En considérant les causes des accidents, on trouve que 50 pour 100 des cas proviennent exclusivement et 9 pour 100, en partie de la *propre faute de la victime*. Un pourcentage relativement élevé, 18 pour 100, doit être attribué à la négligence ou manque de réflexion d'autrui.

Témoin l'exemple déjà cité, où un aide-monteur enclancha, contrairement à un ordre donné, la station de transformation pendant que le monteur y travaillait encore.

Voici encore un autre exemple :

Un aide-monteur avait reçu l'ordre de travailler dans une station de distribution à haute tension. Pour une raison quelconque, il quitta un moment son travail. Entre temps un incident imprévu nécessita la mise en service de la partie d'installation en réparation. Lorsque l'aide-monteur revint à son travail, il ignorait que les conduites étaient sous courant et fut foudroyé aussitôt qu'il toucha un des fils. Un autre ouvrier était justement en train de barrer la partie de l'installation qui venait d'être mise sous courant, mais s'était rendu dans un local adjacent pour chercher du matériel, à l'instant où la victime se rendait à son travail.

Dans un autre cas, un monteur et un aide-monteur étaient occupés à faire des connexions dans une station de transformation déclanchée. Une fois le travail terminé, le monteur, en quittant la station, ordonna à son aide de ramasser les outils, mais négligea de remettre en place les grilles de protection. Malheureusement le courant fut enclanché en ce moment par le surveillant de l'usine avant que le monteur en ait donné l'ordre. Lorsque l'aide-monteur voulut prendre un fil à plomb, suspendu à un isolateur derrière le tableau, il entra en contact avec des parties sous tension et fut tué.

En considérant les tensions auxquelles les accidents se sont produits, on trouve :

Jusqu'à 250 volts, 10 cas ; soit 29 pour 100 (en 1905, 21 pour 100).

Entre 250 et 1000 volts, 5 cas ; soit 15 pour 100 (en 1905, 11 pour 100).

Plus de 1000 volts, 19 cas ; soit 56 pour 100 (en 1905, 68 pour 100).

Cette année également, il y a lieu de signaler le nombre relativement élevé d'accidents causés par la basse tension, il atteint, comme l'année précédente, le double de ceux à tension moyenne. Un cas est surtout intéressant, parce qu'il réfute l'opinion que le courant continu à basse tension ne peut avoir un effet mortel.

Un monteur était occupé sur un poteau à attacher des fils aux isolateurs. A un moment donné il entra en contact avec deux conducteurs de polarités différentes (courant continu à 220 volts), poussa un cri et s'affaissa inanimé dans la ceinture.

On déprécie encore trop souvent le danger que les courants à basse tension présentent pour bien des personnes.

Ajoutons encore qu'aucun des accidents, avec courant à basse tension, n'est arrivé dans un local imprégné de liquides conducteurs.

Dans 15 accidents on a essayé de rappeler la victime à la vie et dans 2 avec succès.

B. Dégâts matériels. — Parmi les 8 cas de dégâts matériels, 5 peuvent être ramenés à des installations défectueuses ou au mauvais fonctionnement des appareils de protection.

Dans un cas, un câble souterrain fut détérioré par une forte perte à la terre, survenue par suite d'un défaut d'isolement. Le courant pénétra dans une conduite d'eau posée directement contre l'armature du câble et l'endommagea. Il est probable que le câble avait été endommagé lors de la pose même de la conduite d'eau.

Dans un autre cas, un court-circuit s'était déclaré dans une conduite d'éclairage (cordon souple). L'isolation du cordon s'enflamma et le feu se communiqua à la paroi en bois. Il ne fut pas possible de déterminer d'une manière certaine le débit des coupe-circuits.

Le troisième cas est celui où la résistance d'une lampe à arc s'échauffa, probablement à cause du mauvais fonctionnement de la lampe, à tel point que la poutre du plafond, contre laquelle elle était fixée prit feu. La résistance ne se trouvait qu'à une distance de 3 ou 4 cm du plafond et ce dernier n'était pas protégé par une plaque incombustible.

Dans trois cas, la cause des dégâts ne doit être attribuée que partiellement à la défectuosité des installations, l'autre part pouvant être ramenée à la force majeure ou au mauvais fonctionnement des appareils de protection, dont on ne connaît pour le moment pas de modèle qui se prête bien à l'emploi en pratique et qui soit d'un fonctionnement absolument sûr.

Citons, par exemple, une installation intérieure où des surtensions se produisirent par suite d'un défaut au transformateur. Dans une traversée de plancher, entre l'écurie et le fenil, le courant sauta d'un conducteur à l'autre et enflamma l'isolation des fils. Le feu s'était communiqué au foin qui entourait la colonne montante, mais on réussit à l'éteindre, avant qu'il n'ait causé de dommages importants. Dans l'installation en question, les conduites à basse tension n'étaient pas munies d'appareils contre les surtensions.

Dans un autre cas, un transformateur fut endommagé par un coup de foudre. Malgré les appareils protecteurs, le courant primaire paraît avoir passé dans le réseau à basse tension, car dans plusieurs installations intérieures, le courant avait sauté aux parties voisines des bâtiments en formant des arcs. A quelques places les fils avaient fondu, à d'autres, leur isolant était carbonisé. Les appareils contre les surtensions paraissent avoir fonctionné, mais le contact entre les deux disques métalliques séparés par une rondelle de mica perforée, n'était sans doute pas suffisant.

Ce cas nous prouve, en outre, qu'il est nécessaire de disposer la plaque de terre des appareils contre les surtensions aussi loin que possible de celle des appareils parafoudres à haute tension.

L'incident précité, ainsi que d'autres observations que nous avons eu l'occasion de faire, nous donnent l'impression que les appareils contre les surtensions, avec leur construction actuelle généralement admise, ne fonctionnent pas toujours avec succès et qu'ils ne répondent pas, par conséquent, aux exigences qu'on est en droit d'imposer aux appareils de protection. Y aurait-il moyen de trouver une disposition simple et sûre, qui, lors de surtensions dangereuses, dans le circuit secondaire, fonctionnerait comme disjoncteur des conduites primaires alimentant la station de transformation. Dans le cas où l'on n'est pas sûr d'atteindre l'interruption du courant primaire sur tous les pôles, il faudrait arriver à une mise à terre directe des conduites primaires, simultanément avec leur interruption partielle.

(*L'Industrie Electrique.*)

Résolution des Equations

AU MOYEN D'

ABAQUES LOGARITHMIQUES A MULTIPLES ENTRÉES

La résolution de certains problèmes d'hydraulique nécessitant la résolution d'équations entières d'un degré supérieur au second, nous avons pensé qu'il était intéressant de publier ici un nouveau procédé de résolution rapide de ces équations, au moyen d'*abaques logarithmiques à multiples entrées*, dont l'auteur est M. Jules JOUFFRAY, directeur des Fonderies et Ateliers de Constructions mécaniques de Vienne (Isère).

Jusqu'à ce jour, pour résoudre d'une façon pratique — et lorsqu'on ne pouvait les éviter — des équations quelconques, on a employé plusieurs méthodes qui peuvent se ramener à deux principales.

La méthode *graphique*, dont M. d'OCAGNE a fait apprécier les avantages dans une théorie vraiment scientifique et fort ingénieuse des abaques, ne s'applique qu'à des formes particulières relativement simples, et nécessite, pour chacune de ces formes, des tables spéciales fort délicates à construire.

Quant à la méthode *algébrique*, elle est fondée sur des théorèmes qui permettent de resserrer peu à peu les intervalles qui comprennent les racines; dans la pratique, cette méthode conduit ordinairement, pour l'équation la plus simple — fût-elle du 3^e degré — et pour des approximations relativement faibles, à d'interminables calculs.

C'est pourquoi certains mathématiciens ont cherché à construire des machines dont les mouvements dépendent initialement des coefficients de l'équation, et conduisent à une lecture simple des racines plus ou moins approchées de cette même équation.

La machine à résoudre les équations de M. TORRES est, parmi différents essais, l'un des plus récents, et l'un des plus curieux; et il est vrai de dire, avec M. d'OCAGNE, « que si l'on envisage au point de vue du calcul par les machines le problème de la résolution des équations, il a reçu de M. TORRES une solution absolument générale et complète. »

Mais il suffit de voir la représentation de la machine, qui permet de résoudre les seules équations de la forme

$$x^9 + Ax^8 = B$$

$$x^9 + Ax^7 = B$$

pour se convaincre qu'il s'agit d'une invention théorique-ment pleine d'intérêt, mais pratiquement inutilisable.

La machine que nous présentons aujourd'hui est au contraire d'une simplicité étonnante, elle ne présente aucune complication d'organe, aucune pièce de construction délicate. Construite pour l'équation la plus générale de degré m , elle permet de trouver immédiatement, et avec l'approximation que l'on désire, toutes les solutions réelles des équations de degré égal ou inférieur à m , de quelques formes qu'elles soient. Le calcul est d'autant plus rapide que les équations contiennent moins de termes. Il suffit de quelques minutes (4 ou 5) pour résoudre avec une approximation suffisante les équations de 3 ou 4 termes et de degré quelconque.

Du reste, cette machine n'a d'autre but que de rendre *pratiquement utilisable* un procédé plutôt *graphique*. C'est, si l'on veut, une sorte de généralisation de la règle à calcul, car elle permet, non seulement l'extraction des racines *m^{mes}* (ce qui revient à la résolution des équations binômes), mais l'étude simple et rapide des fonctions complètes ou incomplètes et de leurs variations; par conséquent, comme cas particulier, ou application principale, elle conduit à la résolution des équations les plus générales.

Nous donnerons au procédé que nous allons décrire le nom d'*Abaques logarithmiques à multiples entrées*, et ce que nous dirons dans la suite justifiera pleinement, nous l'espérons, cette dénomination.

Nous verrons, du reste, que ce procédé conduit à des remarques fort intéressantes sur les racines des équations, et enrichit cette branche des mathématiques de nouveaux théorèmes.

§ I. — Description du procédé.

Les abaques logarithmiques à multiples entrées sont inscrites dans un tableau qui comporte autant de colonnes que l'indique le degré maximum des équations qu'il s'agit de résoudre. Ce tableau est divisé en deux régions : la région ABCD, et la région CDEF (voir figure 1).

Dans la première colonne, surmontée de la lettre x , et dans la première région, de A à C, on porte des longueurs proportionnelles aux logarithmes de 1 à 10 (chaque intervalle compris entre les logarithmes de deux nombres consécutifs peut lui-même être subdivisé le plus possible et de la même façon).

En face de chaque division, on inscrit le nombre qui correspond au logarithme. On reporte cette même division dans la 2^e région CE de la même colonne, mais on inscrit à chaque division le produit par 10 des nombres inscrits auprès des divisions correspondantes de la première région.

Chaque région de la 2^e colonne, surmontée de la quantité x^2 , est divisée en deux parties égales. Dans chacune de ces parties, on porte des longueurs proportionnelles aux logarithmes de 1 à 10, ce qui permet d'inscrire dans chacune des 4 parties qui compose la colonne des nombres de 10 en 10 fois plus forts pour les divisions correspondantes de chaque partie. Remarquons, dès maintenant, que la 1^{re} et la 2^e puissance d'une même quantité se trouvent dans chacune des deux premières colonnes sur la même ligne horizontale.

De la même façon, chaque région de la colonne surmontée de x^n sera d'abord divisée en n parties égales, ce qui donnera $2n$ parties en tout.

Chacune de ces parties sera divisée en longueurs proportionnelles aux logarithmes des nombres de 1 à 10, et aux divisions correspondantes de chaque partie seront inscrits des nombres de 10 en 10 fois plus forts à mesure qu'on descendra vers le bas de la colonne.

De la sorte sur une même ligne horizontale, se trouveront (marqués ou non) les logarithmes des puissances, depuis 1 jusqu'à m , du nombre compris dans la colonne des x .

Sur ce tableau, un curseur rectiligne MN, dont la base inférieure coïncide *initialement* avec les divisions marquées 1 et situées sur une même ligne horizontale, se meut parallèlement à lui-même.

Ce curseur MN est traversé perpendiculairement par autant d'aiguilles qu'il y a de colonnes, aiguilles qu'on peut fixer dès le début de l'opération, de façon à ce que leurs extrémités coïncident dans chaque colonne avec une division déterminée.

§ II. — De l'emploi des abaques logarithmiques.

Principes généraux. — L'emploi des abaques logarithmiques est fondé sur les remarques suivantes dont on notera le caractère élémentaire.

1^o. — Supposons l'extrémité de l'aiguille de la colonne des x fixée à la division 3.

Si le curseur MN se déplace entraînant avec lui l'aiguille, l'extrémité de cette dernière marquera successivement sur la graduation de la colonne toutes les valeurs que prend $3x$, lorsque x varie depuis 1 jusqu'à 10 (si le curseur MN

s'arrête à cette division 10). Dans l'une quelconque de ses positions, l'extrémité de l'aiguille s'arrêtera à une division qui pourrait être marquée $3a$, si elle ne l'est, a étant la valeur que détermine à ce même moment la base inférieure du curseur MN dans la colonne des x . On a en effet :

$$\log 3a = \log 3 + \log a$$

FIG. 1. — Résolution de l'équation :

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$$

D'une façon plus générale, l'extrémité d'une aiguille se mouvant dans la colonne des x^m , et aboutissant initialement à une division A_m , donnera dans chacune de ses positions la valeur de $A_m x^m$, pour $x = a$, a étant la division marquée au même instant par la base inférieure du curseur MN dans la colonne des x .

2° — Supposons maintenant que le curseur MN étant dans sa position initiale, suivant les divisions 1, les extrémités des aiguilles aboutissent aux divisions A_1, A_2, A_m (l'indice correspond à la puissance de la quantité x qui est en tête de la colonne que parcourt l'aiguille). Si l'on fait mouvoir le curseur MN, les extrémités des aiguilles s'arrêteront, dans une position quelconque, à des divisions qui donneront les valeurs de $A_1 x, A_2 x^2 \dots A_m x^m$, pour la même valeur de x , celle qui est indiquée à ce même moment par la division sur laquelle s'est arrêtée la base inférieure du curseur MN.

Dès lors, la somme algébrique des valeurs ainsi obtenues — somme qui sera faite suivant les signes des termes du premier membre de l'équation :

$$A_m x^m + \dots A_1 x + A_0 = 0$$

donnera à chaque instant la valeur du premier membre de cette équation pour les valeurs de x comprises entre 1 et 10, et marquées constamment dans la colonne des x par la base inférieure du curseur MN.

C'est ainsi qu'on pourra littéralement *suivre des yeux* les variations de la fonction dans cet intervalle, et, par conséquent, découvrir les maxima et minima qui seraient compris dans ce même intervalle.

Si, dans l'une des positions du curseur, cette somme algébrique devient nulle, l'équation est satisfaite par la valeur de x où s'est arrêté le curseur; on aura ainsi obtenu les racines comprises entre 1 et 10.

Cette somme, à moins d'une unité, pourrait-elle se faire à chaque instant et d'une façon automatique? Nous le croyons, mais il est évident que l'introduction de ce perfectionnement compliquerait beaucoup l'appareil.

Mais ordinairement, pour les équations d'un petit nombre de termes, et surtout pour les équations trinômes, cette somme se fait très rapidement. Du reste, pour effectuer cette somme algébrique, même dans les cas plus compliqués :

1° Nous pourrions indiquer certaines dispositions pratiques de l'appareil qui permettraient, l'ordre des colonnes étant indifférent, d'avoir ensemble, et à côté les unes des autres, les valeurs des termes positifs d'une part, celles des termes négatifs d'autre part.

2° Nous indiquerons certaines remarques, plutôt théoriques, qui permettent de n'avoir jamais à faire en même temps que des sommes et des différences d'un nombre très restreint de quantités. Ces remarques résultent de nombreuses expériences pratiques. Le raisonnement les confirme; peut-être qu'au moyen « du calcul des erreurs » on pourrait arriver à une démonstration plus rigoureuse de ces principes. Toutefois, ces remarques ne dispensent pas de certains tâtonnements dont l'habileté de l'opérateur peut diminuer le nombre.

Exemple. — Soit à résoudre l'équation :

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$$

On fixera les aiguilles sur le curseur MN de telle façon que leurs extrémités correspondent respectivement aux graduations 1; 4; 2 et 3 des colonnes en $x^4; x^3; x^2$ et x . Puis, on fera glisser le curseur MN jusqu'en M'N', de manière que la somme algébrique des valeurs lues sur les graduations correspondant aux extrémités des aiguilles devienne égale à -4 . On trouve ainsi que la racine de l'équation est égale à 3,6.

Remarques particulières. — Dans ce paragraphe, nous montrerons, par des exemples d'abord, par des remarques ensuite, comment on peut arriver, avec un peu d'habitude des abaques, à une manipulation rapide.

1° L'addition est pour ainsi dire instantanée dans le cas d'équations binômes ou trinômes; par exemple :

$$x^7 - 6x^3 - 10 = 0$$

2° Prenons une équation d'un plus grand nombre de termes, de la forme :

$$x^4 + 4x^3 - 5x - 2 = 0.$$

Considérons d'abord les termes : $x^4 - 5x$, dont la valeur absolue est grande par rapport à la valeur correspondante des autres termes, dans l'intervalle de 1 à 10. Nous amènerons le curseur dans une position telle que la somme algébrique soit nulle. Prenons ensuite les termes : $4x^3 - 2$. Comme en général ces 2 termes ne s'annulent pas pour la valeur trouvée, il faudra de nouveau produire un déplacement faible du curseur, et, après quelques tâtonnements, on constate que la somme est nulle.

3^o Abordons enfin une équation d'un grand nombre de termes, par exemple :

$$x^7 - 4x^6 + 5x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 9 = 0 \quad (1)$$

Dans ce cas, pour suivre rapidement les valeurs successives que prendra la fonction, ou devra opérer comme il suit :

Divisons tous les termes de l'équation (1) par x^4 , on a :

$$(x^3 - 4x^2 + 5x - 3) - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{9}{x^4} = 0 \quad (2)$$

Considérons seulement la partie entre crochets, et cherchons une des racines de cette équation, que nous appellerons équation *réduite*.

En remplaçant, dans la deuxième partie de l'équation (2), x par la valeur trouvée, on trouvera le nombre, à une unité près, qu'il faudra ajouter au terme tout connu 3 de la réduite; puis on résoudra cette nouvelle équation obtenue.

Après un, et quelquefois plusieurs tâtonnements, dans le choix de la réduite, choix dont un théorème démontré plus loin servira à diminuer le nombre, on trouvera très vite la racine cherchée.

Comme on peut le voir par ces quelques principes, le maniement de l'appareil est extrêmement simple, et très rapide, pour n'importe quelle sorte d'équation : il s'agit de trouver une forme d'équation commode à résoudre, et qui conduise déjà à une valeur approchée de la racine.

Cette dernière manière d'opérer nous conduit à définir d'une façon exacte ce que nous entendons par équation réduite d'une équation donnée. Nous appelons ainsi toute équation ne contenant qu'une partie des termes de cette équation donnée. Par exemple :

$$3x^4 - 6x + 2 = 0$$

est une équation réduite de l'équation donnée :

$$3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$$

Remarque. — L'étude des équations réduites, dont nous venons de parler, nous a amené à chercher les rapports qui existent entre les racines d'une équation, ses coefficients, et les racines de ses réduites.

Théorème. — Lorsqu'une équation algébrique, entière et rationnelle, admet une racine $x = a$, dont la valeur absolue est plus grande que celle du plus grand coefficient qui n'entre pas dans une de ses réduites, cette réduite admet cette même racine à une approximation d'autant plus grande que a est plus grand.

Considérons une équation quelconque :

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax_m^m + Ax_{m-1}^{m-1} + Ax_{m-2}^{m-2} + Ax_{m-3}^{m-3} \\ + \dots + Ax + A_0 \end{array} \right\} = 0 \quad (1)$$

qui admette une racine plus grande que 1 en valeur absolue et plus grande que A_{m-3} qui, lui-même, est le plus grand coefficient de l'ensemble des termes, depuis $A_{m-2}x^{m-2}$ jusqu'à A_0 ; je dis que la réduite :

$$A_mx^2 + A_{m-1}x + A_{m-2} = 0 \quad (2)$$

admet cette même racine $x = a$ à une approximation d'autant plus grande que a est plus grand.

En effet, divisons par x^{m-2} tous les termes de l'équation (1) on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_mx^2 + A_{m-1}x + A_{m-2} + \\ \frac{A_{m-3}}{x} + \dots + \frac{A_0}{x^{m-2}} \end{array} \right\} = 0 \quad (3)$$

Dans cette équation (3), tous les termes à partir du quatrième sont plus petits que 1, et vont en diminuant d'autant plus vite que x est plus grand. Par conséquent, en ne considérant que les trois premiers termes de (3), c'est-à-dire en considérant seulement la réduite :

$$A_mx^2 + A_{m-1}x + A_{m-2} = 0$$

Cette équation admettra une racine qui rendra le premier terme de l'équation (1) égal à un nombre d'autant plus petit que x sera plus grand. Donc, la racine de cette réduite sera à peu de chose près celle qu'admettait l'équation (1), et elle en sera d'autant moins différente que $x = a$ sera plus grand.

Corollaire. — En général, si une réduite quelconque admet une racine supérieure au plus grand coefficient des termes qui n'entrent pas dans cette réduite, cette racine est à peu de chose près celle de l'équation complète, et d'autant plus exactement que cette racine est plus grande en valeur absolue.

Conséquence. — Ce théorème a une très grande importance pour la recherche des racines des équations de degré supérieur, au moyen du nouveau procédé mécanique.

En effet, ce théorème permettra, à la seule considération de l'équation, de savoir si la racine est peu différente de celle de la réduite, et par suite il diminuera le nombre des tâtonnements à faire.

Remarque. — Ce théorème, d'après notre hypothèse, ne s'applique que pour la recherche des racines plus grandes que 1 en valeur absolue.

Si l'on veut s'en servir dans le cas où les racines sont comprises entre 0 et 1, on sera obligé de les ramener à être plus grandes que 1 en appliquant une méthode que nous appliquerons dans le chapitre III.

§ III. — Recherche de toutes les solutions réelles d'une équation.

Nous nous proposons de montrer dans ce chapitre :

- 1^o Comment on trouve toutes les racines d'une équation;
- 2^o Comment on peut obtenir une approximation suffisante.

De la recherche de toutes les racines de l'équation.

— *Remarque préliminaire.* — En multipliant les régions du tableau, on pourrait trouver les racines comprises entre

1 et 10, 100, 1000, etc, mais, même dans ces cas, on ne trouverait avec une exactitude suffisante que les deux premiers chiffres de la racine : il n'y aurait donc aucun avantage sérieux.

Procédé général. — Soit une équation algébrique, entière et rationnelle :

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + Ax + A_0 = 0$$

pour en trouver toutes les racines réelles, on emploiera la méthode suivante :

On cherchera d'abord les racines comprises entre 1 et 10, puis successivement celles comprises entre 1 et 0,1 ; 0,1 et 0,01

On cherchera ensuite successivement les racines comprises entre 10 et 100 ; 100 et 1000 . . .

Nous avons vu comment on trouvait les racines comprises entre 1 et 10.

(α) Pour avoir les racines comprises entre 0,1 et 1, on considérera l'équation de la forme :

$$\frac{A_m}{10^m} a^m + \frac{A_{m-1}}{10^{m-1}} a^{m-1} + \dots + \frac{A}{10} a + A_0 = 0$$

qui admet une racine comprise entre 1 et 10 : on est donc ramené au cas précédent.

De la même façon pour trouver les racines comprises entre $\frac{1}{10^n}$ et $\frac{1}{10^{n-1}}$ on posera $x = \frac{10^n}{a}$ et l'on sera ramené au premier cas.

(β) Les racines comprises entre 10 et 100 se trouveront en posant $x = 10 a$, et l'on sera de nouveau ramené au premier cas.

D'une façon générale, pour avoir les racines comprises entre 10^n et 10^{n+1} on posera $x = 10^n a$.

Enfin, pour connaître les racines négatives, on prendra la transformée en $-x$.

Ainsi, l'on pourra toujours trouver toutes les racines d'une équation en les ramenant, par les procédés très élémentaires que nous venons de signaler, à être comprises entre 1 et 10.

Les considérations suivantes permettront de ne pas faire d'essais inutiles pour le calcul des racines.

Théorème. — Dans une équation algébrique, entière et rationnelle, de degré m , qui admet une racine de la forme $\frac{a}{10^n}$ (a étant compris entre 1 et 10) :

1^o Si les coefficients des termes de degré p sont respectivement supérieurs à $10^{p(u-1)}$ le terme tout connu est plus grand que le nombre $(0,11\dots)^m$ nombre qui a m fois le chiffre 1 à la partie décimale.

2^o Si les coefficients des termes de degré p sont respectivement inférieurs à $10^{p(u-1)}$ le terme tout connu est plus petit que m .

1^o En effet, soit l'équation générale :

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + Ax + A_0 = 0 \quad (1)$$

qui satisfait à la première hypothèse. Chacun des termes est respectivement plus grand que :

$$\frac{1}{10^m} \quad \frac{1}{10^{m-1}} \quad \dots \quad \frac{1}{10}$$

et leur somme sera nécessairement plus grande que $(0,111\dots)^m$.

Pour que $\frac{a}{10^n}$ soit une racine de l'équation (1) il faudra donc que l'on ait $A_0 > (0,11\dots)^m$.

2^o Supposons maintenant que l'équation (1) satisfait à la 2^e hypothèse.

Chacun des termes est respectivement plus petit que :

$$a \frac{10^n - 1}{10^n} < 1$$

$$a^m \frac{10^{m(n-1)}}{10^{mu}} < 1$$

Leur somme sera donc nécessairement plus petite que m .

Pour que $\frac{a}{10^n}$ soit une racine, il faudra donc que l'on ait :

$$A_0 < m$$

Remarques. — I. Il est facile de vérifier que le théorème s'applique même lorsque u est négatif.

II. — En divisant tous les termes de l'équation par une même quantité, on peut toujours se placer dans les conditions du théorème.

Conséquence. — Le théorème permettra d'éviter la recherche de racines qui nécessitent pour les trouver une opération spéciale.

Approximations. — Pour obtenir une approximation suffisante pour les diverses sciences auxquelles cet appareil servira, un seul facteur intervient : les dimensions.

Pour les besoins ordinaires de l'industrie, un tableau de 0m40 de longueur suffira. En effet, on obtiendra ainsi trois chiffres exacts ; approximation qui sera suffisante, car, dans la plupart des équations, les racines dont on a besoin en pratique sont en général comprises entre 0 et 100.

Si, toutefois, on voulait une plus grande approximation, on suivrait la marche suivante :

Soit une équation algébrique entière et rationnelle :

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + Ax + A_0 = 0 \quad (1)$$

et, soit a une racine de cette équation que nous avons obtenue mécaniquement avec trois chiffres exacts.

Posons : $x = ua$.

Supposons que a soit compris entre 1 et 10 et remplaçons x par cette valeur dans l'équation (1), on a :

$$A'_m u^m + A'_{m-1} u^{m-1} + \dots + A'u + A_0 = 0 \quad (2)$$

la nouvelle équation obtenue ainsi admet une racine de la forme : $u = 1 + \gamma$, γ étant un nombre plus petit que $\frac{1}{100}$.

Remplaçons u par cette expression dans l'équation (2), on obtiendra une nouvelle équation dont la racine sera un nombre γ dont les trois premiers chiffres significatifs seront exacts.

On fera ensuite le produit :

$$x = a(1 + \gamma) \dots$$

et l'on peut se rendre compte facilement, au moyen du calcul des erreurs relatives, que l'on obtiendra ainsi au moins un chiffre exact de plus pour la valeur de x .

Remarques. — I. On peut écrire directement l'équation précédente en γ en se servant du développement de Mac-Laurin; on a alors :

$$Fa(x+1) = \left\{ \begin{aligned} &F(a) + ax F'(a) + a^2 \frac{x^2}{1.2} F''(a) \\ &+ \dots + a^m \frac{x^m}{1.2 \dots m} F^m(a) \end{aligned} \right\} = 0$$

II. La méthode précédente est toujours applicable, car l'on peut toujours ramener a à être compris entre 1 et 10.

Nous croyons donc qu'en appliquant plusieurs fois de suite ce que nous venons d'exposer, on pourra toujours trouver une racine à une approximation quelconque, au moyen d'un appareil relativement restreint.

§ IV. — Remarques pratiques.

Nous nous proposons de donner, dans ce chapitre, quelques aperçus sur la construction pratique des abaques, dont nous venons de présenter la théorie; nous nous proposons également de faire entrevoir quelques améliorations techniques.

On a pu remarquer, dans le cours de la théorie que nous venons d'exposer, que le *calculateur* doit présenter deux qualités dans sa construction pratique.

1°) Les colonnes doivent être indépendantes les unes des autres.

2°) Les colonnes doivent être les plus longues possibles.

3°) Un appareil de ce genre doit, en outre, être très peu encombrant.

Pour satisfaire à ces trois conditions, nous avons délaissé, malgré sa simplicité, la pensée de faire un tableau *unique*, comme celui que nous avons représenté précédemment; tableau qui peut cependant donner des résultats suffisants dans nombre de cas, et qui présentera, d'autre part, l'avantage de ne coûter qu'un prix insignifiant.

Nous parlerons donc seulement de trois autres types qui nous paraissent le mieux posséder les avantages précités.

Radicocalculateur cylindrique. — Il se compose essentiellement d'un cylindrique pouvant tourner autour d'un axe qui lui sert de support.

Les colonnes du tableau théorique présentent la forme de disques s'emboîtant à frottement dur sur ce cylindre; ces disques peuvent donc prendre une position initiale quelconque, puis être entraînés dans le mouvement de rotation du système.

Une règle est fixée invariablement suivant une génératrice. Avant de commencer une résolution, on amène le coefficient de chaque colonne à coïncider avec la base inférieure de cette règle, qui servent ainsi d'aiguille générale.

Il nous semble que cette disposition présente les deux avantages de construction suivants : un mouvement de rotation toujours plus rigoureux qu'un mouvement de translation, et la suppression des aiguilles. Enfin, cette forme « du radicocalculateur » permet de supprimer la deuxième région, puisqu'elle est identique à la première.

Radicocalculateur à bandes. — Il se compose d'un certain nombre de bandes qui représentent chacune une colonne : ces bandes, enroulées sur des bobines, sont simplement déroulées peu à peu lorsqu'il s'agit de résoudre une équation.

Les colonnes peuvent ainsi être extrêmement longues, et l'approximation pour ainsi dire illimitée sans augmentation des dimensions de l'appareil. D'autre part, cette disposition présente le même avantage que celui du radicocalculateur cylindrique par la suppression de la deuxième région.

Nous pourrions donner, à ce sujet, quelques idées sur la construction d'abaques qui permettraient de faire automatiquement la somme algébrique, mais nous préférons donner ici une dernière forme de nos abaques qui pourra être employée simplement par tous nos lecteurs, et qui donnera souvent dans la pratique une approximation suffisante.

FIG. 2. — Schéma du radicocalculateur à bandes.

Nous croyons également qu'en suivant le même principe, on pourrait construire des tableaux analogues pour certaines catégories d'équations transcendentes. Il nous semble que de tels abaques seraient aussi faciles à construire, et d'une utilité aussi immédiate que celui destiné aux équations algébriques.

Radicocalculateur à colonnes. — Les colonnes du tableau théorique dont nous donnons ci-joint fig. 2 un exemplaire exact seront découpées, et chacune d'elles soigneusement fixée sur des réglettes rigides.

Pour résoudre une équation, il suffit de placer chacune des réglettes nécessaires sur une planche à dessin, et d'amener le coefficient de chaque colonne à coïncider avec

la base inférieure d'un T qui peut se mouvoir parallèlement à lui-même jusqu'en T' (fig. 3), position pour laquelle la somme algébrique des divers termes de l'équation devient égale à zéro.

FIG. 3. — Résolution de l'équation :
 $x^4 - 3x^3 + 5x - 9 = 0$

En plus de l'économie de construction, ce dernier appareil a encore l'avantage de restreindre le tableau aux seules colonnes nécessaires à la résolution de l'équation dont on s'occupe.

§ V. — Application.

Soit, par exemple, à calculer les dimensions d'un canal de dérivation d'une usine hydraulique, capable de débiter 4 mètres cubes par seconde, avec une pente de un millimètre par mètre.

Nous supposons qu'il s'agit d'un canal maçonné, de section, rectangulaire, et nous nous servirons de la formule bien connue de BAZIN :

$$\frac{RI}{V^2} = \alpha \left(1 + \frac{\beta}{R} \right)$$

dans laquelle V est la vitesse moyenne, et où R , le rayon moyen, est égal au rapport $\frac{\Omega}{\chi}$ de la section Ω du canal à son périmètre mouillé χ . On a donc, en désignant par x la largeur du canal, et par y sa hauteur :

$$V = \frac{Q}{xy} \quad R = \frac{xy}{x + 2y}$$

En portant ces valeurs de V et de R dans la relation précédente il vient :

$$y^4 x^4 - \alpha \frac{Q^2}{I} \left[(y + \beta) x^2 + (2y^2 + 4\beta y) x + 4\beta y^2 \right] = 0 \quad (1)$$

Si l'on se donne arbitrairement la valeur y de la hauteur du canal, on n'aura plus qu'à résoudre une équation du 4^e degré en x .

Par exemple, si l'on se donne arbitrairement $y = 1$, l'équation précédente devient :

$$x^4 - 3,25x^2 - 6,93x - 0,85 = 0 \quad (2)$$

pour le cas de maçonneries soigneusement rejointoyées, ou munies d'un enduit ordinaire, pour lequel on a :

$$\alpha = 0,00019 \quad \text{et} \quad \beta = 0,07$$

on voit immédiatement que la seule solution compatible avec la valeur $y = 1$, est une racine comprise entre 1 et 10. On cherche donc, au moyen du radicocalculateur, la racine de l'équation (2) comprise entre 1 et 10. L'appareil donne aussitôt la solution $x = 2,485$.

On sait que les dimensions qui, pour une même section, conduisent au minimum de périmètre mouillé, ainsi qu'au minimum de la perte de charge, sont celles qui correspondent à une largeur double de la hauteur. Les dimensions précédemment trouvées diffèrent assez peu de cette condition, on pourrait les accepter.

Cependant, si l'on désirait plus d'exactitude (et pour les cas où cette première approximation aurait donné des résultats beaucoup trop écartés de la condition précédente), on se donnerait une nouvelle valeur de y , comprise entre 1 et 1,20, et l'on aurait à résoudre une nouvelle équation (2') qui donnerait une nouvelle valeur de x plus approchée que la précédente. En opérant ainsi par approximations successives, ce que le radicocalculateur permettrait de faire très rapidement, on arriverait bientôt à la valeur exacte cherchée.

Mais on peut obtenir plus directement cette valeur exacte en posant $x = 2y$ dans l'équation (1), ce qui donne :

$$2y^8 - \alpha \frac{Q^2}{I} \left[y^3 + 2\beta y^2 \right] = 0$$

ou, pour le cas considéré :

$$y^6 - 1,52y - 0,21 = 0 \quad (3)$$

Equation dont le radicocalculateur donne immédiatement la racine $y = 1,11$

Les dimensions du canal seront donc :

$$y = 1^m 11 \quad x = 2^m 22$$

On établirait de même les dimensions d'un canal de section trapézoïdale, avec parois en terre, les calculs seraient seulement un peu plus long.

J. JOUFFRAY,
 Ingénieur E. C. L.

LE BÉTON ARMÉ ACTUEL

Ses principes et ses ressources

Rapport présenté à la section du Génie civil du Congrès de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, par M. C. RABUT, ingénieur en chef, professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Pour servir d'introduction aux séances que l'A. F. A. S. a eu l'heureuse idée de consacrer, dans son congrès de 1907, au béton armé, je me propose de préciser, en quelques pages, la conception qu'on doit actuellement se former des principes de ce mode de construction et des ressources qu'on peut en attendre, d'après les résultats déjà acquis.