séparés; ils paraîtront néanmoins se toucher, à condition que les cellules soient assez petites et assez voisines pour qu'on ne puisse les distinguer. Mais l'ouverture de la pupille est finie, chaque élément a donc une grandeur finie, et ils se raccordent en réalité, à condition seulement que la distance linéaire entre deux cellules soit moindre que l'ouverture pupillaire.

A chaque instant l'image observée est limitée par les bords de l'épreuve, comme la vue des objets extérieurs le serait par les bords d'une lucarne à travers laquelle on regarderait. En déplaçant la tête, on voit d'autres objets s'encadrer entre les mêmes bords, et par un mouvement suffisant on fait, s'il s'agit d'un paysage, le tour de l'horizon. Il pourrait paraître invraisemblable *a priori* qu'une seule et même épreuve photographique puisse nous montrer une succession de vues différentes. Mais ce résultat s'explique simplement : lorsqu'on est en face de l'épreuve, l'image résultante qui apparaît projetée dans l'espace est la sommation d'éléments dont chacun est emprunté à la partie médiane de l'une des petites images cellulaires qui occupent toute l'étendue de l'épreuve. Lorsqu'on regarde celle-ci obliquement, la sommation se fait aux dépens d'éléments empruntés respectivement aux parties latérales des images cellulaires. Si celles-ci ont une ouverture de 120° , par exemple, on pourra balayer 120° de paysage. La perception est ainsi variée, parce que chaque cellule porte, imprimée dans son fond, une vue panoramique du monde extérieur. *Tota in minimis existit natura* (MALPIGHI).

On augmenterait encore l'angle balayé, on le porterait à 360° , en employant une pellicule convexe, cylindrique par exemple, au lieu d'une pellicule plane. Avec une pellicule bombée comme le serait une portion de sphère ou d'ellipsoïde, on embrasserait le ciel et la terre en même temps que tout l'horizon et la ressemblance du système avec certains yeux d'insectes deviendrait plus complète.

Lorsque le sens de la marche de la lumière est changé dans une chambre noire, les rayons reprennent à la sortie le même chemin qu'à l'entrée. Il en résulte que les déformations de l'image dues aux imperfections de l'objectif sont sans effet; elles sont éliminées grâce au renversement, et l'objectif, malgré ses défauts, fonctionne comme s'il était parfait.

6. Il reste donc à remplir une seule condition : la netteté de l'image au fond de chaque cellule. En d'autres termes, le rapport de ses deux rayons de courbure doit être égal à $n - 1$. Facile à énoncer, cette condition unique est assurément très difficile à réaliser avec une précision suffisante, étant données les faibles profondeurs de chaque cellule. On ne peut espérer vaincre cette difficulté technique que par l'emploi d'une machine à mouler de haute précision.

Le collodion, le celluloid ne sont pas d'ailleurs les seules substances réfringentes qu'on puisse songer à employer. Le verre permet d'obtenir également des sphérules qui forment lentilles, et qu'on sait fabriquer en nombre illimité : mais il reste à les cribler avec précision, et à les coller sur une membrane de collodion fournissant un supplément d'épaisseur exactement déterminé.

Les verres du commerce ont un indice qui peut dépasser 1,9 (maison Schott d'Iéna), mais qui actuellement n'atteint pas 2. Si l'on parvenait à faire $n = 2$, la difficulté technique indiquée plus haut et qui est d'ordre géométrique, ne se présenterait plus. On peut, en effet, démontrer que, si une sphère réfringente a un indice égal à 2, les rayons parallèles qu'elle reçoit convergent sur sa surface postérieure. Une pareille sphère, garnie sur la moitié de sa surface d'une couche sensible, constitue la plus simple des chambres noires, toujours au point pour l'infini quel que soit son diamètre. Les molybdates et tungstates de plomb ont des indices supérieurs à 2; en les mélangeant à des silicates, on peut espérer augmenter l'indice du mélange; mais on n'a pas réussi jusqu'à présent à empêcher ce mélange de cristalliser. Toutefois, ce sont là des difficultés d'ordre technique qui peuvent n'être pas insurmontables.

NOUVELLE THÉORIE DES TURBINES

Par le Professeur Dr H. LORENZ, de Danzig (*)

I. — Principes fondamentaux de la théorie

Toute la théorie de l'hydraulique, et par conséquent celle des turbines, repose sur la considération de filets liquides infiniment déliés, dont les sections, en régime normal, sont inversement proportionnelles aux vitesses correspondantes des particules liquides. Euler, en particulier, dans la théorie des turbines qu'il publia en 1754 (**), envisage uniquement les variations de pression et de vitesse des filets liquides moyens, sans rechercher, d'une façon générale, si les filets liquides voisins sont soumis aux mêmes lois.

L'application de cette méthode sommaire est facilitée par l'emploi de « coefficients de résistance », destinés à corriger les différences observées entre les résultats de la théorie et ceux de la pratique; à un point de vue strictement exact, la valeur de ces coefficients de résistance devrait être variable pour chaque turbine.

La modification que nous avons apportée à cette théorie a consisté, tout en continuant à nous appuyer sur des principes généraux connus, à trouver une méthode établissant une relation directe entre le mouvement des veines liquides et la forme du distributeur, de la roue mobile et du tuyau d'aspiration de la turbine, tandis que, jusqu'à ce jour, on s'est surtout proposé d'étudier la forme de l'aubage. PRASIL a déjà fait des recherches analogues aux nôtres pour les tuyaux d'aspiration (***) : nous indiquerons plus loin les résultats qu'il a obtenus en envisageant ce problème comme un cas particulier de la méthode générale.

Tout d'abord, il importe de choisir un système de coordonnées approprié à notre étude; étant donné le mouvement de la roue, nous considérerons un système de coordonnées cylindriques rapportées à l'axe même de rotation. Nous appliquerons provisoirement notre théorie aux turbines à admission totale et à axe vertical; c'est cet axe qui sera l'axe principal des coordonnées, et son sens positif sera celui de l'accélération de la pesanteur g .

Sur cet axe, nous fixons arbitrairement une origine O ; appelons z la distance au plan horizontal passant par l'ori-

FIG. 1.

(*) Traduction des articles parus dans la *Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen*, 2^e année, nos 17, 18, 19 et 20, par M. E. KREITMANN, ingénieur des Arts et Manufactures, et M. A. ROUTIN, ancien élève de l'Ecole Polytechnique.

(**) ZEUNER, dans sa publication devenue classique : *Vorlesungen über Theorie der Turbinen*, Leipzig 1899, pages 158 et suivantes, donne un aperçu des idées d'Euler à ce sujet.

Le lecteur pourra se reporter à la traduction française de cet ouvrage de Zeuner, par E. KREITMANN, ingénieur des arts et manufactures, publiée en 1905, à la librairie DUNOD, sous le titre : *Théorie des Turbines*.

(***) PRASIL. Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshöhlräumen. *Schweizerische Bauzeitung*, 1903 (Voir aussi *La Houille Blanche* : Mouvements des liquides dans les corps creux de révolution. Numéros de février, mars et avril 1908).

gine O d'une particule liquide en mouvement à un instant donné. Dans ce plan horizontal, nous nous donnons un axe origine OA; la droite, de longueur r , joignant l'origine à la projection sur ce plan horizontal de la particule liquide, fait avec l'axe OA un angle φ . La position de l'élément liquide considéré est déterminée dans l'espace par les trois coordonnées z , r et φ , ainsi que le montre la figure 1 ci-jointe.

Nous décomposerons la vitesse instantanée de l'élément liquide en trois composantes, l'une axiale, l'autre radiale et la troisième tangentielle; soient w_z , w_r et w_u ces composantes.

Au sujet de ces composantes, nous admettrons l'hypothèse qu'elles subissent des variations continues dans l'espace; de sorte que, lorsque les coordonnées z , r et φ de l'élément considéré sont devenues $z + dz$, $r + dr$, $\varphi + d\varphi$, les valeurs des composantes correspondantes sont :

$$w_z + \frac{\partial w_z}{\partial z} dz, \quad w_r + \frac{\partial w_r}{\partial r} dr, \quad w_u + \frac{\partial w_u}{\partial \varphi} d\varphi.$$

On peut remarquer que les aires des surfaces inférieure et supérieure de l'élément ont la même valeur $r dr d\varphi$; les aires des deux surfaces verticales latérales de l'élément sont, de même, toutes deux égales à $dz dr$; l'aire de la surface verticale cylindrique intérieure a pour valeur $(r d\varphi dz)$, et l'aire de la surface cylindrique extérieure a pour valeur $(r + dr) d\varphi dz$. La différence entre la quantité de liquide de poids spécifique γ , qui entre dans l'élément de volume $r dr dz d\varphi$, et celle qui en sort, a pour valeur, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur :

$$\left(r \frac{\partial w_r}{\partial z} + \frac{\partial w_u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial w_r}{\partial r} + w_r \right) \gamma dr dz d\varphi.$$

Mais la densité, et par conséquent la masse de l'élément :

$$dm = \frac{\gamma}{g} r dr dz d\varphi \quad (1)$$

sont invariables, les liquides étant incompressibles; par conséquent, la différence entre la quantité de liquide qui entre dans l'élément de volume et celle qui en sort doit être nulle. Si donc l'on écrit que l'expression trouvée plus haut, dans laquelle le terme entre parenthèses est seul à considérer, est nulle, on a la relation suivante :

$$\frac{\partial (w_z r)}{\partial z} + \frac{\partial (w_r r)}{\partial r} + \frac{\partial w_u}{\partial \varphi} = 0 \quad (2)$$

C'est l'équation de continuité d'un fluide parfait en coordonnées cylindriques.

Les variations de la pression dans la turbine pourraient s'exprimer d'une façon analogue, s'il n'y avait pas à tenir compte de la présence des aubes auxquelles l'eau transmet une partie de son énergie. Cette transmission de l'énergie se produit par suite d'une différence de pression sur les deux faces de chaque aube. Pour simplifier, nous supposons que ces aubes sont infiniment minces. Dans ces conditions, les variations de pression dans la roue ne seraient pas continues, alors qu'il est évident que la pression de l'eau varie d'une façon continue à son passage dans les turbines à admission totale. Pour faciliter l'étude du phénomène,

nous admettrons simultanément les hypothèses d'un nombre infini d'aubes, et de l'action sur chaque élément liquide d'une accélération représentant la réaction de ces aubes, dont nous désignerons les composantes par q_z , q_r et q_u . Nous pourrions alors considérer les variations de la pression elle-même comme continues, en reportant les discontinuités dues à l'aubage sur l'influence de cette accélération retardatrice. Il faut remarquer, de plus, que chaque élément liquide dm est soumis, par suite de la rotation de la turbine, à une accélération centrifuge $\frac{w_u^2}{r}$ et, en outre, à l'accélération de la pesanteur comptée, suivant l'axe principal des coordonnées, positivement de haut en bas. Si donc nous tenons compte des composantes q_z , q_r et q_u , ainsi que de la pression p , et de ses variations :

$$p + \frac{\partial p}{\partial z} dz, \quad p + \frac{\partial p}{\partial r} dr, \quad p + \frac{\partial p}{\partial \varphi} d\varphi,$$

nous pourrions écrire les formules dynamiques fondamentales suivantes :

$$\left. \begin{aligned} q_z + g - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dw_z}{dt} \\ q_r + \frac{w_u^2}{r} - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{dw_r}{dt} \\ q_u r - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= \frac{d(w_u r)}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

La dernière de ces équations est l'équation des moments. Multiplions les deux membres de chacune des équations (3) respectivement par dz , dr et $d\varphi$, et additionnons-les, en tenant compte des formules :

$$w_z = \frac{dz}{dt}, \quad w_r = \frac{dr}{dt}, \quad w_u = \frac{r d\varphi}{dt}, \quad (4)$$

$$w_z dw_z + w_r dw_r + w_u dw_u = w dw. \quad (5)$$

Nous obtenons l'équation du travail :

$$q_z dz + q_r dr + q_u r d\varphi + g dz - \frac{g}{\gamma} dp = w dw. \quad (6)$$

Dans cette équation (6), les trois premiers termes représentent le travail élémentaire transmis à l'aubage par l'unité de masse liquide; donc, la hauteur de chute correspondant au travail transmis à l'aubage a pour expression :

$$h = \frac{1}{g} \int (q_z dz + q_r dr + q_u r d\varphi), \quad (7)$$

l'intégrale étant prise depuis l'entrée jusqu'à la sortie de la roue mobile. Il s'ensuit qu'en divisant par g les différents termes de l'équation (6), et en intégrant cette équation dans les limites indiquées, nous obtenons la relation :

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + h - z_2 + z_1 = 0. \quad (8)$$

Le terme $z_2 - z_1$ désigne la hauteur verticale de la roue; le terme h comprend toutes les pertes de chute, par exemple celles dues aux chocs et au frottement. Dans la suite, nous ferons complètement abstraction de ces pertes de chute, c'est-à-dire que nous supposons une utilisation parfaite de l'énergie de l'eau; la valeur de h correspond alors à la

hauteur de chute utile. De plus, pour que l'utilisation de l'énergie de l'eau soit parfaite, il faut que la vitesse de l'eau w_0 dans le canal d'amenée soit faible, et soit égale à la vitesse de l'eau dans le canal de fuite. En admettant que la pression atmosphérique conserve la même valeur p_0 aux niveaux de l'eau dans le canal d'amenée et dans le canal de fuite, nous pouvons décomposer l'équation (8) en deux autres :

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_0^2 - w_1^2}{2g} + \frac{p_0 - p_1}{\gamma} + \zeta_1 &= 0 \\ \frac{w_2^2 - w_0^2}{2g} + \frac{p_2 - p_0}{\gamma} + h - \zeta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

La première de ces équations se rapporte au trajet de l'eau jusqu'à son entrée dans la roue, c'est-à-dire sur la hauteur verticale ζ_1 , le plan horizontal pris pour origine étant, comme l'indique la figure 2, le niveau de l'eau dans le canal d'amenée. La deuxième équation s'applique au passage de l'eau dans le tuyau d'aspiration.

Remarquons que les valeurs de w_1 et de w_2 seront, dans tous les cas, supérieures à la valeur w_0 de la vitesse de l'eau

FIG. 2.

le, sans qu'il y ait à tenir compte des valeurs absolues de ces hauteurs. Nous en déduisons que la position de la roue mobile entre le niveau supérieur et le niveau inférieur de l'eau est sans influence sur l'utilisation de l'énergie.

Supposons maintenant que l'écoulement de l'eau dans toute la turbine, et dans la roue mobile elle-même, soit permanent. Les valeurs des accélérations données par les relations (3) peuvent s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw_\zeta}{dt} &= \frac{\partial w_\zeta}{\partial t} + w_\zeta \frac{\partial w_\zeta}{\partial \zeta} + w_r \frac{\partial w_\zeta}{\partial r} + \frac{w_u}{r} \frac{\partial w_\zeta}{\partial \varphi} \\ \frac{dw_r}{dt} &= \frac{\partial w_r}{\partial t} + w_\zeta \frac{\partial w_r}{\partial \zeta} + w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_u}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} \\ \frac{d(w_u r)}{dt} &= \frac{\partial (w_u r)}{\partial t} + w_\zeta \frac{\partial (w_u r)}{\partial \zeta} + w_r \frac{\partial (w_u r)}{\partial r} + \frac{w_u}{r} \frac{\partial (w_u r)}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

et nous aurons, dans l'hypothèse que nous venons d'admettre :

$$\frac{\partial w_\zeta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w_r}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial (w_u r)}{\partial t} = r \frac{\partial w_u}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

De plus, comme nous avons supposé que le nombre des aubes est infiniment grand, il faut admettre que, en tous les points d'un parallèle de notre système, les particules liquides se trouvent dans le même état, et ont la même vitesse; nous aurons donc les relations :

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial w_\zeta}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial (w_u r)}{\partial \varphi} = r \frac{\partial w_u}{\partial \varphi} = 0, \quad (11)$$

et les équations (9) prennent la forme simplifiée suivante :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw_\zeta}{dt} &= w_\zeta \frac{\partial w_\zeta}{\partial \zeta} + w_r \frac{\partial w_\zeta}{\partial r} \\ \frac{dw_r}{dt} &= w_\zeta \frac{\partial w_r}{\partial \zeta} + w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} \\ \frac{d(w_u r)}{dt} &= w_\zeta \frac{\partial (w_u r)}{\partial \zeta} + w_r \frac{\partial (w_u r)}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

En tenant compte des relations (11), l'équation de continuité se simplifie aussi, et devient :

$$\frac{\partial (w_\zeta r)}{\partial \zeta} + \frac{\partial (w_r r)}{\partial r} = 0. \quad (2a)$$

Nous en déduisons les relations suivantes, en désignant par ψ une fonction arbitraire de ζ et de r :

$$w_\zeta r = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad w_r r = - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}. \quad (12)$$

Ces relations peuvent encore s'écrire, en tenant compte des équations (4) :

$$r \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad - r \frac{dr}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}.$$

En multipliant les deux termes de chacune de ces relations respectivement par dr et $d\zeta$, et en les additionnant, nous obtiendrons finalement la relation :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} d\zeta = 0. \quad (13)$$

La fonction ψ , que nous désignerons dans la suite sous le nom de fonction d'écoulement, égale à un certain paramètre, représente, lorsqu'on fait varier ce paramètre, les méridiennes d'un faisceau de filets liquides disposés, d'après les conditions même du problème, symétriquement par rapport à l'axe de rotation, comme l'indique la figure 3.

FIG. 3.

Chacune des surfaces de révolution correspondant à une de ces méridiennes peut être envisagée comme délimitant l'écoulement, et, par conséquent, être remplacée par une paroi solide, sans amener aucune perturbation dans cet écoulement. En conséquence, dans un corps creux de révolution, comme la roue d'une turbine, il faut que les méridiennes correspondent à un seul et même faisceau de filets liquides. En d'autres termes, ces méridiennes doivent être représentées par la même équation, dans laquelle le paramètre seul varie. Nous obtiendrons la signification de ces paramètres en déterminant le débit qui s'écoule dans l'unité de temps par une section perpendiculaire à l'axe de rotation dans la figure 3. Ce débit a pour valeur :

$$Q = 2\pi \int_0^r w_\zeta r dr,$$

soit, en remontant aux relations (12), et en remarquant que, dans l'intégration, la valeur de χ reste constante :

$$Q = 2\pi\gamma \int_0^r \frac{\partial \psi}{\partial r} dr = 2\pi\gamma\psi. \quad (14)$$

On voit donc que le paramètre de la section méridienne d'un couple de lignes d'écoulement est proportionnel au débit qui s'écoule à l'intérieur du corps de révolution engendré par les lignes d'écoulement. Il est bon de remarquer que la fonction ψ , qui détermine la forme des lignes d'écoulement et, par conséquent, celle des parois qui limitent toute la veine liquide (c'est-à-dire, en coupes méridiennes, la forme des parois du tuyau d'amenée à la roue, du profil de la roue et du tuyau d'aspiration) peut être choisie arbitrairement, pourvu que les vitesses w_τ et w_r soient reliées entre elles par les relations (12). La vitesse w_u n'entre pas dans ces relations; elle peut donc être considérée, de même que ψ , comme une fonction arbitraire de χ et de r . Dans ces conditions, les dérivées partielles de $(w_u r)$ contenues dans la troisième des équations (9a) sont connues. En tenant compte des relations (11), nous pouvons écrire la troisième des équations (3) sous la forme :

$$q_u r = w_\tau \frac{\partial (w_u r)}{\partial \chi} + w_r \frac{\partial (w_u r)}{\partial r}. \quad (15)$$

En multipliant les deux termes de cette relation membre à membre par ceux de la relation (1), nous obtenons la valeur du moment de rotation exercé sur l'aubage par l'élément liquide :

$$d\mathcal{M} = q_u r dm = \frac{\gamma}{g} \left[w_\tau r \frac{\partial (w_u r)}{\partial \chi} + w_r r \frac{\partial (w_u r)}{\partial r} \right] dr d\chi d\varphi.$$

Nous pouvons intégrer cette expression pour la circonférence d'un parallèle, où toutes les molécules ont le même mouvement. Le moment de rotation de la turbine a donc pour valeur :

$$\mathcal{M} = 2\pi \frac{\gamma}{g} \int \int \left[w_\tau r \frac{\partial (w_u r)}{\partial \chi} + w_r r \frac{\partial (w_u r)}{\partial r} \right] dr d\chi \quad (16)$$

Dans cette expression, l'intégration doit s'étendre à tout le volume annulaire occupé par l'eau dans la roue, dans les limites déterminées par la fonction d'écoulement. L'ancienne équation des moments d'Euler ne s'applique qu'au filet liquide moyen. Il est d'ailleurs très facile de déduire la formule d'Euler de la troisième équation (3) : en effet, nous avons, d'après les relations (11) : $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$; en outre, remarquons que si l'on appelle Q le débit qui passe par unité de temps dans toute la roue, on a :

$$g \frac{dm}{dt} = Q. \quad (17)$$

En multipliant par dm les deux membres de la troisième équation (3), nous avons :

$$\mathcal{M} = \int q_u r dm = \frac{dm}{dt} \int d(w_u r),$$

ou :

$$\mathcal{M} = \frac{Q}{g} (w_{u2} r_2 - w_{u1} r_1). \quad (16a)$$

Dans cette équation, les indices 1 se rapportent comme plus haut à l'entrée de l'eau dans la roue, les indices 2 à la sortie. Le fait que les rayons r_2 et r_1 sont variables, d'une façon générale, montre déjà que l'équation (16a) n'est qu'une formule approchée. L'équation des moments d'Euler à une seule dimension sera donc d'autant plus exacte que l'ouverture de la roue, suivant le rayon, sera plus étroite par rapport à ce rayon. Il est à remarquer que, précisément dans les turbines modernes, cette condition est loin d'être remplie, et que notre nouvelle équation (16) n'est pas soumise à ces mêmes restrictions. Il faut néanmoins tenir compte que cette équation (16) elle-même n'est qu'une formule approchée, car nous avons supposé des aubes en nombre infiniment grand; il ne nous paraît pas possible, à l'heure actuelle, de faire intervenir dans les formules les variations de la pression et de la vitesse entre deux aubes consécutives, ni l'épaisseur même de ces aubes. Il faut donc nous contenter provisoirement de formules à deux dimensions pour étudier la théorie des turbines, en attendant qu'on puisse, dans l'avenir, arriver à des formules à trois dimensions.

Le moment de rotation $\mathcal{M}$ de la turbine, sa vitesse angulaire ω , et le travail utile T par unité de temps sont liés par la relation simple :

$$T = \mathcal{M}\omega = \int q_u r \omega dm. \quad (18)$$

Cette relation nous donne la valeur de ω , si nous négligeons les pertes.

D'autre part, nous avons trouvé comme expression du travail de l'unité de poids la relation (7), soit comme valeur du travail élémentaire :

$$dT = g \frac{dm}{dt} dh = \left(q_\tau \frac{d\chi}{dt} + q_r \frac{dr}{dt} + q_u r \frac{d\varphi}{dt} \right) dm, \quad (19)$$

$d\chi dr$ et $r d\varphi$ désignant les projections d'un élément de la trajectoire absolue d'une particule liquide. Substituons à cette trajectoire absolue la trajectoire relative; celle-ci, dans l'hypothèse d'un nombre infiniment grand d'aubes, se confond avec l'aube elle-même; les éléments $d\chi$ et dr ne varient pas, seul l'angle de rotation absolue φ est remplacé par l'angle de rotation relative χ suivant la formule :

$$d\varphi = d\chi + \omega dt. \quad (20)$$

Cette relation, substituée dans l'équation (19) donne :

$$dT = (q_\tau d\chi + q_r dr + q_u r d\chi) \frac{dm}{dt} + q_u r \omega dm \quad (19a).$$

Mais, d'après l'équation (18), nous avons :

$$dT = q_u r \omega dm,$$

et l'équation (19a) s'écrit finalement :

$$q_\tau d\chi + q_r dr + q_u r d\chi = 0. \quad (19b)$$

Cette relation montre que l'accélération retardatrice q , représentant la réaction des aubes que nous avons introduite au début de cette théorie, et dont les composantes sont q_r , q_τ et q_u , est normale à la trajectoire relative des particules liquides. Comme deux filets liquides voisins, coulant près

d'une aube, ne peuvent pas exercer l'un sur l'autre d'accélération retardatrice dans les conditions où nous nous sommes placés, nous voyons que la résultante des accélérations retardatrices est dirigée normalement à la surface de l'aube; nous aurions d'ailleurs pu établir cette proposition dès le début de cette étude.

Les courbes qui délimitent la roue de la turbine sont déterminées par le choix de la fonction d'écoulement ψ ; mais, alors, le choix de la composante tangentielle w_u est soumis à certaines restrictions. Si, en effet, dans l'équation (16), nous remplaçons les produits $w_\tau r$ et $w_r r$ par leurs valeurs tirées des relations (12), nous obtenons :

$$\mathcal{M} = 2\pi \frac{\gamma}{g} \int \int \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial (w_u r)}{\partial \tau} - \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \frac{\partial (w_u r)}{\partial r} \right] dr d\tau \quad (16b)$$

Si nous posons : $w_u r = f(\psi)$,
nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (w_u r)}{\partial \tau} &= f'(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial (w_u r)}{\partial r} &= f'(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{aligned}$$

Le terme entre parenthèse sous le signe d'intégration s'annule donc, et, par suite, il en est de même du moment $\mathcal{M}$.

En conséquence, le produit $w_u r$, c'est-à-dire, le moment de la quantité de mouvement de l'unité de masse du fluide, ne peut pas être une fonction de la fonction d'écoulement ψ , et, en particulier, il ne peut pas être constant, car, alors, la turbine ne développerait aucun travail. Cette conclusion est déduite uniquement du fait que $w_u r = f(\psi)$ reste constant pour chaque particule liquide qui parcourt la ligne d'écoulement ψ , et, en conséquence, n'intervient pas dans la valeur du moment.

Après cette discussion de l'équation des moments, reprenons les deux premières équations (3); intégrons-les après en avoir multiplié les deux membres par l'élément de masse dm dont la valeur est donnée par la relation (1). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int q_\tau dm &= \int \int \int \frac{\partial p}{\partial \tau} d\tau \cdot r dr d\varphi + \int \left(\frac{dw_\tau}{dt} - g \right) dm \\ \int q_r dm &= \int \int \int \frac{\partial p}{\partial r} dr \cdot r d\tau d\varphi + \int \left(\frac{dw_r}{dt} - \frac{w_u^2}{r} \right) dm \end{aligned} \quad (3')$$

Dans ces relations, l'intégration doit s'étendre à tout le volume qu'occupe l'eau dans la roue mobile, et c'est pour cette raison qu'un triple signe d'intégration figure au premier terme du second membre. Posons :

$$G = g \int dm,$$

G désignant le poids de toute l'eau qui se trouve dans la roue. Désignons par Δp_r et Δp_τ les différences respectives de pression entre les points A et B, intersections des profils limitant la roue et d'une parallèle à l'axe, et entre les points B et C, intersections des mêmes profils et d'une normale à l'axe (fig. 4).

Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta p_r &= \int \frac{\partial p}{\partial r} d\tau, \\ \Delta p_\tau &= \int \frac{\partial p}{\partial r} dr. \end{aligned}$$

Enfin, désignons par P_τ et P_r les composantes (évaluées négativement) de la pression totale de l'eau suivant une parallèle et une normale à l'axe :

$$P_\tau = \int q_\tau dm, \quad P_r = \int q_r dm.$$

En remontant aux deux premières équations (3), transformées en (3'), et en intégrant ces deux dernières équations par rapport à φ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} P_\tau &= 2\pi \int \Delta p_r \cdot r dr + \int \left(\frac{dw_\tau}{dt} dm - G \right) \\ P_r &= 2\pi \int \Delta p_\tau \cdot r d\tau + \int \left(\frac{dw_r}{dt} - \frac{w_u^2}{r} \right) dm \end{aligned} \quad (3a)$$

Dans ces relations, les premiers termes des seconds membres désignent la pression hydraulique totale en projection horizontale et en projection cylindrique. L'intégration elle-même est possible si l'on connaît les composantes des vitesses en chaque point, et si l'on déduit de l'équation de l'énergie les valeurs des pressions, et par conséquent, des différences Δp_τ et Δp_r .

Ce calcul n'a d'importance qu'au point de vue de la solidité de la roue; nous ne le ferons donc pas dans cette étude, d'autant plus qu'il faut faire intervenir, en outre, les masses et, par conséquent, les poids de chacun des organes de la turbine.

D'après les considérations précédentes, nous voyons que l'étude systématique de l'écoulement de l'eau dans une turbine, ou dans une pompe centrifuge (les mêmes équations sont applicables dans les deux cas), se déduit de celle de la fonction d'écoulement ψ .

Il sera donc bon de choisir cette fonction ψ de façon qu'elle puisse convenir à un très grand nombre des cas qui peuvent se présenter en pratique; elle doit, en particulier, pouvoir s'appliquer aux turbines axiales, aussi bien qu'aux turbines centrifuges et aux turbines centripètes (Francis). Dans les turbines radiales, des deux composantes w_τ et w_r , la première varie peu; tandis que la seconde subit de fortes variations avec le rayon r ; dans les turbines parallèles, la seconde varie peu, et la première subit de fortes variations avec la hauteur de chute τ . Pour satisfaire à ces conditions, nous pourrions admettre que la composante w_r dépend uniquement de r ; et la fonction ψ sera une fonction linéaire de τ , puisque, des relations (12), nous déduisons la relation :

$$\frac{d\psi}{d\tau} = -w_r r = f(r). \quad (12a)$$

Pour plus de simplicité, prenons pour ψ une fonction à un seul terme, et supposons un rapport de proportionnalité entre w_r et r ; en désignant par A une constante, nous déduirons de la relation (12a) la forme de la fonction ψ :

$$\psi = A r^2 \tau, \quad (21)$$

et, par conséquent :

$$\left. \begin{aligned} w_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = -Ar \\ w_\zeta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 2A\zeta \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

La figure 5 représente l'allure de la veine d'écoulement correspondante dans le plan méridien. Dans le plan hori-

FIG. 5.

zontal passant par l'origine O, la valeur de la composante w_ζ est nulle, de sorte que ce plan horizontal peut être placé à volonté, soit au niveau du canal de fuite, soit dans le voisinage immédiat du bas ou du haut de la couronne de la roue. Le sens de l'écoulement sera alors indiqué par le signe de la constante A. L'allure de la veine

d'écoulement donnée par la relation (21) est identique à celle qu'a indiquée Prasil pour le tuyau d'aspiration. Ce n'est certainement pas là la seule allure que puisse prendre la veine d'écoulement;

on pourrait, par exemple, la opposer limitée par deux plans horizontaux, comme l'indique la figure 6

FIG. 6.

Nous nous contenterons de la relation trouvée plus haut, qui est simple, et s'applique à un très grand nombre de cas, et nous allons en poursuivre l'étude avec plus de détails.

E. KREITMANN,

Ingénieur des Arts et Manufactures.

G. ROUTIN,

Ancien élève de l'Ecole Polytechnique.

(A suivre).

LE MOIS HYDRO-ÉLECTRIQUE

ACADÉMIE DES SCIENCES

Auto-Excitation d'un alternateur triphasé au moyen de soupapes électrolytiques. — Note de M. C. LIMB, séance du 18 mai.

Un alternateur triphasé, de faible puissance, 10 kilovoltampères, sous 110-120 volts, à 50 périodes, a été utilisé pour ces expériences. Une batterie de soupapes électriques, à clapet d'aluminium, était montée sur les trois bornes du courant triphasé. Le circuit inducteur de l'alternateur pouvait être animé, par le jeu d'un commutateur bipolaire à deux directions, soit par une distribution à courant continu sous 220 volts, soit par le côté *courant redressé* de la batterie de six soupapes. Dans le circuit inducteur était intercalé le rhéostat de champ ou rhéostat d'excitation.

L'alternateur étant mis en vitesse, si le commutateur était monté sur les soupapes, l'excitation de l'alternateur ne se produisait pas spontanément; mais il suffisait d'exciter d'abord, un peu fortement, par le courant continu, et d'inverser brusquement le commutateur, pour voir le voltage induit, après une chute instantanée presque à

zéro, remonter rapidement jusqu'à plus de 120 volts, suivant la position du rhéostat. Ce phénomène se produisait à l'allure d'une dynamo-shunt, à courant continu, dont on ferme le circuit d'excitation.

A ce moment, l'alternateur triphasé fonctionnait en auto-excitation, par l'intermédiaire des soupapes électrolytiques. On pouvait faire varier le voltage commodément, et dans de grandes proportions, jusqu'à 200 volts environ, par le simple jeu du rhéostat d'excitation, absolument comme dans le cas d'une dynamo-shunt à courant continu. L'alternateur a pu être mis en pleine charge, partie sur des résistances non inductives, partie sur une série de moteurs triphasés asynchrones. Le débit faisait naturellement baisser le voltage, mais il était aisé de le remonter par le jeu du rhéostat. Bien entendu, la variation du voltage, due à une variation de débit, était plus grande que dans le cas ordinaire de l'excitation indépendante; mais c'est également ce qui se produit avec les dynamos à courant continu; le fait est bien connu, et d'ailleurs bien évident.

Il existe cependant une différence avec les machines à courant continu : c'est qu'il est nécessaire que le magnétisme rémanent de l'inducteur ait une valeur suffisante pour que l'alternateur s'amorce spontanément, sans avoir recours à l'artifice employé : excitation préalable sur courant continu et inversion brusque du commutateur.

Cela s'explique aisément. Dans les génératrices à courant continu, surtout les machines de construction moderne à faible entrefer, le moindre flux magnétique rémanent suffit à déterminer un courant dans le circuit inducteur, courant surexcitant les pôles et déterminant ainsi l'auto-excitation; mais avec les alternateurs, il faut que ce flux rémanent engendre une tension supérieure à la force électromotrice de polarisation des deux soupapes qui se trouvent toujours montées en série et donne ainsi un courant redressé, capable de surexciter les pôles. Or, par le seul magnétisme rémanent de son inducteur, l'alternateur employé ne produisait guère plus de 1 volt à sa vitesse normale de 1 500 tours.

J'ai voulu faire une détermination du magnétisme nécessaire pour cette machine. J'ai utilisé, dans ce but, quelques spires inductrices indépendantes, animées par un courant auxiliaire pris par une source continue; l'enroulement inducteur principal était branché sur le côté *courant redressé* des soupapes. J'ai ainsi observé qu'il fallait faire croître le courant continu auxiliaire jusqu'à l'obtention de 10 volts alternatifs environ (tension composée). A ce moment, spontanément, le voltage s'élevait avec une rapidité croissante, jusqu'à 200 volts environ, si le circuit inducteur se trouvait dépourvu de rhéostat. On pouvait, dès que l'auto-excitation se produisait nettement, supprimer le courant continu auxiliaire : le voltage continuait à s'élever jusqu'à sa valeur limite.

Rien ne serait donc plus facile que d'obtenir ce résultat en constituant les noyaux inducteurs d'un alternateur avec de l'acier à aimant trempé ou comprimé, ou même de la fonte ayant une force coercitive suffisante. J'ai vu fréquemment des dynamos à courant continu, à circuit magnétique en fonte, donner, à vide, par leur seul magnétisme rémanent, 25 à 30 % du voltage normal : c'est bien plus qu'il n'en faudrait. Il suffirait que le constructeur excitât une première fois l'inducteur par du courant continu.

Le courant redressé, obtenu par six soupapes électrolytiques, est assez peu ondulé, étant donnée surtout l'inductance propre au circuit inducteur; mais il serait aisé de le rendre encore plus continu, si on le reconnaissait nécessaire, en introduisant spécialement en circuit une bobine de réaction (self-inductance) aussi dénuée que possible de résistance ohmique.

Le rendement des soupapes électrolytiques étant de l'ordre de 75 %, en puissance, on voit que ce procédé d'auto-excitation est, à ce point de vue, au moins équivalent au procédé habituel d'excitation par une excitatrice ou une source séparée.

J'ai fait quelques expériences en vue d'obtenir l'auto-excitation de l'alternateur, monté en alternatif simple, ou monophasé; je n'ai pu y réussir. Il fallait, pour obtenir à vide 115-120 volts, que le courant continu auxiliaire donnât à lui seul un flux magnétique engendrant 30 à 35 volts; la fermeture du circuit des soupapes (batterie de quatre seulement, dans le cas de l'alternatif simple) augmentait alors le flux jusqu'à l'obtention des 115-120 volts; mais il n'y avait pas auto-excitation, au sens ordinaire du mot, c'est-à-dire élévation spontanée de la force électromotrice sans rien toucher au circuit inducteur. Il est vrai que, dans le cas du monophasé, avec batterie de quatre soupapes, le courant redressé passe par zéro (et même en dessous par suite des fuites des soupapes), ce qui n'a pas lieu avec six soupapes montées sur le triphasé. En ne redressant le courant alternatif qu'avec une seule soupape, j'ai observé que la surexcitation due au courant redressé n'augmentait que de 2 à 3 % le voltage alternatif obtenu par le courant continu auxiliaire.

Il serait peut-être téméraire de conclure, de cette seule expérience, que l'auto-excitation d'un alternateur monophasé, au moyen de soupapes, fût impossible; mais il serait sans doute nécessaire d'user d'un artifice spécial pour rendre le courant redressé plus continu; self-inductance, ou condensateur électrolytique de grande capacité électrostatique, formé par une soupape à deux clapets d'aluminium (anode et cathode), ou même une batterie d'accumulateurs, qui pourrait être de très faible capacité, c'est-à-dire sans formation notable. Ces procédés de régularisation du courant redressé des soupapes électrolytiques ont été déjà indiqués par divers experimen-