forces extérieures

doivent être nulles. Les faces horizontales du parallépipède sont soumises à des pressions normales  $n$  et  $n + dn$  et à des actions tangentielles  $t_x$  et  $t_x + dt_x$ ; les faces verticales, parallèles à l'axe longitudinal du barrage, sont également soumises à des pressions normales  $n_1$  et  $n_1 + dn_1$  et à des actions tangentielles  $t_y$  et  $t_y + dt_y$ .

On sait que les actions moléculaires tangentielles horizontales et verticales sont égales entre elles, de sorte que  $t_x = t_y = t$ . En outre, les actions moléculaires normales et tangentielles doivent être reliées entre elles par les équations différentielles suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn}{dy} + \frac{dt_y}{dx} + Y &= 0 \\ \frac{dn_1}{dx} + \frac{dt_x}{dy} + X &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Si l'on ne considère que le poids  $N$  du barrage, la composante  $Y$  représente la variation du poids suivant les  $y$  et rapportée à l'unité de volume, elle est donc égale à  $K$ ; quant à la composante  $X$ , elle est évidemment nulle. Si maintenant l'on ne considère que la poussée horizontale  $F$  on voit immédiatement que  $X$  et  $Y$  sont nuls. On a donc toujours  $X = 0$  et  $Y = K$  ou  $0$ .

Ces équations (44) permettent de déterminer  $t$  et  $n_1$  lorsque l'on connaît  $n$ . Pour pouvoir déterminer exactement la valeur de cette dernière quantité, il faut avoir recours à la théorie mathématique de l'élasticité qui donne, en plus des équations (44), l'équation suivante dont la démonstration est donnée dans la note annexe que l'on trouvera à la fin de cet article :

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) (n + n_1) = 0 \quad (45)$$

Cette expression peut encore se mettre sous une autre forme. En effet, si l'on différencie la première des équations (44) par rapport à  $y$ , et la seconde par rapport à  $x$ , on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 n}{dy^2} &= \frac{d^2 n_1}{dx^2} = - \frac{d^2 t}{dx dy} & \text{d'où} \\ \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) (n + n_1) &= \frac{d^2 n}{dx^2} + 2 \frac{d^2 n}{dy^2} + \frac{d^2 n_1}{dy^2} = 0 \end{aligned} \quad (45')$$

Nous allons tout d'abord procéder au calcul de  $n$ .

Soit donc AB une section horizontale quelconque, et CD une section infiniment voisine dont G est le centre de gravité. Lorsque la poutre n'est soumise à aucun effort, les sections transversales AB et CD sont parallèles; mais, après

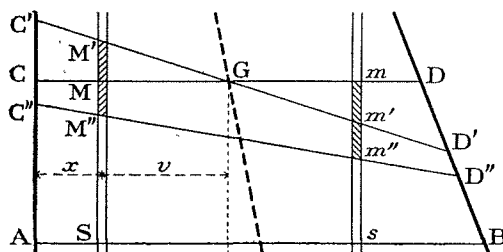


Fig. 37.

application de la force horizontale  $F$ , un élément vertical SM s'est allongé jusqu'en SM', tandis qu'un élément  $sm$  s'est raccourci jusqu'en  $sm'$  et la section CD s'est inclinée par rapport à AB et est venue en C'D'. L'effort de traction  $v_1$  correspondant à l'allongement MM' entre C et G (effort de compression entre G et D) est donné par une certaine relation  $\varphi(F, v)$  qui doit satisfaire à l'équation (45). En général, on ne sait pas trouver la fonction  $\varphi$ , car on est conduit à la résolution d'un problème d'analyse inextricable, aussi l'on

admet en pratique que les sections, planes avant l'intervention de la force  $F$ , restent planes après, et l'effort  $v_1$  est alors donné par la relation bien connue :

$$v_1 = \frac{M_1}{I} v$$

$M_1$  étant le moment fléchissant, développé par la force  $F$ , dans la section CD dont le moment d'inertie, par rapport à G, est  $I$ . La distance  $v$  du point M au point G est comptée comme positive de G en D et comme négative de G en C, de telle sorte que les efforts de traction soient négatifs, et les efforts de compression positifs.

Après application de la force verticale  $N$ , l'élément S'M' s'est raccourci en S'M'', tandis que l'élément  $sm'$  a continué à se raccourcir jusqu'en  $sm''$ , et la section C'D' est venue en C''D''. L'effort de compression correspondant n'est pas autre chose que la composante en chaque point de la force  $N$ . Cet effort varie avec  $v$  suivant une certaine loi qui, comme précédemment, doit satisfaire à la relation (45) mais qu'en pratique on admet être la loi du trapèze, de sorte que l'on peut écrire :

$$v_2 = \frac{N}{\Omega} + \frac{N x_1 v}{\Omega r^2}$$

$x_1$  étant la distance au point G du point d'application de  $N$  sur la section CD dont  $\Omega$  est la section et  $r$  le rayon de giration. Si l'on remarque que, pour les profils généralement employés, la valeur de la compression  $v_2$  est plus grande en C et plus petite en D que la compression moyenne, l'expression précédente peut s'écrire, en tenant compte des signes :

$$v_2 = \frac{N}{e} - \frac{M_2}{I} v$$

De sorte qu'il vient finalement, pour exprimer la valeur de la pression élastique  $n$  normale en chaque point d'une section horizontale :

$$n = v_1 + v_2 = \frac{N}{e} - \frac{M_2}{I} v + \frac{M_1}{I} v$$

ou, en représentant par  $M$  le moment résultant de  $F$  et de  $N$  par rapport à G :

$$n = \frac{N}{e} + \frac{M}{I} v$$

Il est facile de voir que la valeur de ce moment résultant  $M$  est bien exprimée par la formule (32) qui a déjà été donnée dans la description de la note de M. Maurice Lévy.

$$\text{à l'amont où } v = -\frac{e}{2} \quad \text{l'on a : } n' = \frac{N}{e} - 6 \frac{M}{e^2} \quad (8')$$

$$\text{à l'aval où } v = +\frac{e}{2} \quad \text{» } n'' = \frac{N}{e} + 6 \frac{M}{e^2} \quad (9')$$

Il est également facile de montrer que  $n'$  et  $n''$  correspondent bien également à celles qu'on obtient au moyen des formules usuelles que nous avons donné au début de nos articles. On a en effet, pour le cas le plus fréquent où le niveau de l'eau est inférieur au couronnement :

$$M = M_1 - M_2 = \frac{1}{6} (y - h)^3 - N_1 \left( \frac{e}{2} - d' \right)$$

$d'$  désignant comme précédemment la distance du centre de gravité des forces verticales agissant sur la section considérée au point situé à l'amont de cette section.

$$d' = e - b - \frac{(y - h)}{3} \times \frac{(y - h)^2}{2 N_1}$$

En portant cette valeur de  $d'$  dans l'équation précédente on retrouve immédiatement :

$$n' = \frac{N_1}{e} \left( 6 \frac{b}{e} - 2 \right) \quad n'' = \frac{N_1}{e} \left( 4 - 6 \frac{b}{e} \right) \quad (8), (9)$$

Si l'on transporte l'origine des abscisses au parement amont, l'expression de  $n$  devient :

$$n = \frac{N}{e} - \frac{Me}{2I} + \frac{M}{I} x = P + Qx$$

En portant cette valeur de  $n$  dans les équations (44), il vient :

$$\frac{dt}{dx} = - \frac{dn}{dy} + K \quad \text{et} \quad \frac{dn_1}{dx} = - \frac{dt}{dy}$$

et 
$$t = Kx - \frac{dP}{dy} x - \frac{dQ}{dy} \frac{x^2}{2} + \phi$$

$\phi$  étant une fonction de  $y$  indépendante de  $x$  qui représente la valeur de  $t$  sur le parement amont où  $x = 0$ . Si ce parement amont est vertical  $t_0 = 0$  et  $\phi = 0$ .

$$n_1 = \frac{d^2P}{dy^2} \frac{x^2}{2} + \frac{d^2Q}{dy^2} \frac{x^3}{6} + \phi_1$$

$\phi_1$  étant également une fonction de  $y$  indépendante de  $x$ . La pression élastique à l'amont, pour  $x = 0$ , doit être égale à la pression de l'eau, de sorte que, si  $y$  représente la hauteur du mur et  $h$  la distance du niveau de l'eau au sommet du mur, on doit avoir, avec un parement vertical :  $\phi_1 = y \pm h$ .

On retrouve ainsi les équations (33) de la méthode de M. Maurice Lévy.

L'expression qui donne la valeur de  $t$  peut s'obtenir d'une autre manière.

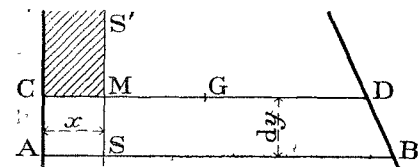


Fig. 38.

En effet, sous l'action de la charge  $F$ , l'effort de traction  $v_1$  développé dans un élément vertical de largeur  $dx$ , tel que SM, a pour valeur, en un point M d'abscisse  $x$  d'une section CD :

$$u_1 = v_1 dx = \left( \frac{M_1}{I} x - \frac{M_1 e}{2I} \right) dx = (P_1 + Q_1 x) dx$$

Sur la partie du barrage comprise entre le parement amont (supposé vertical) et l'élément vertical SM, figure 38, l'effort total  $U_1$  est :

$$U_1 = \int_0^x v_1 dx = \frac{M_1}{I} \frac{x^2}{2} - \frac{M_1 e}{2I} x$$

Sur la section AB, infiniment voisine, l'effort total est de même :

$$U_1' = \frac{M_1 + dM_1}{I + dI} \frac{x^2}{2} - \frac{(M_1 + dM_1)(e + de)}{2(I + dI)} x$$

La différence  $U_1' - U_1$  représente le cisaillement total entre CM et AS, et, comme ce cisaillement est équilibré par les actions moléculaires développées sur une section de longueur SM =  $dy$  et de largeur égale à 1 m., l'effort  $t$  par unité de surface est donc :

$$t_1 = \frac{U_1' - U_1}{dy} = \frac{d}{dy} \frac{M_1 e}{2I} x - \frac{d}{dy} \frac{M_1}{I} \frac{x^2}{2} = - \frac{dP_1}{dy} x - \frac{dQ_1}{dy} \frac{x^2}{2}$$

Telle est la valeur du cisaillement vertical sous l'action de la charge  $F$ . C'est également celle du cisaillement horizontal, puisque ces deux cisaillements sont égaux.

La somme des diverses valeurs de  $t_1$ , depuis 0 jusqu'à  $e$ , doit être égale à l'effort tranchant  $T$  développé sur toute la section horizontale, l'on doit donc avoir :

$$\int_0^e t_1 dx = T = \frac{dM_1}{dy}$$

ce qu'il est facile de vérifier en remarquant que :  $\frac{-e}{2I} = \frac{6}{e^2}$

et que :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dy} \frac{M_1 e}{2I} &= \frac{6}{e^2} \left[ \frac{dM_1}{dy} - 2 \frac{M_1}{e} \frac{de}{dy} \right] \\ \frac{d}{dy} \frac{M_1}{I} &= \frac{12}{e^3} \left[ \frac{dM_1}{dy} - 3 \frac{M_1}{e} \frac{de}{dy} \right] \end{aligned} \right.$$

Dans le cas d'un barrage à profil triangulaire dont le sommet coïncide avec le niveau de l'eau, cette dernière équation est identiquement nulle, de sorte que la valeur de  $t_1$  croît continuellement d'une façon linéaire depuis le parement amont jusqu'au parement aval (\*).

Passons maintenant au calcul du cisaillement  $t_2$  correspondant au cas du barrage travaillant à vide sous la seule action de son poids  $N$ .

De prime abord, il peut sembler qu'il ne doive y avoir aucun cisaillement dans un mur ne travaillant que sous son propre poids et, de fait, il n'y en a point si ce mur est rectangulaire ou triangulaire avec parement amont vertical, mais, dans le cas général, il doit y en avoir, ainsi que le montre le raisonnement suivant.

Imaginons que l'on construise un mur avec des briques appareillées (ou des moellons d'appareil), et supposons de plus que ces briques ne soient reliées entre elles par aucune matière adhérente, et qu'elles soient simplement placées les unes au-dessus des autres, sans entrecroisement, de manière à réaliser des sections verticales nettement définies. Il est bien évident que, dans un pareil mur, la pression par unité de surface à la base de chaque colonne verticale est proportionnelle à la hauteur  $\lambda$  de cette colonne et égale à  $K\lambda$ . De sorte que, si l'on porte, à partir d'une droite AB, des ordonnées proportionnelles à  $K\lambda$ , on obtiendra, comme courbe des pressions, une courbe BCD dont chaque ordonnée, pour une même abscisse  $x$ , sera proportionnelle à l'ordonnée correspondante de la courbe du parement aval. Il s'en suit que, dans ce cas, le profil du mur peut représenter en même temps la loi de la variation des pressions sur la base. Cette hypothèse peut représenter le cas limite d'un mur construit avec des matériaux qui seraient reliés entre eux par un mortier n'ayant qu'une très faible résistance à la traction et au cisaillement.

Si nous supposons maintenant que le mur soit construit en matériaux parfaitement reliés entre eux, tel qu'un massif de béton armé par exemple, les parties du massif les plus chargées vont réagir sur les parties les moins chargées et leur transmettre une partie de leur pression ; il en résultera : 1° que la pression en chaque point de la base ne sera plus, en général, proportionnelle à l'ordonnée du parement aval correspondant en ce point, mais qu'elle variera suivant une certaine loi régie par l'équation (45) et, 2° qu'il va se produire à travers le massif des efforts de cisaillement.

(\*) Dans les traités élémentaires de résistance des matériaux on démontre que les actions moléculaires tangentielles développées dans un solide prismatique travaillant à la flexion ont leur plus grande intensité au centre de gravité de la section transversale et qu'elles sont nulles sur les bord. Ceci n'est vrai que si le moment d'inertie  $I$  est constant.

Si l'on porte, à partir de la même droite AB que précédemment, des ordonnées proportionnelles à la pression correspondante en chaque point, on obtient une droite PQ qui représente la loi du trapèze. (Voir fig. 39).

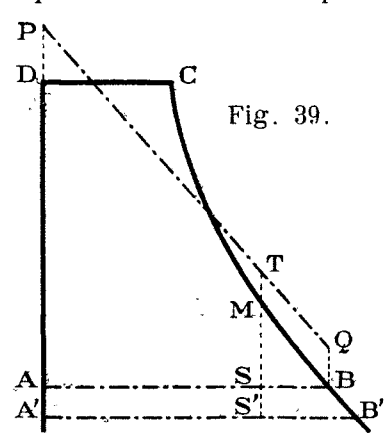


Fig. 39.

On voit immédiatement que, pour les profils rectangulaire et triangulaire avec l'un des parements vertical, la droite PQ se confond avec la courbe BCD de sorte que, pour ces deux cas, il ne doit y avoir nulle part cisaillement et que la loi du trapèze à vide doit être exacte. Nous montrerons plus loin que pour ces deux cas particuliers la loi du trapèze correspond bien à la théorie

mathématique de l'élasticité.

Les forces qui agissent à la gauche d'une section verticale SM (fig. 39) sont : d'une part le poids de la partie du barrage comprise entre SM et le parement amont, et d'autre part les réactions de la partie inférieure à AS sur la partie supérieure. Leur différence représente l'effort tranchant vertical  $U_2$  au dessus de AS, le long de SM'. En AS' on a :

$$U_2 = \int_0^x \left( \frac{N}{e} + \frac{M_2 e}{2I} - \frac{M_2}{I} x \right) dx - K \int_0^x y dx$$

$$U_2 = P_2 x + Q_2 \frac{x^2}{2} - K \int_0^x y dx$$

En A'S' on écrirait pour  $U_2$  une équation semblable.

La différence  $U_2 - U_2'$  représente l'effort tranchant entre AS et A'S'. L'effort de cisaillement  $t_2$  le long de SS' a donc pour valeur :

$$t_2 = \frac{U_2 - U_2'}{dy} = - \frac{d^2 P}{dy} x - \frac{d^2 Q}{dy} \frac{x^2}{2} + Kx$$

$$t_2 = Kx - \frac{d}{dy} \frac{N}{e} x - \left[ \frac{d}{dy} \frac{M_2 e}{2I} x - \frac{d}{dy} \frac{M_2}{I} \frac{x^2}{2} \right]$$

Pour les profils triangulaire ou rectangulaire, la loi du trapèze attribuée à  $v_2$  a une valeur précisément égale en chaque point à celle du poids de l'élément vertical passant par ce point, de sorte que, pour ces profils, l'on a partout  $t_2 = 0$ .

On a donc, finalement, pour la valeur du cisaillement  $t$  :

$$t = t_1 + t_2 = (K - P') x - Q' \frac{x^2}{2}$$

Sur le parement amont on a  $t_1 = t_2 = t = 0$ .

Sur le parement aval on a, toutes réductions faites,

$$t_{e1} = 6 \frac{M_1}{e_2} \frac{de}{dy} \quad t_{e2} = \left( \frac{N}{e} - 6 \frac{M_2}{e_2} \right) \frac{de}{dy}$$

$$t = \left( \frac{N}{e} + 6 \frac{M}{e^2} \right) \frac{de}{dy} = n'' \operatorname{tg} \beta$$

$\beta$  désignant l'angle que fait avec la verticale la tangente à la courbe du parement aval au point considéré.

On trouverait de même que l'on a sur le parement amont  $n_1 = y \pm h$  en charge, et  $n_1 = 0$  à vide, et que, sur le parement aval, on a aussi :

$$n_1 = 6 \frac{M_1}{e_2} \left( \frac{de}{dy} \right)^2 \quad \text{pour la charge } F \text{ seule.}$$

$$n_1 = \left( \frac{N}{e} - 6 \frac{M_2}{e_2} \right) \left( \frac{de}{dy} \right)^2 \quad \text{pour le poids } N \text{ seul.}$$

$$n_1 = \left( \frac{N}{e} + 6 \frac{M}{e^2} \right) \left( \frac{de}{dy} \right)^2 = n'' \operatorname{tg}^2 \beta$$

Jusqu'ici, nous avons admis implicitement que le parement amont était vertical et que la loi du trapèze donnait bien les valeurs exactes de la pression élastique  $n$  normale en un point quelconque d'une section horizontale; mais il est facile de généraliser la théorie précédente en admettant que le parement amont est quelconque et même que la loi de répartition de  $n$  n'est pas celle du trapèze.

En effet, nous savons qu'un point M d'un élément quelconque du parement amont peut être considéré comme soumis à l'action de deux forces, l'une horizontale et égale à  $y dy$ , c'est-à-dire à la poussée de l'eau, proprement dite, l'autre verticale et égale à  $y dx$ , c'est-à-dire au poids de la colonne d'eau qui surmonte l'élément considéré. La poussée de l'eau est exactement la même que s'il s'était agi d'un parement vertical, et, si nous nous reportons au calcul de la pression élastique normale  $v_1$ , sous l'action de la force horizontale  $F$ , nous voyons que tout ce qui a été dit précédemment sur ce sujet reste applicable, puisque nous n'avions fait aucune hypothèse sur la nature du parement amont, de sorte que la valeur de  $v_1$  sera exactement la même que précédemment. Si l'on n'admet pas la légitimité de la loi du trapèze, le raisonnement reste absolument le même, mais les calculs seraient alors beaucoup plus compliqués, car les sections CD, qui étaient planes avant la déformation, ne le seraient généralement plus après

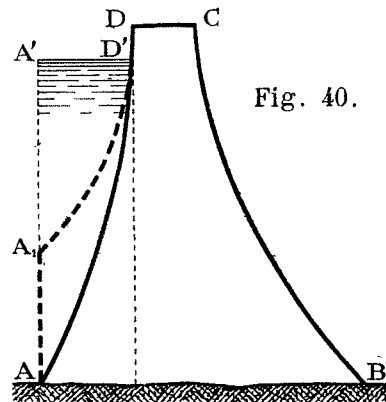


Fig. 40.

Pour tenir compte des forces verticales qui agissent sur le parement amont, il faut ajouter au poids propre du mur le poids du volume d'eau AA'D', mais ce poids peut être remplacé, dans la pensée, par un égal poids de maçonnerie, ce qui revient à remplacer le poids de l'eau AA'D' par celui d'une maçonnerie fictive AA'D', c'est-à-dire finalement à considérer le mur comme ayant un profil homogène AA'DCB. Alors, tout ce que nous avons dit précédemment pour le calcul de la pression élastique normale  $v_2$  sous l'action de la force verticale  $N$  reste ici également applicable, puisque nous n'avions fait non plus aucune hypothèse sur la nature du parement amont. La valeur de  $v_2$  ne sera pas en général la même que précédemment, puisque  $N$  et  $M_2$  sont modifiés, mais, si l'on emploie la loi du trapèze, la pression élastique normale résultante  $n$  n'en sera pas moins donnée par une équation de la forme :

$n = P + Qx$ .

Passons maintenant au calcul du cisaillement  $t$ .

Sous l'action de la poussée de l'eau, l'effort total  $U$ , entre

A et S de la figure 41, est :  $U_1 = \int_0^x v_1 dx$

De même, sur la section infiniment voisine A'B', l'effort

total entre A' et S' est :  $U_1' = \int_{dx}^x \left( v_1 + \frac{dv_1}{dy} dy \right) dx$

De sorte que le cisaillement  $t_1$ , a pour valeur :

$$t_1 = \frac{U_1 - U_1'}{dy} = -v_1 \left( \frac{dx}{dy} \right)_0 - \int_0^x \frac{dv_1}{dy} dx$$

En A, sur le parement amont, il reste  $t_{01} = -v_1' \operatorname{tg} \beta_1$ ;  $\beta_1$  étant l'angle que fait avec la verticale la tangente en A à la courbe du parement amont et  $v_1'$  la valeur de la pression élastique normale à l'amont.

On obtiendrait la valeur du cisaillement  $t_{e1}$  sur le parement aval en intégrant depuis 0 jusqu'à  $e$ , mais il est plus simple de remarquer que, si au lieu de partir du point A, nous étions parti du point B, nous serions arrivés à une équation identique :

$$t_1 = -v_1'' \operatorname{tg} \beta - \int_0^x \frac{dv_1}{dy} dx$$

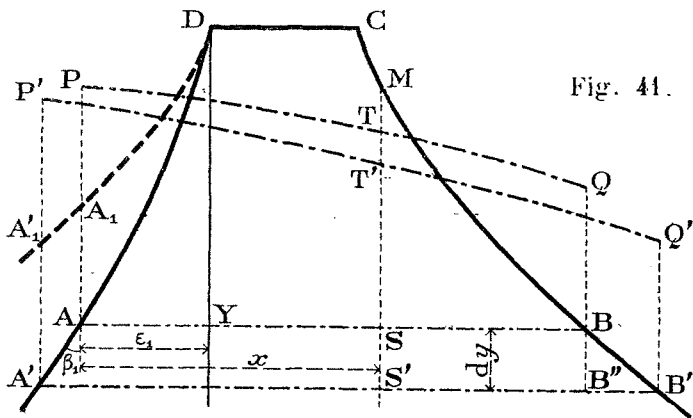
qui nous aurait donné la valeur du cisaillement en B en y faisant  $x = 0$ . Si nous renversons les signes, puisque nous allons en sens contraire, nous voyons donc que la valeur du cisaillement sur le parement aval est :  $t_{e1} = v_1'' \operatorname{tg} \beta$ .

Dans tout ceci,  $v_1$  est absolument quelconque et peut être supposé satisfaire aux équations (45) et correspondre à la théorie mathématique de l'élasticité.

Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe représentative de  $t_1$  serait donné en chaque point par la relation :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{dt_1}{dx} = -\frac{dv_1}{dy}$$

Sous l'action du poids du mur, les forces qui agissent à la gauche d'une section verticale SM sont comme précédemment : d'une part le poids de la partie du mur AA<sub>1</sub>DCMS (voir fig. 41), et, d'autre part, les réactions de la partie du mur inférieure à AS sur la partie supérieure. En chaque



point de la base AS, ces réactions peuvent être représentées, à l'échelle  $1/K$ , par les ordonnées de la courbe PQ que nous supposons connue et correspondre à la théorie mathématique de l'élasticité. L'effort tranchant total  $U_2$  au-dessus de AS et le long de SM sera donc représenté par la différence des sommes de ces deux actions, de sorte que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{K} U_2 = \text{Surf. APTS} - \text{Surf. AA}_1 \text{DCMS}$$

Pour la section horizontale infiniment voisine A'B' on écrirait de même :

$$\frac{1}{K} U_2 = \text{Surf. A'P'T'S'} - \text{Surf. A'A}_1 \text{DCM'S'} \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{1}{K} \left[ \frac{U_2 - U_2'}{dy} \right] = \text{Surf. PP''T'T} - \text{Surf. A}_1 \text{P'P''A}_1 (*)$$

or  $\text{Surf. PP''T'T} = \int_0^x \text{TT} dx = \int_0^x \left( dy - \frac{1}{K} \frac{dv_2}{dy} dy \right) dx$

et  $\text{Surf. A}_1 \text{P'P''A}_1 = A_1 \text{P''} dx_0 = \frac{1}{K} \left[ v_2 - (y \pm h) \right] dx_0$

(\*) Le point P'', oublié sur la figure, est à l'intersection de P'T' et de AP. De même Q'' est à l'intersection de P'Q' et de QB.

$v_2$  désignant la valeur que prend  $v_2$  sur le parement amont et  $h$  la hauteur du couronnement au-dessus du niveau de l'eau. (La courbe A<sub>1</sub>A<sub>1</sub>D de la figure 41 suppose que la hauteur  $h$  est nulle). Il vient donc finalement pour la valeur du cisaillement  $t_2$  :

$$t_2 = \frac{U_2 - U_2'}{dy} = - \left[ v_2 - (y \pm h) \right] \frac{dx_0}{dy} - \int_0^x \frac{dv_2}{dy} dx + Kx$$

La valeur du cisaillement  $t_{02}$  sur le parement amont est donc :

$$t_{02} = - \left[ v_2 - (y \pm h) \right] \operatorname{tg} \beta_1$$

En raisonnant comme précédemment, on trouverait que la valeur du cisaillement est  $t_{e2} = v_2'' \operatorname{tg} \beta$ , sur le parement aval. D'autre part l'on a pour le point B :

$$\begin{aligned} \text{Surf. APQB} &= \text{Surf. AA}_1 \text{DCB} && \text{et} \\ \text{Surf. A'P'Q''B''} &= \text{Surf. A'P'Q'B'} - \frac{v_2''}{K} dx_e \end{aligned}$$

mais comme  $\text{Surf. A'P'Q'B'} = \text{Surf. A'A}_1 \text{DCB}$ , on voit immédiatement que le cisaillement  $t''_2$  en B est bien donné par l'expression :

$$t''_2 = v_2'' \frac{dx_e}{dy} = v_2'' \operatorname{tg} \beta$$

Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe représentative de  $t_2$  aurait pour valeur en chaque point :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{dt_2}{dx} = K - \frac{dv_2}{dy}$$

Pour le barrage en charge le cisaillement  $t$  aurait donc finalement pour valeur :

$$t = - \left[ n' - (y \pm h) \operatorname{tg} \beta_1 \right] - \int_0^x \left( K - \frac{dn}{dy} \right) dx$$

Dans le cas le plus général  $n$  est de la forme

$$n = n' + \varphi(x, y)$$

$n'$  ne contenant pas de termes en  $x$ . On en tire :

$$\frac{dn}{dy} = \frac{dn'}{dy} + \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx_0}{dy}$$

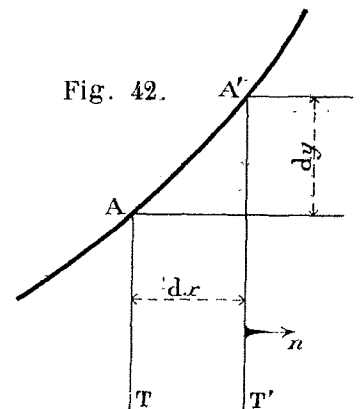
Dans le cas où la loi du trapèze sera applicable on aura :

$$\frac{dn}{dy} = P + Q \operatorname{tg} \beta_1 + Q' x$$

La valeur du cisaillement  $t$  pourrait encore se mettre sous une autre forme, ce qui va nous permettre de calculer la valeur  $n'_1$  de la pression élastique normale à tout élément vertical du parement amont. Considérons en effet une section verticale, telle que AT, faite par un point A du parement amont. Cette section verticale est soumise à des pressions horizontales normales  $n_1$ , et, si nous prenons comme origine des  $x$  et des  $y$  le point A, en admettant comme positive la direction AT, la somme de ces pressions, de A en T, est égale à :

$$V = \int_0^y n_1 dy$$

Pour une section infiniment voisine A'T', distante de  $dx$ , la somme des pressions est :



$$V' = \int_{-y_1}^y \left( n_1 + \frac{dn_1}{dx} dx \right) dy - y_1 dy$$

$y_1$  désignant la hauteur de l'eau au-dessus du point A.

La différence  $V - V'$  représente en T l'effort tranchant total entre A en T suivant l'horizontale TT'. On a donc, pour la valeur de l'intensité moléculaire du cisaillement, la nouvelle expression :

$$t = \frac{V - V'}{dx} = - \int_0^y \frac{dn_1}{dx} dy - n_1 \left( \frac{dy}{dx} \right)_0 + y_1 \left( \frac{dy}{dx} \right)_0$$

Au point A du parement amont, où  $y = 0$ , il reste simplement, en désignant toujours par  $\beta_1$  l'angle de la tangente à la courbe du parement amont avec la verticale :

$$t' (y_1 - n'_1) \cotg \beta_1$$

Maintenant, si l'on remplace  $t'$  par sa valeur précédemment trouvée, on a :

$$- [n' - (y \pm h)] \tg \beta_1 = (y - n'_1) \cotg \beta_1$$

d'où, en remplaçant  $y_1$  par  $(y \pm h)$  :

$$n'_1 = (y \pm h) + [n' - (y \pm h)] \tg^2 \beta$$

En raisonnant comme précédemment on verrait qu'au parement aval on a :  $n''_1 = n'' \tg^2 \beta$

Quant à la valeur de  $n_1$  pour un point quelconque d'une section horizontale, elle sera donnée par l'expression :

$$n_1 = y \pm h + [n' - (y \pm h)] \tg^2 \beta_1 - \int_0^x \frac{dt}{dy} dx$$

Dans le cas le plus général  $t$  est de la forme :

$$t = (y - n'') \tg \beta_1 + \psi(x, y) \quad \text{d'où}$$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{d}{dy} (y - n'') \tg \beta_1 + \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dx} \frac{dx_0}{dy}$$

Si la loi du trapèze est applicable, et si  $\beta_1$  reste constant dans le voisinage du point A, on a :

$$\frac{dt}{dy} = (1 - 2P'') \tg \beta_1 - Q \tg^2 \beta_1 - Q'x \tg \beta_1 - P''x - Q'' \frac{x^2}{2}$$

Au lieu de prendre comme origine le point A du parement amont, et de changer d'axe des  $y$  avec chaque changement de section horizontale AB, on peut rapporter les abscisses d'un point quelconque S de chacune de ses sections à un même axe fixe DY, passant par le couronnement du barrage. Dans ce cas, au lieu d'être 0 et  $e$ , les abscisses des points A et B des parements deviennent  $-\varepsilon_1$  et  $\varepsilon$ ; quant à celle du point S elle devient  $x_1$ . Les valeurs de  $t$  et de  $n_1$  s'obtiennent alors en intégrant, non plus de 0 à  $e$ , mais bien de  $-\varepsilon_1$  à  $\pm x_1$ , suivant que le point S se trouve à droite ou à gauche de DY (fig. 41).

Si nous admettons maintenant que la pression élastique normale  $n$  varie avec  $x$  suivant la loi du trapèze, nous arrivons aux formules données par M. Maurice Lévy, dans sa communication à l'Académie des Sciences du 5 août 1895 :

$$n' = \frac{N_1}{\varepsilon + \varepsilon_1} - 6 \frac{M}{(\varepsilon + \varepsilon_1)^2} \quad n'' = \frac{N_1}{\varepsilon + \varepsilon_1} + 6 \frac{M}{(\varepsilon + \varepsilon_1)^2}$$

$$n = \frac{n''(x_1 + \varepsilon_1) - n'(x_1 - \varepsilon_1)}{\varepsilon + \varepsilon_1} = P + Q x_1$$

$$P = n' + Q \varepsilon_1 \quad Q = 12 \frac{M}{(\varepsilon + \varepsilon_1)^3}$$

$$t = (K - P'') (x_1 + \varepsilon_1) - Q' \frac{x_1^2 - \varepsilon_1^2}{2} - (P - Q \varepsilon_1 - y) \varepsilon'_1$$

$$n_1 = \left\{ y + (P - Q \varepsilon_1 - y) \varepsilon'_1 + P'' \frac{x_1^2 - \varepsilon_1^2}{2} + Q'' \frac{x_1^3 + \varepsilon_1^3}{6} \right\} \\ - \left\{ \mp (x_1 + \varepsilon_1) \frac{d}{dy} \left[ (P - Q \varepsilon_1 - y) \varepsilon'_1 - (K - P'') \varepsilon_1 - Q' \frac{\varepsilon_1^2}{2} \right] \right\}$$

Le moment de flexion  $M$  a ici pour valeur :

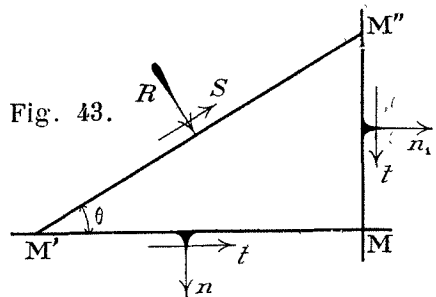
$$M = \left\{ \begin{aligned} & \frac{K}{2} \left[ \int_0^y (\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2) dy - (\varepsilon - \varepsilon_1) \int_0^y (\varepsilon + \varepsilon_1) dy \right] \\ & + \frac{y^3}{6} - \int_0^y \varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_1}{dy} dy - \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2} \int_0^y y \frac{d\varepsilon_1}{dy} dy \end{aligned} \right\}$$

$Q$  a ici la même valeur que dans le cas précédent où  $P$  était égal à  $n'$ , tandis que maintenant  $P$  est ici égal à :

$$n' - Qy \tg \beta_1.$$

Maintenant que nous connaissons en chaque point les valeurs de  $n$ ,  $n_1$  et  $t$ ; nous pouvons calculer les valeurs de la compression maxima

A et du cisaillement maximum  $C$ . Soit  $M$  un point quelconque du barrage et  $M M' M''$  un élément de prisme à base triangulaire dont la longueur des arêtes parallèles à l'axe longitudinal de l'ouvrage est de 1 m. et désignons par  $R$  et par  $S$  l'intensité des actions moléculaires normale et tangentielle agissant sur la face inclinée  $M' M''$ . Soit  $\theta$  l'angle d'inclinaison de l'élément  $M' M''$  sur l'axe des  $x$ . Les équations d'équilibre sont ici :



$$\left. \begin{aligned} R ds \sin \theta + S ds \cos \theta &= n_1 dy + t dx \\ R ds \cos \theta - S ds \sin \theta &= t dy + n dx \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Si l'élément  $M' M''$  vient coïncider avec le parement amont, l'angle  $\theta$  est le complément de  $\beta_1$ , de plus  $S$  est nul et  $R$  devient égal à la pression de l'eau  $(y \pm h)$  sur le parement, de sorte que l'on a, sur ce parement :

$$\left. \begin{aligned} t' &= (y \pm h - n'') \tg \beta_1 \\ n'_1 &= y \pm h + [n' - (y \pm h)] \tg^2 \beta_1 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Si l'élément  $M' M''$  vient coïncider avec le parement aval, il faut changer le signe de l'angle  $\beta$ , en outre  $R = S = 0$ , de sorte que l'on a sur ce parement :

$$t'' = n'' \tg \beta \quad n'' = n''_1 \tg^2 \beta. \quad (48)$$

Expressions que nous avons déjà trouvées précédemment d'une autre façon.

En résolvant les deux équations (46) par rapport à  $R$  et à  $S$  il vient :

$$R = \frac{n + n_1}{2} + \frac{n - n_1}{2} \cos 2\theta + t \sin 2\theta \quad (49)$$

$$S = \frac{n_1 - n}{2} \sin 2\theta + t \cos 2\theta \quad (50)$$

Nous aurons le maximum de  $R$  en résolvant l'équation :

$$\frac{dR}{d\theta} = - (n - n_1) \sin 2\theta + 2t \cos 2\theta = 0$$

$$\text{d'où l'on tire : } \left\{ \begin{aligned} \tg 2\theta_1 &= \frac{2t}{n - n_1} \\ \theta_1 &= \frac{1}{2} \text{arc tg } \frac{2t}{n - n_1} + m \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$m$  étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

Or, si l'on avait résolu l'équation (50), on aurait trouvé la même valeur de  $\tg 2\theta$ , on voit donc que  $R$  est maximum lorsque  $S$  est nul. La seconde des équations (51) montre, en outre, qu'il existe deux sections perpendiculaires l'une à l'autre, appelées sections principales pour lesquelles cette

condition est remplie. Les lignes qui représentent les traces de ces sections sur le plan de la figure (43) sont appelées lignes isostatiques.

En tirant de l'équation (51) les valeurs de  $\sin 2\theta_1$  et  $\cos 2\theta_1$  et les portant dans l'équations (49), et en appelant  $A$  la compression maxima et  $B$  la compression minima, on retrouve les formules de M. Maurice Lévy :

$$\left. \begin{aligned} A \\ B \end{aligned} \right\} = \frac{n + n_1}{2} \pm \sqrt{(n - n_1)^2 + 4t^2} \quad (34), (35)$$

En formant la dérivée seconde de cette expression on verrait que l'une des valeurs est maxima quand l'autre est minima.

Si l'élément  $M' M''$  coïncide avec le parement amont, celui-ci étant quelconque, on a :

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{2(y \pm h - n') \operatorname{tg} \beta_1}{[n' - (y \pm h)] [1 - \operatorname{tg}^2 \beta_1]} = -\operatorname{tg} 2\beta_1$$

et 
$$\theta_1 = m \frac{\pi}{2} - \beta_1$$

C'est-à-dire que les sections principales sont respectivement perpendiculaires et parallèles au parement amont, et ceci est vrai aussi bien à vide qu'en charge. Si le parement amont est vertical  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\beta_1 = 0$ , c'est-à-dire que les sections principales sont respectivement verticales et horizontales. Il y a toutefois une exception, c'est lorsque  $n = n_1$ . Dans ce cas, le cisaillement  $S$  est nul et  $R$  est indépendant de  $\theta_1$ , c'est-à-dire constant quel que soit  $\theta$ ; en outre  $A = B$ .

Ceci explique que la plus petite valeur de la compression maxima à l'amont  $A_0$  est  $y$  (\*). En effet, tant que l'on a  $n' > y$  on a  $A_0 = n'$ .  $A_0$  est alors parallèle au parement amont et  $B_0$  lui est perpendiculaire. Pour  $n' = y$ ,  $A_0 = B_0$  et leurs directions, tout en restant perpendiculaires l'une à l'autre sont quelconques. Enfin pour  $n' < y$ , les sections principales sont interverties, la direction de  $B_0$  devient parallèle au parement amont et c'est celle de  $A_0$  qui lui est perpendiculaire, la valeur de  $A$  reste alors toujours égale à la pression de l'eau, soit  $y$ . Quand à celle de  $B_0$  elle devient égale à  $n'$ .

Sur le parement aval on a toujours :

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{2n'' \operatorname{tg} \beta}{n'' - n'' \operatorname{tg}^2 \beta} = \operatorname{tg} 2\beta$$

Ce qui montre que sur le parement aval la compression maxima est bien dirigée suivant une parallèle à ce parement, aussi bien à vide qu'en charge.

Sur le parement aval, aussi bien que sur le parement amont, les sections principales sont alors l'une ce parement lui-même ( $B$ ), l'autre la perpendiculaire à ce parement ( $A$ ).

A vide on aura donc :

$$\begin{aligned} A'_0 &= n'_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1) && \text{sur le parement amont} \\ A''_0 &= n''_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) && \text{sur le parement aval} \end{aligned}$$

et, dans les deux cas, la direction de la compression maxima est parallèle au parement correspondant.

Nous aurons le maximum de  $S$  en résolvant l'équation :

$$\frac{dS}{d\theta} = (n_1 - n) \cos 2\theta - 2t \sin 2\theta = 0$$

d'où :

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta_2 &= \frac{n_1 - n}{2t} = -\operatorname{cotg} 2\theta_1 \\ \operatorname{tg} 2\theta_2 &= 2\theta_1 + m \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right. \quad (52)$$

On voit donc que  $S$  est maximum ou minimum dans les sections à  $45^\circ$  avec les sections principales.

Les plans de rupture par cisaillement sur les parements font donc un angle de  $45^\circ$  avec ces parements.

En portant les valeurs de  $\sin 2\theta_2$  et  $\cos 2\theta_2$  dans (50) et en désignant par  $C$  le cisaillement maximum, on retrouve :

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{(n - n_1)^2 + 4t^2} \quad (36)$$

$R$  n'est pas nul dans les sections où  $S$  est maximum, il y a pour valeur :  $R = \frac{n + n_1}{2}$ .

Si l'on fait intervenir le frottement, la tendance au glissement sur  $M' M''$  ne sera plus  $S$ , mais  $S' = S - Rf$ ,  $f$  désignant le coefficient de frottement.

$$S' = \left\{ \begin{aligned} \frac{n_1 - n - 2tf}{2} \sin 2\theta - f \frac{n + n_1}{2} \\ + \frac{2t + (n_1 - n)f}{2} \cos 2\theta \end{aligned} \right\}$$

on trouve le maximum de  $S'$  en résolvant l'équation  $\frac{dS'}{d\theta}$  ce qui donne :

$$\operatorname{tg} 2\theta'_2 = \frac{\frac{n_1 - n}{2t} - f}{1 + \frac{n_1 - n}{2t} f} \quad (53)$$

Ou bien, en posant  $f = \operatorname{tg} \gamma$ .

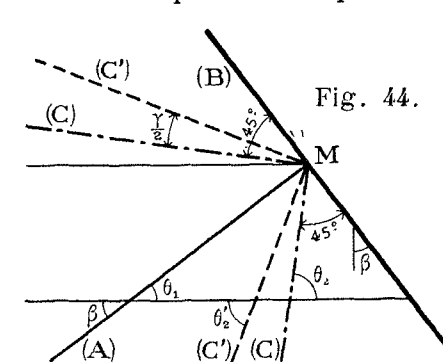
$$\operatorname{tg} 2\theta'_2 = \frac{\operatorname{tg} 2\theta_2 - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} 2\theta_2 \operatorname{tg} \gamma} = \operatorname{tg} (2\theta_2 - \gamma) \quad (53')$$

C'est-à-dire que le plan de rupture par cisaillement, en tenant compte du frottement, fait un angle de  $45^\circ \pm \frac{\gamma}{2}$  avec les sections principales; il fait par suite un angle de  $45^\circ \pm \frac{\gamma}{2}$  avec le parement aval.

Finalement le cisaillement  $C'$  a pour valeur :

$$C' = \frac{1}{2} \sqrt{1 + f^2} \sqrt{(n - n_1)^2 + 4t^2} - f \frac{n + n_1}{2} \quad (37)$$

Les directions suivant lesquelles ont lieu les efforts maxima sont représentées, dans le voisinage du parement aval, par la figure 44. La direction de la compression maxima est parallèle au parement aval et celle de la compression minima per-



pendiculaire à ce parement, les deux directions principales, ou lignes isostatiques, sont  $AM$  et  $BM$ . Les directions suivant lesquelles le cisaillement est maximum sont représentées par les deux lignes  $CM$  qui font un angle de  $45^\circ$  avec le parement. Enfin si l'on

tient compte du frottement, les directions dangereuses par le cisaillement sont représentées par les lignes  $C'M$  qui font un angle  $\gamma/2$  avec les lignes  $CM$ .

Il résulte des considérations précédentes que la méthode de M. Maurice Lévy est la seule rationnelle, et qu'elle permet théoriquement de calculer un barrage avec autant de précision qu'une poutre métallique.

(\*) Voir *La Houille Blanche* d'août 1905, figure 26.

## NOTE ANNEXE

Soit  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , les composantes, mesurées suivant trois axes de coordonnées rectangulaires, du déplacement élastique qu'un point  $x, y, z$  du barrage éprouve sous l'influence des forces auxquelles il est soumis, et soit  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  les raccourcissements (ou allongements) partiels éprouvés par l'élément de volume infiniment petit passant le point considéré, on a :

$$\varepsilon_x = \frac{d\xi}{dx} \quad \varepsilon_y = \frac{d\eta}{dy} \quad \varepsilon_z = \frac{d\zeta}{dz} \quad (I)$$

Et la variation de volume est :

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \quad (II)$$

Sous l'action de la pression normale  $R_y$  un élément quelconque se raccourcit suivant les  $x$  et les  $y$  d'une quantité  $\varepsilon'_y = \frac{R_y}{E}$ , mais en même temps il s'allonge suivant les  $x$  et les  $z$  d'une quantité  $\varepsilon''_x = \varepsilon''_z = \frac{1}{\mu} \frac{R_y}{E}$ .

$R_x, R_y, R_z$  étant les pressions élastiques normales suivant les trois directions  $x, y, z$ ,  $E$  le coefficient d'élasticité longitudinale de la matière, pierre ou mortier, et  $\frac{1}{\mu}$  le coefficient de contraction transversale.

Comme le même phénomène se reproduit sous l'action des pressions  $R_y$  et  $R_z$  il en résulte que  $E_y$  a finalement pour valeur  $\varepsilon'_y - \varepsilon''_y - \varepsilon''_z$  de sorte que l'on a :

$$\left. \begin{aligned} E \varepsilon_x &= R_x - \frac{1}{\mu} (R_y + R_z) \\ E \varepsilon_y &= R_y - \frac{1}{\mu} (R_z + R_x) \\ E \varepsilon_z &= R_z - \frac{1}{\mu} (R_x + R_y) \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

$$E \varepsilon = \frac{\mu - 2}{\mu} (R_x + R_y + R_z) \quad (IV)$$

On a aussi :

$$\left. \begin{aligned} S_{xy} &= S_{yx} = G \left( \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \right) \\ S_{yz} &= S_{zy} = G \left( \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} \right) \\ S_{zx} &= S_{xz} = G \left( \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} \right) \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

$S_{xy}$  désignant l'effort tangentiel développé dans le plan  $xoy$  suivant l'axe des  $y$  et normalement à  $x$ , et ainsi de suite pour les autres valeurs de  $S$ ;  $G$  étant le coefficient d'élasticité transversale de la matière, on a d'ailleurs :

$$G = \frac{\mu}{2(\mu + 1)} E \quad (VI)$$

Si, dans ces équations, l'on remplace  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  et  $\varepsilon_z$  par leur valeur en fonction de  $\xi, \eta, \zeta$ , il vient :

$$\left. \begin{aligned} R_x &= 2G \left[ \frac{\mu - 1}{\mu - 2} \frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{\mu - 2} \left( \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \right) \right] \\ R_y &= 2G \left[ \frac{\mu - 1}{\mu - 2} \frac{d\eta}{dy} + \frac{1}{\mu - 2} \left( \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\zeta}{dz} \right) \right] \\ R_z &= 2G \left[ \frac{\mu - 1}{\mu - 2} \frac{d\zeta}{dz} + \frac{1}{\mu - 2} \left( \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (VII)$$

D'autre part, les pressions normales  $R$  et les efforts tangentiels  $S$  sont reliés entre eux par la relation :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR_y}{dx} + \frac{S_{yx}}{dy} + \frac{dS_{zy}}{dz} - X &= 0 \\ \frac{dS_{xy}}{dx} + \frac{dR_y}{dy} + \frac{dS_{zy}}{dz} - Y &= 0 \\ \frac{dS_{xz}}{dx} + \frac{dS_{yz}}{dy} + \frac{dR_z}{dz} - Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (VIII)$$

$X, Y, Z$ , étant les composantes de la résultante des forces extérieures rapportées à l'unité de volume.

En portant les valeurs de  $R$  et de  $S$  dans cette dernière équation on trouve les équations (IX) suivantes :

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\mu - 1}{\mu - 2} \frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} + \frac{\mu}{\mu - 2} \left( \frac{d^2\eta}{dydx} + \frac{d^2\zeta}{dzdx} \right) - \frac{X}{G} &= 0 \\ 2 \frac{\mu - 1}{\mu - 2} \frac{d^2\eta}{dy^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{\mu}{\mu - 2} \left( \frac{d^2\xi}{dzdy} + \frac{d^2\zeta}{dxdy} \right) - \frac{Y}{G} &= 0 \\ 2 \frac{\mu - 1}{\mu - 2} \frac{d^2\zeta}{dz^2} + \frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{\mu}{\mu - 2} \left( \frac{d^2\xi}{dxdz} + \frac{d^2\eta}{dydz} \right) - \frac{Z}{G} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

En dérivant la première de ces équations par rapport à  $x$ , la seconde par rapport à  $y$  et la troisième par rapport à  $z$ , puis ajoutant, il vient, toutes réductions faites :

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \left( \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \right) = 0 \quad (X)$$

ou encore, à cause de l'équation IV :

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) (R_x + R_y + R_z) = 0 \quad (XI)$$

Ceci posé, nous prendrons pour axe des  $z$  l'axe longitudinal de l'ouvrage, et nous remarquerons que tout élément situé à la base du barrage, sur le rocher, n'est pas libre de se dilater transversalement sous l'action des pressions normales, par suite de l'adhérence tangentielle du mortier sur le rocher, ou sur la pierre, et de l'effort de frottement développé par la pression normale  $R_y$ . Ainsi, l'effort qui tend à produire l'allongement  $\varepsilon_x$  a pour valeur  $\frac{1}{\mu} (R_x + R_y)$ , tandis que la résistance qui

s'oppose à cet allongement est égale à  $\rho' + f R_y$ . La valeur de  $\mu$  est mal définie; Poisson, en se basant sur diverses hypothèses, avait trouvé  $\mu = 4$  pour tous les corps, mais ceci n'a pas été vérifié par l'expérience, et l'on admet en général qu'il est compris entre 3 et 4 (3 pour le fer), pour les corps incompressibles il doit être égal à 2. Quand à  $f$  il est compris entre 0,5 et 0,75 et  $\rho'$  peut être estimé égal à 15 tonnes par m<sup>2</sup>. Si l'on prend  $\mu = 3$  et  $f = 0,5$ , la résistance qui s'oppose à l'allongement est  $\rho' + \frac{R_y}{6} - \frac{R_x}{3}$ , ou bien  $\rho' + \frac{R_y}{2} - \frac{R_x}{4}$  si l'on prend  $\mu = 4$  et

$f = 0,75$  et, comme  $R_y$  est généralement plus grand que  $R_x$ , sauf toutefois au parement amont où il pourrait lui devenir inférieur si la condition  $n' = y$  n'était pas remplie, cette résistance sera positive, c'est-à-dire que l'élément considéré ne pourra pas se dilater suivant les  $z$ ; c'est-à-dire encore que  $\varepsilon_z = 0$ . Les choses se passent alors comme si une compression  $R_z$  venait s'opposer à la dilatation  $\varepsilon_x$ , et cette compression a pour valeur, d'après la

dernière des équations (III):  $R_z = \frac{1}{\mu} (R_x + R_y)$ ;  $R_z$  est donc une fonction de  $R_x$  et de  $R_y$ .

Au-dessus de la base, la dilatation suivant les  $z$  pourra se produire si les extrémités du barrage ne s'appuient pas contre un terrain incompressible, mais, dans ce cas, comme aucune force extérieure au barrage n'agit suivant les  $z$ , si la dilatation n'est pas complète, par exemple par suite du voisinage de la base, la compression  $R_z$  qui en résulterait serait encore une fonction de  $R_x$  et de  $R_y$ . Vers le couronnement, il pourrait arriver que la dilatation fût complète et, dans ce cas, l'on aurait  $R_z = 0$ .

Enfin, si les extrémités du barrage s'appuient sur un rocher incompressible, il est évident que  $\varepsilon_z$  est nul partout et que l'on a partout  $R_z = \frac{1}{\mu} (R_x + R_y)$ .

Si maintenant l'on remarque que  $R_x$  et  $R_y$  restent constants lorsqu'on se déplace sur un même plan horizontal et parallèlement à l'axe des  $z$ , on voit que  $\frac{d}{dz}$  et  $\frac{d^2}{dz^2}$  sont nuls, de sorte qu'il reste finalement l'équation (45) du texte :

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) (R_x + R_y) = 0$$