« Que cette situation budgétaire ne paraît pas, quelle que soit la bonne volonté des pouvoirs publics, devoir se modifier de longtemps;

« Que ces crédits, déjà insuffisants, risquent, en outre, d'être répartis d'une façon non conforme aux intérêts généraux du pays;

« Que les sacrifices consentis par l'Etat se traduisent par l'allocation de crédits échelonnés sur un des exercices successifs, ce qui constitue souvent une nouvelle cause de retard et de cherté dans l'exécution des travaux »;

Emet le vœu : « Que l'initiative, l'étude, l'exécution et l'administration des travaux des ports maritimes et fluviaux, canaux ou autres grands travaux publics puissent être confiées à des collectivités locales ou régionales, dotées de la personnalité civile, notamment à des Syndicats autonomes, dans lesquels seront représentés les grands intérêts locaux, régionaux ou nationaux «.

Mouvements des Liquides dans les corps creux de révolution

Par le Professeur Dr Prasil (*)

En traitant les problèmes d'hydrodynamique par les équations fondamentales de Lagrange, ou d'Euler, on rencontre des difficultés, provenant de ce que l'intégration des équations aux différentielles partielles, auxquelles on est conduit, n'est souvent pas possible par les méthodes con nues jusqu'à présent.

Les recherches faites pour des liquides incompressibles se rapportent, d'une part, aux mouvements dans lesquels les vitesses sont déduites de l'existence d'un potentiel des vitesses, et, d'autre part, de la théorie des mouvements tourbillonnaires. Elles sont généralement faites en se servant d'un système de coordonnées rectilignes et orthogonales; Grashof, dans ses leçons théoriques sur les machines (*Theoretischen Maschinenlehre*, 1er vol. pages 398 et suiv.) a préconisé, pour les recherches générales des mouvements des fluides suivant des trajectoires données, l'emploi de coordonnées curvilignes et orthogonales; quelques cas spéciaux seulement ont été traités par les coordonnées cylindriques. La recherche des écoulements dans un plan a conduit à la solution du problème dit « à deux dimensions », et, par suite, à la détermination de la forme des filets liquides. Si tant est que ces recherches soient propres à déterminer une série de mouvements des liquides, elles sont, néanmoins, inapplicables dans la plupart des cas qui se présentent actuellement; elles ne donnent généralement que des bases de comparaison.

Parmi les problèmes d'hydrodynamique qui ont une importance particulièrement immédiate dans la construction des machines, on trouve, entr'autres, ceux qui se rapportent aux mouvements des fluides dans des canaux. En général, on a à faire, ou bien à des canaux constitués par des corps creux de révolution (tuyaux, buses), ou bien à des canaux groupés de façon à former des corps analogues (distributeurs et roues de turbines et pompes centrifuges).

Il semble donc que l'on pourrait, dans les deux cas, simplifier les déductions analytiques pour la recherche du mouvement des fluides, en transformant en coordonnées cylindriques (admettant comme axe principal l'axe de révolution) les équations fondamentales citées au début, et établies en coordonnées cartésiennes.

La présente étude fait connaître les résultats de ces recherches; on les a appliqués en premier lieu à la détermination des méridiennes des tuyaux d'aspiration des turbines.

Ce sujet se rattache à la discussion des équations fondamentales du mouvement des fluides parfaits incompressibles, exposée par Grashof dans ses *Theoretischen Maschinenlehre* (1 vol. Page 386 et suiv.).

I. — TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES

La transformation en question pourrait se faire analytiquement, en prenant l'axe des z pour axe principal, et en remplaçant les coordonnées x et y par les coordonnées polaires r et φ. Il nous semble cependant plus simple d'établir directement ces équations.

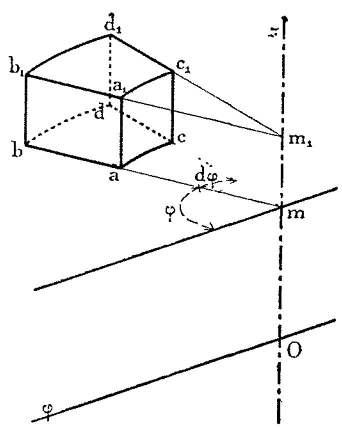

Fig 1.

Considérons (fig. 1), dans un anneau, un élément de volume $abcda_1b_1c_1d_1$ dont le sommet a, a pour coordonnées cylindriques φ et $\overline{om} = z$, $\overline{ma} = r$.

Les longueurs des côtés de l'élément sont :

$$\overline{ac} = \overline{a_1c_1} = r\,d\varphi$$
$$\overline{bd} = \overline{b_1d_1} = (r + dr)\,d\varphi$$
$$\overline{ab} = \overline{a_1b_1} = \overline{cd} = \overline{c_1d_1} = dr$$
$$\overline{aa_1} = \overline{bb_1} = \overline{cc_1} = \overline{dd_1} = \overline{mm_1} = dz$$

La projection de l'élément de volume sur un plan perpendiculaire à l'axe des z donne la fig. 3; la projection verticale donne la fig. 2.

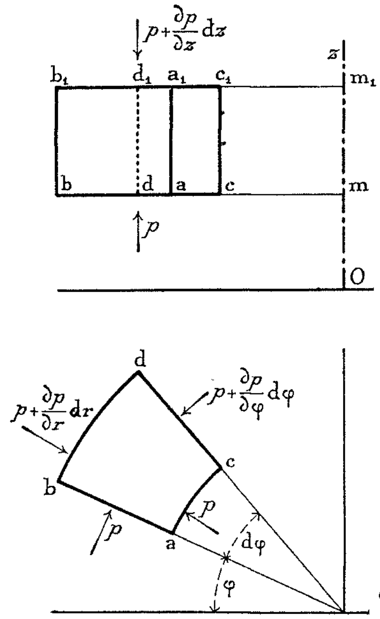

Fig. 2 et 3.

La masse du fluide qui remplit l'élément de volume est

$$dM = \frac{\gamma}{g}\, r\, d\varphi\, dr\, dz$$

où γ est le poids de l'unité de volume du fluide, et $g = 9^{m}8$ par seconde est l'accélération de la pesanteur.

Nous représenterons les forces dues à la masse, pour l'unité de masse, par :

R, dans la direction de r suivant le rayon, et positivement vers l'extérieur;

Z dans la direction de l'axe des z, positivement dans le sens des fig. 1 et 2;

U perpendiculairement à R et Z, et positivement dans le sens de la rotation des aiguilles d'une montre.

(*) Traduction des articles parus dans la *Schweizerische Bauzeitung*, vol XLI; nos 19, 21, 22, 25 et 26, par M. Georges Servière, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, ingénieur aux Ateliers de constructions Neyret-Brenier et Cie de Grenoble.

Nous désignerons les composantes de la vitesse par :
v dans la direction radiale (R);
w » » de l'axe (Z);
u » » de la tangente (U) ;
(mêmes sens positifs que pour les composantes des forces).

Soit, en outre, p la pression sur les surfaces latérales $\overline{abcd}$, $\overline{aba_1b_1}$, $\overline{aca_1c_1}$.

Si, dans chacune des trois directions, on égale la somme des composantes des forces au produit de la masse de l'élément par la composante de l'accélération, on a :

(A) dans la direction de Z.

$$Z\frac{\gamma}{g}r\,d\varphi\,dr\,dz + \left[p-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)\right]r\,d\varphi\,dr = \frac{\gamma}{g}r\,d\varphi\,dr\,dz\,\frac{dw}{dt}$$

soit :
$$Z-\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{dw}{dt} \qquad \text{(I)}$$

(B) dans la direction de R.

$$\left.\begin{array}{l} R\frac{\gamma}{g}r\,d\varphi\,dr\,dz+p\,dr\,d\varphi\,dz\;+ \\ \left[pr\,d\varphi\,dz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial r}dr\right)(r+dr)\,d\varphi\,dz\right]\end{array}\right\}=\frac{\gamma}{g}r\,d\varphi\,dr\,dz\left[\frac{dv}{dt}-\frac{u^2}{r}\right]$$

soit :
$$R-\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{dv}{dt}-\frac{u^2}{r} \qquad \text{(II)}$$

Le terme $p\,dr\,dz\,d\varphi$ provient des pressions sur les surfaces latérales $\overline{aba_1b_1}$, $\overline{cdc_1d_1}$; en effet, ces surfaces font entre elles l'angle $d\varphi$; la résultante des pressions qu'elles supportent donne bien, dans la direction de r, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, le terme écrit plus haut.

Le terme $-\frac{u^2}{r}$ représente l'accélération centripète de l'élément de masse.

(C) dans la direction de U.

$$\left.\begin{array}{l} U\frac{\gamma}{g}r\,d\varphi\,dr\,dz \\ +\left[p-\left(p+\frac{\partial p}{\partial \varphi}d\varphi\right)\right]dr\,dz\end{array}\right\}=\frac{\gamma}{g}(r\,d\varphi\,dr\,dz)\left(\frac{du}{dt}+\frac{uv}{r}\right)$$

soit :
$$U-\frac{1}{r}\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial \varphi}=\frac{du}{dt}+\frac{uv}{r} \qquad \text{(III)}$$

Le terme $\frac{uv}{r}$ correspond à un complément d'accélération dans la direction de U, complément exprimé en coordonnées cylindriques, comme il résulterait des équations du mouvement dans le plan en coordonnées polaires.

Les vitesses w, v et u sont en général des fonctions du temps et des coordonnées z, r et φ; il en résulte :

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial w}{\partial r}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

et comme :

$$\frac{dz}{dt}=w, \quad \frac{dr}{dt}=u, \quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{u}{r}$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial z}+v\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{u}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

et, de même :

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+w\frac{\partial v}{\partial z}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{u}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+w\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

En ce qui concerne les valeurs Z, R et U, il n'y a à considérer, comme force extérieure, que la pesanteur, à laquelle il faut ajouter les forces complémentaires du mouvement relatif, lorsque les corps dans lesquels on cherche le mouvement des fluides sont eux-mêmes en mouvement.

Pour simplifier, nous supposerons que la direction de la pesanteur coïncide avec celle de l'axe des z, et que la pesanteur agit en sens contraire de la direction positive de cet axe.

Il en résulte que $Z=-g$ quand l'axe des z coïncide avec l'axe de rotation des corps en mouvement; R et U dépendent donc seuls du mouvement relatif.

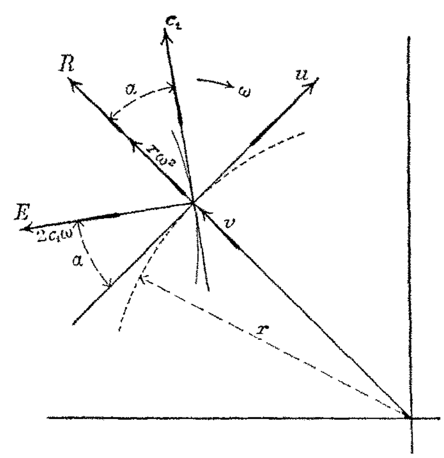

Fig. 4.

La première force complémentaire, rapportée à l'unité de masse, qui est aussi l'accélération de l'élément du fluide considéré, est égale à $r\omega^2$, en représentant par ω la vitesse angulaire supposée constante du système; elle agit ici toute entière dans la direction du rayon correspondant à l'élément fluide, et elle est centrifuge.

La deuxième force complémentaire, rapportée à l'unité de masse, a pour valeur $2c_1\omega$; dans cette expression, $c_1=\sqrt{u^2+v^2}$ représente la projection de la vitesse totale de l'élément de fluide sur le plan normal à l'axe de rotation z; étant donné le sens positif convenu par les mouvements, elle agit dans la direction E (correspondant, pour la direction c_1 à une rotation de 90° dans le sens opposé à ω. Voir figure 4).

Ses composantes sont :

Dans la direction R : $\quad +2c_1\omega\sin\alpha=+2u\omega$
et dans la direction U : $\quad -2c_1\omega\cos\alpha=-2v\omega$

car :
$$\sin\alpha=\frac{u}{c_1} \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha=\frac{v}{c_1}$$

Il en résulte :

$$R=r\omega^2+2u\omega \qquad U=-2v\omega$$

L'équation de continuité s'écrit, dans l'hypothèse de l'incompressibilité du liquide :

$$\left.\begin{array}{l}\left[w-\left(w+\frac{\partial w}{\partial z}dz\right)\right]r\,d\varphi\,dr+\left[u-\left(u+\frac{\partial u}{\partial \varphi}d\varphi\right)\right]dr\,dz \\ \quad +\left[vr\,d\varphi\,dz-\left(v+\frac{\partial v}{\partial r}dr\right)(r+dr)\,d\varphi\,dz\right]\end{array}\right\}=0$$

en négligeant l'infiniment petit d'ordre supérieur :

$$\frac{\partial v}{\partial r}dr\,dr\,d\varphi\,dz$$

et en divisant par $r\,d\varphi\,dr\,dz$ il vient :

$$\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{v}{r}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=0$$

En tenant compte des valeurs trouvées pour $\frac{dw}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{du}{dt}$ Z, R et U, on obtient les équations fondamentales sous leur forme définitive.

$$\text{(A)} \quad -g - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z} + v\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{u}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

$$\text{(B)} \quad + r\omega^2 + 2u\omega + \frac{u^2}{r} - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial t} + w\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

$$\text{(C)} \quad -2v\omega - \frac{uv}{r} - \frac{g}{\gamma}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial t} + w\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

$$\text{(D)} \quad \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$$

Par la suite, nous considérerons généralement des mouvements permanents; si le mouvement est uniforme, les dérivées partielles par rapport au temps deviennent nulles; w, v, u et p ne dépendent plus que des coordonnées.

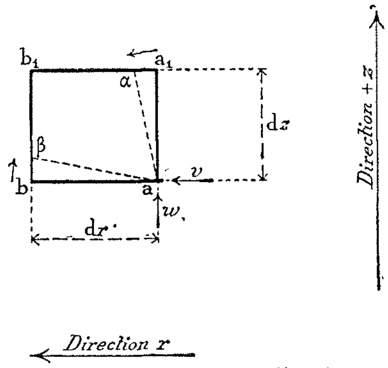

Fig. 5

Le mouvement peut aussi être périodiquement uniforme, comme c'est le cas, par exemple, pour les turbines et les pompes centrifuges; alors, les valeurs ci-dessus deviennent aussi des fonctions périodiques du temps.

Si l'on a pour w, v et u les relations :

$$w = \frac{\partial F}{\partial z}; \qquad u = \frac{\partial F}{\partial r}; \qquad u = \frac{\partial F}{r\partial \varphi}$$

où F est une fonction de z, r et φ, cela prouve l'existence d'un potentiel des vitesses; le mouvement du fluide est alors dénué de tourbillons, comme on le voit également par le procédé suivant.

La vitesse au point extrême b, dans la direction Z, est :

$$w_1 = w + \frac{\partial w}{\partial r}\,dr$$

Donc, $w_1 - w = \frac{\partial w}{\partial r}\,dr$ représente la vitesse relative avec laquelle b se déplace vers β, et il parcourra, dans le temps dt, le chemin $\overline{b\beta} = \frac{\partial w}{\partial r}\,dr\,dt$.

$\frac{w_1 - w}{dr} = \frac{\partial w}{\partial r}$ représente, par conséquent, la vitesse angulaire de déplacement de b vers a, en tournant autour de l'axe passant par a, et perpendiculairement à la surface $\overline{aba_1b_1}$: de même, $\frac{\partial v}{\partial z}$ est la vitesse angulaire de déplacement de a_1 vers a, en tournant autour du même axe; en considérant les directions indiquées par les petites flèches, on obtient, pour la vitesse moyenne des extrémités de l'élément, tournant autour de l'axe passant par a :

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

λ devient donc nul lorsque :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial r} = \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}$$

On détermine, de même, pour les surfaces latérales $\overline{aa_1cc_1}$ de l'élément, avec les longueurs $\overline{aa_1} = dz$ et $\overline{ac} = r\,d$ la vitesse moyenne autour du rayon passant par a; on a :

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{r\partial \varphi}\right)$$

μ devient nul pour $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{r\partial \varphi}$

ou : $$\frac{\partial ru}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \varphi}$$

Quant aux vitesses autour d'un axe passant par a et parallèle à Z, il faut remarquer que la vitesse angulaire de b autour de a est $\frac{\partial u}{\partial r}$, de c autour de a $\frac{\partial u}{r\partial \varphi} - \frac{u}{r}$ dans le sens donné par les petites flèches.

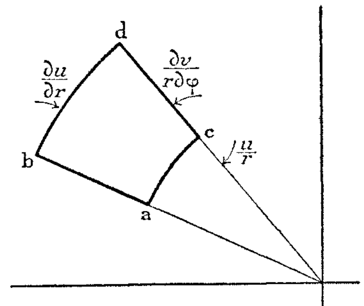

Fig. 6.

La vitesse angulaire moyenne des points de l'élément considéré autour de l'axe désigné est :

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{r\partial \varphi} - \frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial ru}{\partial r}\right)$$

ν est nul pour : $$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial ru}{\partial r}$$

ou : $$\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial r}$$

Les mouvements sans vitesse de rotation, c'est-à-dire dans lesquels $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, sont désignés par Helmholtz sous le nom de mouvements sans tourbillons. De tels mouvements impliquent l'existence d'un potentiel des vitesses; c'est ainsi que nous désignerons la fontion F.

Si l'on remplace, dans l'équation (D), les vitesses par $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{r\partial \varphi}$, celle-ci devient :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F}{r^2 \partial \varphi^2} = 0$$

La détermination des fonctions F, qui correspondent ces équations différentielles, est une des parties fondamentales du présent problème.

Nous allons maintenant appliquer ces théories général à des cas particuliers.

(A suivre.) G. SERVIÈRE.

Mémorable Expérience

DE LA

TRANSMISSION DE LA.... SOTTIS

Un tout jeune philosophe, dont la hauteur d'esprit n'a d'ég que l'imagination, a fait, ces temps derniers, une expérien féconde en résultats intéressants dans le domaine de la psyc logie. Elle a fait grand bruit dans les milieux scientifiques comme elle a eu pour sujet l'une des plus actuelles questio de la science électrique, nos lecteurs nous sauront gré d' fixer le souvenir. En quelques mots voici ce que fut ce magnifique expérience :