Mouvements des Liquides dans les corps creux de révolution

Par le Professeur D^r PRÁŠIL

(Suite)

II. — COURANTS SIMPLES

Nous désignerons sous le nom de courants simples ceux dont le mouvement à travers un tuyau solide est caractérisé par ce fait que la composante de la vitesse dans la direction de U n'existe pas, et où, de plus, les vitesses et les pressions sont égales tout le long d'un même parallèle. Nous envisagerons ensuite le cas d'un mouvement uniforme.

De tels mouvements sont caractérisés par :

$$u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Dans ce cas, les équations fondamentales se simplifient et deviennent :

$$-g - \frac{g}{r} \frac{\partial p}{\partial \zeta} = w \frac{\partial w}{\partial \zeta} + v \frac{\partial w}{\partial r} \quad (A_1)$$

$$-g \frac{\partial p}{\partial r} = w \frac{\partial v}{\partial \zeta} + v \frac{\partial u}{\partial r} \quad (B_1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (D_1)$$

on a, en outre :

$$\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 2\lambda$$

μ et ν sont nuls.

Dans le cas où $\lambda = 0$, c'est-à-dire quand il existe un potentiel des vitesses, la fonction F qui le caractérise est une fonction de r et de ζ ; on a donc les équations :

$$w = \frac{\partial F}{\partial \zeta}; \quad v = \frac{\partial F}{\partial r}$$

Le faisceau de courbes $F = C^{te}$ détermine les méridiennes $F_1, F_2, \dots$ des surfaces de révolution correspondant à des potentiels de vitesse égaux, et dont les trajectoires orthogonales représentent les lignes d'écoulement $S_1, S_2, \dots$ en vertu des relations :

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{v}{w} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\zeta}{dt}} = \frac{dr}{d\zeta}$$

tandis que les tangentes à ces courbes coïncident avec la vitesse totale $c = \sqrt{w^2 + v^2}$ (fig. 7). Chaque courbe d'écoulement peut être considérée comme la méridienne d'une surface de révolution solide, constituée de telle façon que, à l'extérieur et à l'intérieur de cette surface, l'écoulement ait lieu sans tourbillons.

(*) Traduction des articles parus dans la *Schweizerische Bauzeitung* vol. XLI; nos 19, 21, 22, 25 et 26, par M. Georges SERVIÈRE, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, ingénieur aux Ateliers de constructions NEYRET-BRENIER et Cie de Grenoble.

Connaissant la fonction F , on peut déterminer les courbes d'écoulement; on peut également déterminer les composantes w et v de la vitesse, et, par suite, au moyen des équations fondamentales (A_1) et (B_1), les pressions en chaque point de l'espace considéré.

La première préoccupation doit donc être de trouver la fonction F ; on y arrive au moyen de l'équation de continuité (D_1).

En remplaçant, dans cette équation, v et w par les valeurs $\frac{\partial F}{\partial \zeta}$ et $\frac{\partial F}{\partial r}$ correspondant à la condition $\lambda = 0$, on obtient l'équation aux différentielles partielles :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0 \quad (D_2)$$

dont l'intégrale générale donne l'ensemble des fonctions F cherchées; chaque intégrale particulière correspond à un cas spécial, déterminant un mouvement d'écoulement de la forme cherchée, au moyen des valeurs qui donnent la forme, la vitesse et les pressions.

Il n'y a aucune difficulté à trouver quelques intégrales particulières satisfaisant à l'équation (D_2).

La fonction : $F = k_1 \zeta + k_2$

donne, avec k_1 et k_2 constants.

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = k_1 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0$$

donc : $\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0$

De même la fonction : $F = Lkr$

où L représente les logarithmes naturels, et où k est une constante, donne :

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{k}{r} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = -\frac{k}{r^2}$$

et la relation (D_2) est encore satisfaite car elle devient :

$$0 + \frac{k}{r^2} - \frac{k}{r^2} = 0$$

Le premier cas correspond au mouvement dans des cylindres circulaires droits, le deuxième à un écoulement radial entre deux plans perpendiculaires à l'axe des ζ .

Nous n'insisterons pas d'avantage sur ces deux cas.

* * *

La fonction :

$$F = 2k\zeta^2 - kr^2$$

où $K = C^{te}$, correspond à un autre cas spécial intéressant.

Il vient :

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = 4k\zeta, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = 4k; \quad \frac{\partial F}{\partial r} = -2kr; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = -2k$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 4k - 2k - 2k = 0$$

L'équation (D_2) est donc satisfaite par cette fonction F .

Le faisceau de courbes :

$$F = 2k\zeta^2 - kr^2 = C^{te}$$

représente les méridiennes des surfaces correspondant à un même potentiel des vitesses; ce sont des hyperboles, dont les asymptotes font avec l'axe des ζ un angle dont la tangente est égale $1/\sqrt{2}$ (fig. 8).

En vertu des égalités :

$$w = \frac{\partial F}{\partial \zeta} = +4k\zeta \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial F}{\partial r} = -2kr$$

w ne dépend que de ζ , v seulement de r ; si r et ζ sont de même signe, w et v sont de signe contraire.

La vitesse totale est déterminée par :

$$c^2 = w^2 + v^2 = 16k^2\zeta^2 + 4k^2r^2$$

Il en résulte que les méridiennes des surfaces d'égale vitesse sont des ellipses, dont les axes principaux coïncident avec l'axe des ζ , et avec la perpendiculaire à cet axe passant par l'origine des coordonnées. Ces ellipses ont toutes leurs axes principaux dans le même rapport 2/1, le petit axe coïncidant avec l'axe des ζ .

$$\text{De :} \quad \frac{dr}{d\zeta} = \frac{v}{w} = \frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{\frac{\partial F}{\partial \zeta}} = -\frac{2kr}{4k\zeta} = -\frac{r}{2\zeta}$$

on déduit l'équation des courbes d'écoulement :

$$S = r^2\zeta = C^{te}$$

Ce sont des courbes du 3^e degré, ayant comme asymptotes l'axe des ζ , et la perpendiculaire à cet axe passant par l'origine; pour qu'elles soient réelles, il faut que S et ζ soient de même signe.

La fig. 8 représente un faisceau de ces courbes.

Les équations fondamentales (A₁) et (B₁), avec $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$ et $\frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0$, deviennent :

$$-g - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial \zeta} = w \frac{\partial w}{\partial \zeta} \quad (A_1)$$

$$-\frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial r} = v \frac{\partial v}{\partial r} \quad (B_1)$$

En multipliant (A₁) par $d\zeta$, (B₁) par dr , et additionnant, on a :

$$-g d\zeta - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial \zeta} d\zeta - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial r} dr = w \frac{\partial w}{\partial \zeta} d\zeta + v \frac{\partial v}{\partial r} dr$$

$$\text{ou :} \quad -g d\zeta - \frac{g}{\gamma} dp = d \frac{w^2}{2} + d \frac{v^2}{2} = d \frac{c^2}{2}$$

On a, en outre, pour déterminer la pression, l'équation :

$$\frac{p - p_0}{\gamma} + (\zeta - \zeta_0) + \frac{c^2 - c_0^2}{2g} = 0$$

Ce cas particulier est intéressant, et susceptible d'applications pratiques, d'abord parce qu'il donne la forme des lignes d'écoulement, et, ensuite, parce que la composante axiale de la vitesse ne dépend que de ζ ; elle est donc

constante en tous les points d'un même plan perpendiculaire à l'axe des ζ ; l'exemple suivant montre l'intérêt que présente ce cas.

Soit à déterminer, au moyen de la fonction F , un tuyau, pour un débit de 4 m³ par seconde, de telle façon que le liquide s'écoule dans le sens de la pesanteur; le tuyau a 4 m. de long, la composante w_e de la vitesse d'entrée a pour valeur, suivant l'axe, 4 m. par seconde, la composante w_s , de la vitesse à la sortie, 1 m. par seconde.

La fonction F est connue lorsque k est déterminé.

Nous distinguerons les valeurs à l'entrée et à la sortie au moyen des indices e et s ; il vient :

$$w_e = 4k\zeta_e; \quad w_s = 4k\zeta_s$$

$$\text{d'où :} \quad w_e - w_s = 4k(\zeta_e - \zeta_s)$$

w , et par suite w_e et w_s , sont dirigés dans le sens de la pesanteur et, par conséquent, dans le sens des ζ négatifs.

$$\text{On a :} \quad w_e = -4 \text{ m.}, \quad w_s = -1 \text{ m.}$$

$$\zeta_e - \zeta_s = \text{longueur du tuyau} = 4 \text{ m.}$$

et, par suite :

$$-3 = 4k \cdot 4 \quad \text{d'où :} \quad k = -\frac{3}{16}$$

L'équation de la méridienne des surfaces correspondant à un même potentiel de vitesse devient donc :

$$F = -\frac{3}{8}\zeta^2 + \frac{3}{16}r^2$$

L'équation donnant les composantes axiales et radiales de la vitesse deviennent :

$$w = -\frac{3}{4}\zeta \quad \text{et} \quad v = +\frac{3}{8}r$$

L'équation donnant la vitesse c devient :

$$c^2 = \frac{9}{16}\zeta^2 + \frac{9}{64}r^2$$

elle donne les méridiennes des surfaces d'égale vitesse.

Les courbes d'écoulement correspondent à l'équation $S = r^2\zeta$; pour déterminer la valeur de la constante S pour la courbe d'écoulement extrême, c'est-à-dire pour déterminer la méridienne du tuyau, désignons par r_m les rayons de la dernière ligne; il vient, en appelant Q le débit par seconde :

$$Q = \pi r_{me}^2 w_e = \pi r_{ms}^2 w_s$$

où il faut remplacer w_e et w_s par leurs valeurs numériques; avec $Q = 4 \text{ m}^3$, on a : $r_{me} = 0\text{m},564$ et $r_{ms} = 1\text{m},128$.

En reportant ces valeurs dans l'équation des lignes d'écoulement, et, en tenant compte de ce que :

$$w_e = -\frac{3}{4}\zeta_e \quad \text{d'où} \quad \zeta_e = \frac{16}{3} \text{ m.}$$

on obtient, comme constante de l'équation des courbes d'écoulement correspondant à la courbe extrême, c'est-à-dire la méridienne du tuyau :

$$S_m = r_{me}^2 \zeta_e = 0,564^2 \cdot \frac{16}{3} = 1\text{m},71$$

Avec $k = +\frac{3}{16}$, au lieu de $k = -\frac{3}{16}$, on aurait le mouvement contraire, c'est-à-dire l'écoulement par une buse.

✱

✱ ✱

Si l'on écrit l'équation (D_9) sous la forme :

on voit que, pour satisfaire à cette équation, on peut poser :

S étant une fonction de χ et de r ; on a alors, pour l'équation des lignes d'écoulement :

et S représente la fonction des courbes d'écoulement si elle satisfait à la condition :

Cette condition s'écrit :

ou finalement :

L'équation différentielle générale de la fonction des courbes d'écoulement est donc du deuxième ordre, et de même forme que la fonction du potentiel des vitesses; ces deux équations ne diffèrent que par le signe du terme du premier ordre.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} = 0$$
$$F = \frac{\partial X}{\partial z} \quad \text{et} \quad S = -r \frac{\partial X}{\partial z}$$

Si F et S sont des fonctions de cette forme, on doit donc avoir, quand on y remplace F et S par leurs valeurs en fonction de X :

$$\begin{aligned} r_e &= 0^{\text{m}}56.40, & r_1 &= 0^{\text{m}}59.25, & r_2 &= 0^{\text{m}}62.75 \\ r_3 &= 0^{\text{m}}67.0, & r_4 &= 0^{\text{m}}71.75, & r_5 &= 0^{\text{m}}77.25 \\ r_6 &= 0^{\text{m}}85.0, & r_7 &= 0^{\text{m}}96.0, & r_s &= 1^{\text{m}}12.80 \end{aligned}$$

Un tel tuyau peut servir de conduite d'aspiration pour une turbine, si les conditions relatives à l'entrée et à la sortie sont remplies; c'est ce que nous rechercherons plus loin.

Si F et S sont des fonctions de cette forme, on doit donc avoir, quand on y remplace F et S par leurs valeurs en fonction de X :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad (D)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} = 0 \quad (E)$$

On doit donc avoir aussi :

$$\frac{\partial^3 X}{\partial \chi^3} + \frac{\partial^3 X}{\partial \chi \partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 X}{\partial \chi \partial r} = 0$$

$$\text{ou : } \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\partial^2 X}{\partial \chi^2} + \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} = 0 \quad (a)$$

$$\text{et : } -\frac{\partial^3 X}{\partial r \partial \chi^2} - \frac{\partial^3 X}{\partial r^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial X}{\partial r} = 0$$

$$\text{ou : } -\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial^2 X}{\partial \chi^2} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} = 0 \quad (b)$$

la fonction X satisfait bien aux équations (a) et (b).

On a ainsi un moyen pour obtenir de nouvelles fonctions au moyen des solutions particulières; on peut aussi développer les équations de condition pour de nouvelles formes de mouvement, soit que l'on déduise les fonctions F et S d'une fonction X connue, soit que, connaissant F et S, on en déduise une nouvelle fonction X par la méthode indiquée ci-dessus.

Les équations (D) et (E) fournissent également des solutions, au moyen de développements en série de la forme :

$$R = k_0 \chi^n f_0(r) + k_1 \chi^{n-1} f_1(r) + \dots$$

dans lesquels on détermine les coefficients k et les fonctions $f(r)$, qui ne contiennent que la variable r , en formant les quotients différentiels partiels $\frac{\partial R}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^3 R}{\partial r^3}$, et en les portant dans les équations (D) et (E).

On obtient, par exemple, entre autres, pour F le développement en série :

$$F = k_0 \left\{ \begin{array}{l} \chi^n - \frac{n(n-1)}{2^2} \chi^{n-2} r^2 + \\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 \cdot 4^2} \chi^{n-4} r^4 - \dots \end{array} \right\}$$

ou bien :

$$F = k_0 \chi^n \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{n(n-1)}{2^2} \left(\frac{r}{\chi}\right)^2 + \\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 \cdot 4^2} \left(\frac{r}{\chi}\right)^4 - \dots \end{array} \right\}$$

Pour $n = -1$, on a :

$$F = \frac{k_0}{\chi} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{\chi^2}\right) + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \left(\frac{r^2}{\chi^2}\right)^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \left(\frac{r^2}{\chi^2}\right)^3 + \dots \right]$$

En se reportant au développement du binôme :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} x^3 + \dots$$

on obtient $F = \frac{k_0}{\sqrt{\chi^2 + r^2}}$ comme potentiel des vitesses.

Les méridiennes des surfaces correspondant à un même potentiel des vitesses sont ici des cercles concentriques,

ayant pour centre l'origine, et pour rayon $\frac{k_0}{F}$; on a ensuite :

$$w = \frac{\partial F}{\partial \chi} = -\frac{k_0 \chi}{\sqrt{(\chi^2 + r^2)^3}}; \quad v = \frac{\partial F}{\partial r} = -\frac{k_0 r}{\sqrt{(\chi^2 + r^2)^3}}$$

$$c^2 = w^2 + v^2 = \frac{k_0^2}{(\chi^2 + r^2)^2}; \quad c = \frac{k_0}{\chi^2 + r^2}$$

Dans ce cas, les surfaces de même potentiel des vitesses et d'égale vitesse totale sont identiques. L'équation des lignes d'écoulement s'obtient par les relations :

$$\frac{\partial S}{\partial \chi} = -r \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{k_0 r^2}{\sqrt{(\chi^2 + r^2)^3}}$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = +r \frac{\partial F}{\partial \chi} = -\frac{k_0 r \chi}{\sqrt{(\chi^2 + r^2)^3}}$$

$$\text{qui donnent : } S = + \frac{k_0 \chi}{\sqrt{\chi^2 + r^2}}$$

En posant $S = C^{\text{te}}$ on a l'équation d'un faisceau de droites passant par l'origine.

La forme de mouvement déterminée par les équations :

$$F = \frac{k_0}{\sqrt{\chi^2 + r^2}} \quad \text{et} \quad S = \frac{k_0 \chi}{\sqrt{\chi^2 + r^2}}$$

correspond au mouvement dans un tuyau conique ayant son sommet à l'origine des coordonnées.

On obtient d'autres solutions, en faisant $F = k^2 f(\chi) f(r)$, où $f(\chi)$ est seulement fonction de χ , $f(r)$ seulement fonction de r , et où k est constant; on aura alors :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \chi^2} = k^2 f(r) \frac{d^2 f(\chi)}{d\chi^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial r} = k^2 f(\chi) \frac{df(r)}{dr}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = k^2 f(\chi) \frac{d^2 f(r)}{dr^2}$$

L'équation (D₂) correspondante doit donc être :

$$k^2 f(r) \frac{d^2 f(\chi)}{d\chi^2} + \frac{k^2}{r} f(\chi) \frac{df(r)}{dr} + k^2 f(\chi) \frac{d^2 f(r)}{dr^2} = 0$$

ceci a lieu lorsque les fonctions $f(\chi)$ et $f(r)$ satisfont aux équations différentielles simultanées :

$$\frac{d^2 f(\chi)}{d\chi^2} + k^2 f(\chi) = 0; \quad \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - k^2 f(r) = 0 \quad (I)$$

ou bien :

$$\frac{d^2 f(\chi)}{d\chi^2} - k^2 f(\chi) = 0; \quad \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} + k^2 f(r) = 0 \quad (II)$$

Il en résulte :

$$f(\chi) = A \sin k\chi + B \cos k\chi \quad \text{pour le cas (I)}$$

$$f(\chi) = A e^{k\chi} + B e^{-k\chi} \quad \text{— (II)}$$

où A et B sont des constantes.

La détermination de la fonction $f(r)$ nécessite l'intégration de l'équation différentielle du deuxième ordre de la forme générale :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0$$

où m et n sont deux constantes, positives ou négatives.

Cette équation différentielle reparaît dans un certain nombre de problèmes de physique mathématique, entre autres en hydrodynamique, dans la théorie des cyclones et des ondes de marée; on les intègre au moyen des formules de Bessel.

Il est facile de voir que le produit $k^2 f(\tau) f(r)$ donne aussi des solutions pour la fonction S.

Les formes de mouvement obtenues par ce procédé sont de nature périodique.

En employant, d'une part, le procédé indiqué, et en remarquant, d'autre part, que la somme de solutions particulières donne en général une autre solution particulière pouvant servir de point de départ pour le procédé indiqué, on obtient une infinité de formes, qui correspondent toutes à des mouvements non tourbillonnaires; la détermination de ces formes et leur recherche, en tenant compte des besoins de la pratique, fera l'objet d'une étude ultérieure.

* * *

Soit un tuyau dont la méridienne a été déterminée comme nous venons de le dire, et où le mouvement du fluide a lieu comme l'indiquent les équations précédentes; on a vu que les vitesses et les pressions, tant à l'entrée qu'à la sortie du tuyau, doivent satisfaire à certaines conditions correspondant à la forme choisie, et que, d'autre part, ces conditions doivent être possibles, physiquement parlant.

Lorsque, par exemple, un tuyau ainsi déterminé doit être adapté à une turbine comme tuyau d'aspiration, on doit satisfaire aux conditions suivantes :

1° La vitesse doit avoir constamment, en grandeur et en direction, au sortir de la roue mobile de la turbine, aux points a, 1, 2, 3, b, de l'arête de sortie ab, les valeurs déduites des 2 fonctions F et S. Si la turbine est calculée dans l'hypothèse où la vitesse absolue de sortie est constante en tous les points de la surface de sortie, il faut que cette surface soit une surface d'égale vitesse totale; la forme du tuyau étant donnée, la méridienne ab de la surface de sortie se déterminerait donc à l'aide de l'équation,

$$c^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2$$

où c représente la valeur constante de la vitesse absolue de sortie de la roue mobile, valeur choisie par la détermination de l'aubage; on peut encore déterminer la forme du tuyau, en partant d'une forme déterminée de la ligne ab; mais ce dernier procédé conduit à de grandes difficultés de calcul.

Dans l'exemple actuel, la forme de l'arête de sortie serait obtenue au moyen de l'équation

$$c^2 = 16k^2 \tau^2 + 4k^2 r^2$$

Dans le volume XLV du journal *des Vereines deutscher Ingenieure*, année 1901, pages 1602 et suiv., M. l'Ingénieur N. BAASHUUS a donné un procédé graphique pour déterminer les vitesses aux différents points de la surface de

sortie d'une turbine Francis ou américaine. A la forme près, le procédé repose sur les mêmes principes que ceux qui viennent d'être développés ici. Etant donné une forme de tuyau, on dessine les lignes d'écoulement, et les trajectoires orthogonales de ces lignes, considérées comme méridiennes des surfaces de révolution représentant les surfaces de niveau; on suppose que, en chaque point de ces surfaces de niveau, la vitesse totale, déduite du débit par seconde et de la superficie de la surface de niveau, reste sensiblement constante; l'auteur montre (pages 1604 et 1605) que cette hypothèse n'est qu'approchée.

Tant que la forme du tuyau permet un écoulement de cette nature, ces surfaces de niveau ne sont autres que nos précédentes surfaces de même potentiel des vitesses; en général, la vitesse totale ne reste constante, en grandeur et dans la direction de l'axe, que pour les points d'un même parallèle; elle est différente pour les différents points de la méridienne de ces surfaces de niveau; toutefois, nous allons montrer qu'il n'y a aucune difficulté à trouver la vitesse en chaque point d'une méridienne et, par suite, dans tout l'espace considéré, avec l'exactitude que comporte un procédé graphique.

Soient F_a et F_b les méridiennes de deux surfaces de même potentiel des vitesses infiniment voisines, et $1_a 1_b$, $2_a 2_b$, . . . les segments interceptés par ces surfaces sur les lignes d'écoulement S_1 , S_2 , . . . ; on peut considérer ces segments comme les distances ϵ_1 , ϵ_2 , . . . entre les surfaces F_a et F_b .

Il résulte de la théorie générale du potentiel que la vitesse totale en un point quelconque 1, 2, . . . de la surface équipotentielle F_a est inversement proportionnelle à la distance correspondante $\epsilon_1 = 1_a 1_b$, $\epsilon_2 = 2_a 2_b$. . . de telle sorte que l'on a :

$$c_1 = \frac{\alpha}{\epsilon_1}; \quad c_2 = \frac{\alpha}{\epsilon_2}; \quad \dots$$

où α est un facteur de proportionnalité (voir Clausius, fonction potentielle, page 5).

Soient dl un élément d'arc de la méridienne F_a , et r le rayon correspondant; appelons L la longueur totale de la méridienne comprise entre les parois du tuyau; en chaque point d'une surface équipotentielle la vitesse totale est normale à la surface; le débit traversant la surface équipotentielle, et par suite le tuyau, exprimé en mètres cubes par seconde, est donc :

$$Q = \int_0^L \frac{2\pi r \alpha}{\epsilon} dl = 2\pi \alpha \int_0^L \frac{r}{\epsilon} dl$$

On peut déterminer graphiquement l'intégrale $J = \int_0^L \frac{r}{\epsilon} dl$, en mesurant les segments ϵ entre deux lignes méridiennes voisines, en portant en ordonnées les valeurs de $\frac{r}{\epsilon}$ et en abscisses les longueurs l ; on détermine alors la valeur de J par quadrature.

Pour une valeur de Q donnée, on a :

$$\alpha = \frac{Q}{2\pi J} \quad \text{et par suite} \quad c = \frac{\alpha}{\epsilon}$$

qui fait connaître la valeur de la vitesse totale en chaque point de la méridienne F_a .

Fig. 9

Si l'on opère de la même manière pour un certain nombre de méridiennes F , on obtient une représentation de la répartition de la vitesse dans le tuyau, et il n'y a plus de difficulté à dessiner les méridiennes des surfaces d'égale vitesse totale, ou à calculer les vitesses pour les points d'une méridienne déterminée.

C'est ainsi que la fig. 10 est calculée et dessinée. Sur les méridiennes F_a et F_n , la vitesse totale c a les valeurs suivantes :

$c = 0,673$	$0,640$	$0,617$	$0,604$	$0,602$	$0,601$	$0,600$
en 1_a	2_a	3_a	4_a	5_a	6_a	7_a
$c = 0,830$	$0,764$	$0,722$	$0,661$	$0,612$	$0,584$	$0,550$
en 1_n	2_n	3_n	4_n	5_n	6_n	7_n

Une fois cette opération effectuée, on peut vérifier que, avec la forme de tuyau choisie, le mouvement du fluide, caractérisé par les lignes d'écoulement, a lieu sans tourbillons, c'est-à-dire que les courbes F et S représentent bien des fonctions de la forme générale déterminée précédemment.

Fig. 10.

Pour cela, on mène, par un point quelconque de la zone étudiée, une parallèle à l'axe des χ , et une perpendiculaire à cette droite; on détermine leurs points d'intersection avec les méridiennes, et les lignes d'écoulement F et S ; on prend chacune de ces droites comme axe des abscisses, et on porte en ordonnées, en chaque point d'intersection avec les lignes susdites, respectivement la composante v (pour la parallèle à ox) et la composante w (pour la perpendiculaire à ox); on obtient ainsi w en fonction de r , et v en fonction de χ ; pour que le mouvement ait lieu sans tourbillons, on doit pouvoir vérifier la relation :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \chi}$$

ce qui signifie que les tangentes aux deux courbes obtenues, au point qui sert d'origine dans la construction, doivent être également inclinées sur les axes des abscisses.

Quoiqu'il en soit, ce procédé graphique donne, en pratique, une détermination suffisamment exacte pour un tuyau de cette nature.

2° Le fond du canal de fuite, et la hauteur du niveau aval, doivent permettre à l'écoulement de se continuer d'une manière régulière, en suivant les lignes d'écoulement, théoriquement jusqu'à l'infini, pratiquement jusqu'à une distance suffisante pour que la réaction, provenant des circonstances extérieures, n'ait qu'une influence négligeable.

On y arrive en faisant épouser au radier la forme même des courbes d'écoulement, et en prolongeant la méridienne du tuyau, au voisinage de la sortie, suivant une courbe d'écoulement, parce que, à l'arrivée dans le bief d'aval, il y a discontinuité dans le mouvement.

Pour plus de clarté, conservons l'exemple du tuyau précédemment déterminé au moyen de la fonction :

$$F = 2k\chi^2 - kr^2$$

et pour lequel on a calculé un exemple numérique.

On a trouvé :

	Cas général	Cas particulier $k = -\frac{3}{16}$
$F =$	$= 2k\chi^2 - kr^2$	$= -\frac{3}{8}\chi^2 + \frac{3}{16}r^2$
$w = \frac{\partial F}{\partial \chi} =$	$4k\chi$	$= -\frac{3}{4}\chi$
$v = \frac{\partial F}{\partial r} =$	$-2kr$	$= +\frac{3}{8}r$
$c^2 = w^2 + v^2 =$	$16k^2\chi^2 + 4k^2r^2$	$= \frac{9}{16}\chi^2 + \frac{9}{64}r^2$
$S =$	$= r^2\chi$	

On a trouvé, pour la méridienne du tuyau, la constante $S_m = 1,71$, en partant d'un débit de 4 m^3 par seconde, et d'une vitesse de 4 m par seconde à l'entrée dans le tuyau.

Il résulte de l'équation donnant w que, pour $\chi = 0$, on a aussi $w = 0$; donc, dans un plan perpendiculaire à l'axe des χ , et passant par l'origine des coordonnées, l'écoulement radial subsiste seul; le plan en question peut donc constituer le fond du canal; il est à une distance de la surface d'entrée égale à :

$$\chi_e = \frac{w_e}{4k} = \frac{16}{3} = 5,333$$

Pour que le prolongement de la méridienne du tuyau vers le bas soit une ligne d'écoulement, telle que nous l'avons conçue plus haut, il faut que, en chaque point de la surface du tuyau, la pression, résultant de sa forme et de l'équation :

$$\frac{p - p_s}{\gamma} + \frac{c^2 - c_s^2}{2g} + (\chi - \chi_s) = 0$$

soit égale à la pression provenant du liquide au repos situé au-dessus (fig. 11); c'est-à-dire que l'on doit avoir $\frac{p - p_s}{\gamma} = h$, en appelant h la distance verticale du point p au niveau

aval. Si l'on représente par y la distance des points du niveau aval à la surface supposée plane et horizontale du fond, cette distance est constante dans le cas où le niveau aval est une surface plane; par suite, puisque $r = z + h$, on devrait avoir :

$$\frac{c^2 - c_s^2}{2g} - z_s = C^{te}$$

c'est-à-dire que la vitesse c doit être la même en tous les points de la ligne d'écoulement; or, d'après ce qui a été vu plus haut, on a :

$$c^2 = 16k^2z^2 + 4k^2r^2 \quad \text{et} \quad S_m = r^2z$$

Donc, pour la surface limite, on a :

$$c^2 = 16k^2z^2 + 4k^2 \frac{S_m}{z}$$

La constance de c n'est donc pas réalisée sur toute la surface limite, mais seulement dans le voisinage immédiat des points pour lesquels $\frac{dc}{dz} = 0$, c'est-à-dire pour les points tels que l'on ait :

$$z = 0,5 \sqrt[3]{S_m} \quad r = 1,41 \sqrt[3]{S_m}$$

et, pour $S_m = 1,71$:

$$z = 0,6 \quad r = 1,69$$

Prolongeons le tuyau déterminé précédemment pour 4 m. de longueur seulement, de telle façon que les coordonnées extrêmes de la méridienne aient les valeurs données précédentes (c'est ce qui a été fait, fig. 8, pour la partie gauche du tuyau); nous obtenons ainsi, dans le voisinage immédiat de l'extrémité du tuyau prolongé, une surface, telle que l'écoulement à la sortie ait lieu dans des conditions satisfaisant aux équations développées plus haut.

Fig. 12.

On voit facilement que la vitesse c , à la surface du niveau aval, est minima le long de l'intersection de cette surface avec le tuyau. Si la méridienne du tuyau, prolongée virtuellement au-dessous du niveau aval, devait constituer encore une ligne d'écoulement, la surface libre de l'eau dans le bief d'aval devrait être une surface de révolution, dont la méridienne est représentée fig. 12; la dénivellation théorique Δ vers la sortie serait de 5 mm. pour $r = 2,07$, et de 31 mm. pour $r = 2,32$; ces valeurs sont encore inférieures aux variations naturelles prises par la surface du

niveau aval pendant la marche; avec un tuyau de cette forme, on peut donc satisfaire avec une exactitude suffisante aux conditions à la sortie et, si les valeurs relatives à l'entrée sont exactes, l'écoulement se fera conformément à la théorie.

Le frottement sur les parois du tuyau a seul une influence perturbatrice, car, ainsi que l'a montré Grashof, dans l'ouvrage cité — page 388 — dans le cas où il existe un potentiel des vitesses, l'influence du frottement interne est négligeable; il faut tenir compte aussi de l'air aspiré, ou rendu libre par suite de la dépression, et entraîné, car, dans ce cas, la condition de l'incompressibilité n'est plus remplie.

L'expérience seule peut montrer de quel ordre est l'influence de ces phénomènes; c'est ainsi que l'on trouvera pour quelle valeur de la dépression l'air se dégage en quantité telle que la condition de l'incompressibilité, qui sert de base à ces développements, n'est plus remplie d'une manière suffisante.

* * *

Les formes de mouvement que nous avons étudiées jusqu'à présent pour des écoulements simples supposent l'existence d'un potentiel des vitesses et, par conséquent :

$$\lambda = 0.$$

Nous allons encore traiter un problème d'ordre général, pour des écoulements de même nature, mais, dans le cas où il n'existe pas de potentiel des vitesses, le fluide sera encore supposé dénué de frottements.

$$\text{Dans ce cas :} \quad 2\lambda = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

Par conséquent λ est, en général, fonction de r et de z . Les propriétés de cette fonction λ découlent de ce qui suit :

Si on prend les différentielles partielles : de l'équation (A₁) par rapport à r , de l'équation (B₁) par rapport à z , que l'on fasse la différence, en remarquant que :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial r} = \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z}$$

il vient :

$$\left\{ w \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} \right) + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} \right\} = 0$$

ou bien :

$$\left\{ w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right\} = 0$$

L'équation (D₁) donne :

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{v}{r}$$

on a donc :

$$w \frac{\partial \lambda}{\partial z} + v \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{v}{r} \lambda = 0$$

ou :

$$w \frac{\partial \lambda}{\partial z} + v \frac{\partial \lambda}{\partial r} = 0 \quad (a)$$

L'équation de continuité (D_1) peut aussi s'écrire :

$$\frac{\partial r w}{\partial z} + \frac{\partial r v}{\partial r} = 0$$

et il en résulte que l'on peut poser :

$$r w = \frac{\partial S}{\partial r}; \quad - r v = \frac{\partial S}{\partial z} \quad (b)$$

où S , fonction de r et de z , n'est autre que la fonction des lignes d'écoulement.

En prenant les différentielles partielles des équations (b), on a :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial S}{\partial r}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$$

et comme :

$$\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\lambda$$

on a :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} = 2r\lambda \quad (c)$$

En tirant les valeurs de w et de v des équations (b), et en portant leurs valeurs dans l'équation (a), il vient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial r} = 0 \quad (a_1)$$

Si l'on tient compte de la relation :

$$\frac{\lambda}{r} = mS + n$$

où m et n sont des constantes, l'équation (a_1) et, par suite, aussi l'équation (a) sont satisfaites, car on a l'identité :

$$\frac{m}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{m}{r} \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial r} = 0$$

Par suite :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} = 2(mr^2 S + nr^2) \quad (d)$$

est l'équation différentielle générale des fonctions des lignes d'écoulement dans des solides creux de révolution, pour des écoulements simples, et pour un liquide dénué de frottements.

Pour $m = 0$ et $n = 0$, on retrouve l'équation différentielle relative au cas d'un potentiel des vitesses.

On sait que Lagrange a établi le principe suivant : dans un fluide en mouvement, sous l'action de forces pour lesquelles il existe une fonction des forces, un élément de fluide qui ne tourne pas (par conséquent, pour lequel $\lambda = 0$; $\mu = 0$, $v = 0$) n'entre jamais en rotation (voir GRASHOF : *Theoretische Maschinenlehre*, 1^{er} vol., page 392).

Dans la suite, HELMHOLTZ, dans sa théorie des mouvements tourbillonnaires, a développé les propositions suivantes :

Une ligne tourbillonnaire est toujours composée des mêmes points matériels.

Le produit de la section d'un filet tourbillonnaire par sa vitesse de rotation est constant pour tous les points du filet (voir encore GRASHOF : *Theoretische Maschinenlehre*, 1^{er} vol., pages 394 et suiv.).

L'équation $w \frac{\partial \lambda}{\partial z} + v \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{v}{r} \lambda = 0$, l'équation (a), et l'équation $\frac{\lambda}{r} = mS + n$, correspondent à ces cas, comme nous allons le montrer.

Ecrivons la première de ces équations sous la forme :

$$w \frac{\partial \lambda}{\partial z} + v \frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{v}{r} \lambda$$

et posons, dans le premier membre :

$$w = \frac{dz}{dt} \quad \text{et} \quad v = \frac{dr}{dt}$$

il vient :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{dr}{dt} = \frac{v}{r} \lambda$$

ou :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{v}{r} \lambda$$

c'est-à-dire que la variation instantanée de la vitesse de rotation d'un élément quelconque dépend linéairement de la vitesse de rotation elle-même; donc, si à un moment donné cette vitesse est nulle, elle est toujours nulle.

L'équation (a), pour $w = \frac{dz}{dt}$ et $v = \frac{dr}{dt}$, donne $\frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda}{r} \right) = 0$,

c'est-à-dire que la variation instantanée de $\frac{\lambda}{r}$ pour un élément quelconque, est nulle, ou que $\frac{\lambda}{r}$ est constant lorsque l'élément se déplace; donc, pour une ligne d'écoulement déterminé, c'est-à-dire pour la trajectoire d'un élément déterminé, S est constant, et, par suite, l'équation $\frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda}{r} \right) = 0$

est satisfaite par $\frac{\lambda}{r} = mS + n$. Comme les différents points d'un parallèle sont animés du même mouvement, et que les parallèles représentent les lignes tourbillonnaires, puisqu'il existe une vitesse de rotation λ , il résulte de ce qui précède que ces lignes tourbillonnaires sont toujours composées des mêmes points matériels.

Helmholtz appelle filet tourbillonnaire un corps filiforme, de section infiniment petite, que l'on obtient en menant, par les différents points du périmètre d'une surface infiniment petite, les lignes tourbillonnaires correspondantes; d'après ce qui précède, ce filet se compose toujours des mêmes éléments de fluide, et constitue, dans le cas actuel, un anneau; soit $\bar{\phi}$ la section infiniment petite du filet, et r son rayon moyen, il en résulte que $2\pi r \bar{\phi} = C^{te}$; mais nous savons que $\frac{2\lambda}{r}$ est constant pour chaque élément de la trajectoire $S = C^{te}$; il en résulte que $\lambda \bar{\phi} = C^{te}$, ce qui correspond bien aux propositions énoncées par Helmholtz.

Les équations (a), (b), (c), (d) peuvent donc servir de base pour les recherches relatives aux écoulements simples dans des corps creux de révolution.

(A suivre.)

G. SERVIÈRE.

AVIS IMPORTANT

Nous rappelons que tout ce qui concerne la Rédaction doit être adressé au rédacteur en chef, M. COTE, 24, rue Sully, à LYON, et que tout ce qui concerne l'Administration doit être adressé aux éditeurs, MM. GRATIER et REY, 23, Grande Rue, à GRENOBLE.