nier ont obtenu la collaboration, complète les mailles du réseau général de nivellement. Des repères d'altitude sont scellés sur les bords immédiats des rives, soit dans le rocher, soit dans les constructions existantes à tous les confluent, prises d'eau, ouvrages d'art, ainsi qu'à tous les points intéressants accessibles, tels que chutes naturelles, changements brusques de pente, etc. Fin 1905, la longueur totale de cours d'eau ainsi nivelés dans les Alpes était de 1 329 kilomètres.

Pendant cette même année, les études glacières, commencées en 1903 et 1904 par les glaciers de Valgaudemar et de Vallouise ont été poursuivies activement sur le massif des Grandes-Rousses suivant un programme combiné avec la Société de Géographie et l'Université de Grenoble. La campagne topographique qui a duré quinze jours a fourni les bases d'une étude complète des glaciers de ce massif. Depuis 1906, le Comité d'études scientifiques créé à la Direction de l'Hy-

FIG. 4. — Moulinet électrique Ott à tige ovalisée, avec son support, la pile de sonnerie et ses hélices de recharge.

draulique agricole, a imprimé à ces études glaciaires, une très efficace impulsion dont les résultats ne tarderont pas à être hautement appréciés.

Le nombre des postes pluviométriques a été sensiblement augmenté, dans l'Isère, il a passé de 24 en 1902, à 46 en 1905, il est de 40 en Savoie, y compris treize postes militaires des régions élevées, de 26 en Haute-Savoie, de 6 dans les Hautes-Alpes et de 14 dans la Drôme. Le territoire sur lequel portent les études du Service était pourvu en 1905 de 162 postes pluviométriques. Ce nombre sera encore accru car il reste assez inférieur à celui qu'on relève en Suisse par exemple, pour des surfaces équivalentes.

La planimétrie des bassins est faite au moyen de tirages à part sur papier fort indéformable des cartes d'Etat-Major au 1/50 000^e. On y rapporte d'abord les courbes d'altitude de

500 en 500 mètres, puis les limites de chaque bassin avec les divisions intéressant les affluents, les stations de jaugeage et les grandes prises d'eau. Chaque élément de surface ainsi constitué est mesuré au planimètre, plusieurs fois, par des opérateurs différents, de manière à écarter les erreurs, puis décomposé en zones d'altitude suivant les courbes de niveau tracées au préalable, les totaux sont ensuite préparés par groupes, puis par bassin et le tout transformé en tableaux qui font ressortir la composition détaillée de chacun d'eux et de ses divers éléments. Le Service d'Etudes a fourni, en 1905, aux Ministères intéressés, les cartes au 1/50 000^e des bassins de l'Isère, de l'Arve, de la Durance et du Var qui représentent, au total, 31.048 kilomètres carrés de bassins planimétrés par zone d'altitude. Ce travail est définitif et ne subira que les corrections corrélatives à la réfection des cartes d'Etat-Major. Sur les cartes ainsi préparées, les stations de jaugeage et les postes pluviométriques sont indiqués par des signes conventionnels, les grandes usines hydrauliques y sont représentées par des cercles rouges dont le centre est à l'emplacement même de l'usine et dont la surface est proportionnelle à la puissance hydraulique de l'établissement. A côté de chaque cercle, on trouve l'indication de la puissance accompagnée de signes conventionnels renseignant sur les emplois de cette puissance.

Depuis 1906, toutes les opérations du Service se poursuivent régulièrement de manière que l'on pourra bientôt, par de nouvelles publications, connaître tous les éléments relatifs à l'évaluation de nos forces hydrauliques.

Comme on peut s'en convaincre par cette courte analyse des rapports de MM. de la Brosse et Tavernier, leur principale préoccupation a été d'imprimer à leurs recherches un caractère pratique permettant d'utiliser de suite les résultats sous les réserves, bien entendu, que comportent le caractère approximatif et le nombre encore restreint des opérations effectuées. Ces études sont laborieuses, elles entraînent des déplacements incessants, une correspondance considérable et comportent des détails multiples. On ne saurait donc trop louer les chefs de ce Service d'Etudes de l'admirable organisation qu'ils ont su lui donner et qui nous vaut déjà de si précieux résultats, louange d'autant plus méritée que l'on peut être sûr qu'ils disposent de crédits très parcimonieusement comptés. Il est donc fort désirable, dans l'intérêt de la précision de ces études comme dans celui de leur prompt achèvement, que l'Administration veuille bien leur fournir les ressources nécessaires pour les mener à bonne fin.

E.-F. CÔTE.

NOUVELLE THÉORIE DES TURBINES

Par le Professeur Dr H. LORENZ, de Danzig

(Suite et fin)

IV. — Les turbines Francis.

L'étude des turbines mixtes, ou turbines hélico-centrifuges, imaginées par l'américain Francis, et qui ont reçu tant d'applications dans ces dernières années, peut aussi se faire avec notre schéma d'écoulement :

$$\psi = Ar^2\gamma \quad m_r = -Ar \quad m_\gamma = 2A\gamma;$$

il suffit de retourner la figure suivant la figure 13, et de choisir la fonction m_u de façon à tenir compte des variations correspondantes de la composante tangentielle m_u avec les distances r à l'axe, et les hauteurs γ . Pour réaliser la condition déjà admise pour les turbines parallèles que tous les éléments des aubes doivent exercer sur l'eau la même

accélération de réaction dans le sens de la rotation, de façon que le terme à intégrer dans l'équation du moment (24) se

FIG. 13

réduise à $rdr d\tau$, nous aurons une fonction de la forme :

$$m_u r = B L C \frac{r}{\tau}; \quad (37)$$

B et C désignent des constantes; τ entre en dénominateur du logarithme, de façon que le produit $m_u r$ diminue alors que τ augmente, et que, l'écoulement ayant lieu de l'extérieur vers l'intérieur, r diminue.

La composante tangentielle m_u s'annule, d'après la relation (37), pour la valeur :

$$\tau = Cr \quad (38)$$

En d'autres termes, elle s'annule pour les points d'une droite passant par l'origine sur la coupe méridienne; nous serons donc tout naturellement amenés à prendre cette droite comme limite intérieure de la couronne de la roue en coupe méridienne, comme l'indique la fig. 13; à l'extérieure, cette couronne pourra être limitée verticalement.

Ces deux conclusions correspondent, d'ailleurs, aux modes de construction adoptés en pratique; mais, par contre, on ne s'est pas encore rendu compte qu'il conviendrait aussi, dans la construction des turbines, d'arrondir les surfaces latérales des couronnes des roues mobiles.

En tenant compte des relations :

$$\frac{\partial (m_u r)}{\partial r} = \frac{B}{r} \quad \frac{\partial (m_u r)}{\partial \tau} = -\frac{B}{\tau} \quad (37a)$$

déduites de la relation (37), l'équation des moments (24) devient :

$$\mathcal{M} = -6\pi \frac{\gamma}{g} AB \int \int r dr d\tau. \quad (38)$$

L'intégrale s'étend à la surface B'C'FB'' indiquée par de simples hachures dans la figure 14. Mais, nous pouvons écrire pour cette surface :

$$B'C'FB'' = AB'C'D - AB''C''D + DC'O - EFO - DC''FE$$

En posant :

$$\psi' = Ar^2 \tau' \text{ et } \psi'' = Ar^2 \tau'',$$

Pour la surface :

$$AB'C'D - AB''C''D :$$

nous aurons :

$$\begin{aligned} \int \int r dr d\tau &= \int (\tau' - \tau'') r dr \\ &= \frac{\psi' - \psi''}{A} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\psi' - \psi''}{A} L \frac{r_1}{r_2}. \end{aligned} \quad (38a)$$

De même, avec $\tau = Cr$, nous aurons, pour DC'O — EFO :

FIG. 14

$$\int \int r dr d\tau = C \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr = C \frac{r_2^3 - r_1^3}{3},$$

soit, puisque nous avons :

$$C = \frac{\tau_2'}{r_2'} = \frac{\tau_2''}{r_2''} = \frac{\tau_2}{r_2}, \quad (39)$$

r_2 et τ_2 désignant les coordonnées d'un point quelconque de l'arête de sortie,

$$\int \int r dr d\tau = \frac{1}{3} (r_2'^3 - r_2''^3) = \frac{\psi' - \psi''}{3A} \quad (38b)$$

Enfin, nous avons pour DC''FE :

$$\int \int r dr d\tau = \int \tau'' r dr = \frac{\psi''}{A} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\psi''}{A} L \frac{r_1}{r_2} \quad (38c)$$

En faisant la somme algébrique de ces trois quantités, nous aurons finalement :

$$\mathcal{M} = -6\pi \frac{\gamma}{g} B \left[(\psi' - \psi'') \left(L \frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{3} \right) - \psi'' L \frac{r_1}{r_2} \right] \quad (40)$$

Cette formule est notablement plus compliquée que la formule correspondante pour les turbines parallèles et les turbines radiales, le profil de l'aube étant lui-même plus compliqué. Il paraît donc utile de simplifier cette formule en tenant compte de quelques hypothèses qui, nous avons bien soin de le faire remarquer encore en cette place, ne sont nullement indispensables pour notre théorie.

Une de nos hypothèses sera exprimée par la relation :

$$\frac{\psi' - \psi''}{3} = \psi'' L \frac{r_2'}{r_2''}, \quad (41)$$

qui s'écrit encore :

$$\psi' = 3\psi'' L \left(1,39 \frac{r_2'}{r_2''} \right),$$

puisque : $\frac{1}{3} = L 1,39$.

Comme seconde hypothèse, nous choisirons la valeur du rapport $\frac{r_2'}{r_2''}$ de façon à satisfaire à la relation :

$$1,39 \frac{r_2'}{r_2''} = e = 2,7183,$$

ou : $\frac{r_2'}{r_2''} = 1,96$, soit environ 2 (41a)

En tenant compte que $Le = 1$, l'équation (41) se réduit à :

$$\psi' = 3\psi''. \quad (41b)$$

Les valeurs de ψ' et de ψ'' sont encore déterminées par la formule de définition de la fonction d'écoulement :

$$Q = 2\pi\gamma (\psi' - \psi''). \quad (42)$$

Ces deux relations donnent :

$$\psi' = \frac{3}{4} \frac{Q}{\pi\gamma} \quad \psi'' = \frac{1}{4} \frac{Q}{\pi\gamma}. \quad (43)$$

Les paramètres de la fonction d'écoulement sont donc déterminés pour les lignes limitant le profil de la roue; et nous avons de plus $r_2' = 2r_2''$ très sensiblement. En tenant compte des relations (41) et (42), l'équation des moments (40) se simplifie, et devient :

$$\mathcal{M} = -6\pi \frac{\gamma}{g} B (\psi' - \psi'') L \frac{r_1}{r_2} = -3 \frac{Q}{g} BL \frac{r_1}{r_2} \quad (40a)$$

Substituons maintenant dans la relation (37) la valeur de la constante C tirée des relations (39); nous aurons :

$$w_{u1}r = BL \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^3,$$

soit, puisque : $\psi = Ar^2\tau = Ar_2^2\tau_2$,

$$w_{u1}r = BL \left(\frac{r}{r_2} \right)^3 = 3BL \frac{r}{r_2}. \quad (37b)$$

L'équation (40a) devient alors finalement :

$$\mathcal{M} = -\frac{Q}{g} w_{u1}' r_1. \quad (40b)$$

Cette équation est identique à l'équation des moments de la turbine parallèle, sauf que la composante tangentielle à la sortie w_{u2} n'y entre plus. Cette équation est d'une très grande simplicité, et il y a lieu de remarquer qu'elle a été obtenue sans négliger aucun terme.

Les équations des trajectoires absolue et relative se déduisent très simplement de la relation (37b).

Pour la trajectoire absolue nous aurons :

$$w_{u1}r = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = 3BL \frac{r}{r_2},$$

$$w_r = \frac{dr}{dt} = -Ar;$$

d'où :

$$d\varphi = -3 \frac{B}{A} \left(\frac{Lr}{r^3} - \frac{Lr_2}{r_2^3} \right) dr,$$

soit, en intégrant de r_1 à r :

$$\varphi = \frac{3}{2} \frac{B}{A} \left(\frac{1}{r^2} L \frac{r}{r_2} - \frac{1}{r_1^2} L \frac{r_1}{r_2} \right) + \frac{4}{3} \frac{B}{A} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right). \quad (44)$$

La trajectoire relative se déduit de la relation :

$$d\chi = d\varphi - \omega dt = d\varphi + \frac{\omega}{A} \frac{dr}{r}.$$

Cette équation intégrée devient :

$$\chi = \frac{3}{2} \frac{B}{A} \left(\frac{1}{r^2} L \frac{r}{r_2} - \frac{1}{r_1^2} L \frac{r_1}{r_2} \right) + \frac{4}{3} \frac{B}{A} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + \frac{\omega}{A} L \frac{r}{r_1}. \quad (45)$$

Les angles φ et χ , de même que le produit $w_{u1}r$, d'après la relation (37b), ne semblent être fonctions que de la distance à l'axe r ; en réalité ils sont aussi fonctions de τ , le rayon vecteur r_2 à la sortie de la roue étant variable d'un filet liquide à l'autre. En conséquence, même dans le cas où l'arête d'entrée de l'aube est verticale, l'aube a une double courbure.

Pour permettre d'apprécier la valeur des formules précédentes, nous allons traiter un exemple numérique.

Soit à construire une turbine pour un débit $Q = 600$ litres à la seconde et une hauteur de chute $h = 5$ mètres, la vitesse de la turbine devant être $n = 200$ tours à la minute.

La vitesse angulaire de la turbine est :

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 20,9;$$

le moment de rotation, en supposant un rendement $\eta = 0,85$, a pour valeur :

$$\mathcal{M} = \eta \frac{Qh}{\omega} = -125 \text{ kilogrammètres.}$$

L'équation (40b) donne alors :

$$w_{u1}' r_1 = -\frac{\mathcal{M}g}{Q} = 2,044.$$

Des relations (43) nous déduisons les valeurs de ψ' et ψ'' :

$$\psi' = 0,143; \quad \psi'' = 0,048.$$

Supposons une vitesse à la sortie de 4 m. à la seconde : $w_{u2}' = 4$, pour le point le plus bas dont les coordonnées sont r_2', τ_2' .

De la relation : $w_{u2}' \pi r_2' \tau_2' = 2\pi \tau_2' \psi'$,

nous tirons : $r_2' = \frac{2\psi'}{w_{u2}'} = 0,0715$,

soit : $r_2' = 0,00267$;

et, d'après la relation (41a) :

$$r_2'' = \frac{r_2'}{1,96} = 0,00136.$$

Les relations (37b) et (41a) nous donnent :

$$w_{u1}' r_1 = 3BL \frac{r_1}{r_2'},$$

$$w_{u1}'' r_1 = 3BL \frac{r_1}{r_2''} = 3BL \left(1,96 \frac{r_1}{r_2'} \right),$$

et, d'après (40b) :

$$\frac{w_{u1}''}{w_{u1}'} - 1 = \frac{3BL \cdot 1,96}{w_{u1}' r_1} = -\frac{2BQ}{g\mathcal{M}} \quad (46)$$

Posons par exemple : $\frac{w_{u1}''}{w_{u1}'} = 2$;

nous aurons alors :

$$B = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}g}{Q} = 1,022,$$

et, en tenant compte de la relation (40b) :

$$3BL \frac{r_1}{r_2'} = -\frac{\mathcal{M}g}{Q} = 2B,$$

$$L \frac{r_1}{r_2'} = \frac{2}{3},$$

$$r_1 = 1,95 r_2' = 0,00523.$$

En nous donnant la valeur de la vitesse radiale à l'entrée : $w_{r1} = -2$ m. et, en tenant compte de la relation :

$$w_{r1} = -Ar_1,$$

nous aurons :

$$A = -\frac{w_{r1}}{r_1} = 3,73;$$

$$\tau_1' = \frac{\psi'}{Ar_1^2} = 0,00140;$$

$$\tau_1'' = \frac{\psi''}{Ar_1^2} = 0,00047.$$

$$\tau_2' = \frac{\psi'}{Ar_2'^2} = 0,00535;$$

$$\tau_2'' = \frac{\psi''}{Ar_2'^2} = 0,00268;$$

FIG. 15

Ces valeurs déterminent complètement le profil de la roue, et ce profil peut être

représenté graphiquement, à une échelle donnée, comme le montre la fig. 15.

On reconnaît immédiatement que la hauteur d'entrée est relativement faible, et les aubes ont, en conséquence, une très grande longueur; le frottement correspondant ne peut intervenir dans notre théorie que sous la forme de la valeur même du rendement. Il faut remarquer, en outre, la grandeur des variations de la composante tangentielle dans la section d'entrée; elle passe de la valeur: $m_{u1}' = 3m_0g8$ à la seconde à la valeur $m_{u1}'' = 7m_0g6$; si l'on tient compte de ce que $m_{r1} = -2$ m. à la seconde, on trouve que les angles α et α' que fait une directrice avec la tangente au parallèle en chacun des points considérés, sont donnés par:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{m_{r1}}{m_{u1}'} = 0,503; \quad \operatorname{tg} \alpha'' = \frac{m_{r1}}{m_{u1}''} = 0,252;$$

les angles correspondants sont:

$$\alpha' = 27^\circ \text{ environ}; \quad \alpha'' = 14^\circ \text{ environ}.$$

Ces variations sont trop fortes, et ne pourraient guère être réalisées en pratique. Aussi, nous nous abstenons de continuer l'étude de cet exemple numérique, et en particulier le calcul des trajectoires relative et absolue des filets liquides.

Nous pourrions essayer de réduire ces variations, en faisant, par exemple, d'autres hypothèses sur la valeur du rapport $\frac{m_{u1}''}{m_{u1}'}$.

Nous reconnaitrions que nous serions conduits à augmenter les valeurs de r_1 , et à diminuer la hauteur de la section d'entrée. Il nous faut donc chercher dans un autre ordre d'idées pour pouvoir trouver des résultats applicables en pratique.

La raison fondamentale de cette forme particulière de variations est la très grande dissemblance des ouvertures de la roue à l'entrée et à la sortie. Nous allons chercher à y remédier, sans changer le caractère même de la turbine hélico-centripète. Il nous suffira, à cet effet, de définir les deux ouvertures sur la coupe méridienne, d'après la relation donnant la valeur de la composante tangentielle m_u :

$$m_u r = f(r, \zeta) \quad (47)$$

par deux valeurs différentes de $m_u r$; il faut alors envisager ces valeurs comme des paramètres. Nous obtenons de la

sorte des lignes d'ouverture rationnelles, telles que les faisceaux de courbes indiquées sur la coupe méridienne, fig. 16; parmi celles-ci, les deux courbes $(m_u r)_1$ et $(m_u r)_2$ avec les lignes d'écoulement ψ' et ψ'' définissent le profil de la couronne de la roue.

En admettant cette hypothèse, nous aurons l'avantage d'avoir, pour les valeurs de $(m_u r)_1$ et de $(m_u r)_2$, des valeurs constantes sur toute la section d'entrée et de sortie;

en sorte que, dans l'équation des moments:

$$\mathcal{M} = \int q_u r \, dm = \int_{(m_u r)_1}^{(m_u r)_2} \frac{dm}{dt} d(m_u r),$$

les variations du moment de la quantité de mouvement sont les mêmes pour tous les filets liquides à leur passage dans la roue, et par conséquent tous les filets liquides contribuent dans la même proportion à fournir la valeur du moment de rotation. (*) En conséquence, nous pouvons considérer le débit par seconde:

$$Q = g \frac{dm}{dt}$$

comme une quantité constante, ainsi que nous l'avons fait pour les turbines radiales, et faire sortir cette quantité du signe d'intégration. Nous obtenons ainsi l'équation d'Euler pour la turbine Francis, le profil de la roue de cette turbine étant limité par un couple de lignes d'écoulement ψ' et ψ'' et un couple de courbes $(m_u r)_1$ et $(m_u r)_2$:

$$\mathcal{M} = \frac{Q}{g} [(m_u r)_2 - (m_u r)_1]; \quad (48)$$

et, dans cette expression, nous donnons aux produits respectivement constants $(m_u r)$ les indices correspondant aux variations de m_u et de r dans les sections d'ouverture.

Il est évident que, dans ce mode de construction de la roue mobile, la théorie et le calcul de la turbine Francis, malgré ses formes compliquées, sont tout aussi simples que la théorie et le calcul des turbines parallèles et des turbines radiales. Dans ces deux types de turbines, les sections d'ouverture de la roue en coupe méridienne sont des lignes pour lesquelles le produit $m_u r$ est constant, tant que le produit $m_u r$ est fonction soit de ζ seul, soit de r seul.

Le choix de la fonction (47) qui définit la valeur du produit $m_u r$ est, d'une façon générale, aussi arbitraire que celui de la fonction ψ ; nous serons guidés dans ce choix par la double considération d'avoir une valeur nulle pour le produit $m_u r$ dans la section de sortie de la roue, ou immédiatement après cette section, et de conserver la possibilité d'avoir, à l'entrée dans la roue, une section sensiblement cylindrique. Les courbes qui satisfont le plus simplement à ces conditions sont des couples d'hyperbole de la forme:

$$m_u r = Br^2 - C\zeta^2; \quad (49)$$

la fonction ψ reste, sans modification, celle adoptée plus haut:

$$\psi = Ar^2 \zeta \quad (50)$$

Cherchons à annuler la composante tangentielle m_u à la sortie; $r_1 \zeta_1$ et $r_2 \zeta_2$ étant respectivement les coordonnées d'un point de la section d'entrée et de la section de sortie dans la coupe méridienne, nous aurons, pour calculer les valeurs des constantes B et C , les relations suivantes, déduites de la relation (49)

(*) La même remarque s'applique pour le travail utile dont la valeur est donnée par la relation (18); ce dernier se répartit uniformément sur tous les éléments liquides traversant la roue dans l'unité de temps. C'est cette hypothèse qui donne la garantie de la meilleure utilisation de l'énergie, et permet d'expliquer la grande supériorité des turbines et des pompes construites d'après la théorie précédente sur toutes les autres machines du même genre.

Fig. 16

valeurs constantes sur toute la section d'entrée et de sortie;

$$\begin{aligned} Br_2^2 - C\bar{\gamma}_2^2 &= 0 \\ Br_1^2 - C\bar{\gamma}_1^2 &= (w_{ur})_1 \end{aligned} \quad (49a)$$

et l'équation des moments se réduit à :

$$\mathcal{M} = -\frac{Q}{g} (w_{ur})_2. \quad (48a)$$

La section de sortie est en coupe méridienne, d'après la première des équations (49a), une droite passant par l'origine : c'est l'une des asymptotes de l'hyperbole définie par l'équation (49) :

$$\frac{\bar{\gamma}}{r} = \pm \sqrt{\frac{B}{C}} \quad (49b)$$

Le calcul numérique d'une turbine se fait comme dans l'exemple précédent. Les données sont le débit Q , la hauteur de chute h et le rendement η ; si, en outre, nous nous fixons la valeur de la vitesse angulaire ω , nous aurons immédiatement la valeur du moment :

$$\mathcal{M} = \eta \frac{Qh}{\omega}. \quad (51)$$

Nous connaissons en outre les valeurs que nous nous donnerons pour la valeur maxima du rayon à l'entrée r_1' , la vitesse radiale w_{r1}' à l'entrée correspondant à la valeur de r_1' et la vitesse axiale de sortie w_{z2}' . Pour la trajectoire absolue de l'eau, nous aurons les relations :

$$w_{ur} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = Br^2 - C\bar{\gamma}^2;$$

$$w_r = \frac{dr}{dt} = -Ar;$$

soit :

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{B}{Ar} + \frac{C\bar{\gamma}^2}{Ar^3},$$

ou, en remplaçant $\bar{\gamma}$ par sa valeur tirée de la relation (50) :

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{B}{Ar} + \frac{C}{A^3} \frac{\psi^2}{r^7}.$$

Après intégration, cette relation devient :

$$\varphi = -\frac{B}{A} \ln \frac{r}{r_1} - \frac{C}{6A^3} \left(\frac{1}{r^6} - \frac{1}{r_1^6} \right). \quad (52)$$

La trajectoire relative est déterminée par la relation :

$$d\chi = d\varphi - dt = d\varphi + \frac{\omega}{A} \frac{dr}{r},$$

soit, après intégration :

$$\chi = \frac{\omega - B}{A} \ln \frac{r}{r_1} - \frac{C}{6A^3} \left(\frac{1}{r^6} - \frac{1}{r_1^6} \right). \quad (53)$$

La forme de l'aube est ainsi complètement déterminée si, d'autre part, nous nous donnons l'arête d'entrée.

Reprenons l'exemple numérique traité plus haut.

Soit à construire une turbine pour un débit $Q = 600$ litres à la seconde, et une hauteur de chute $h = 5$ mètres. Supposons, pour montrer combien la théorie développée plus haut s'applique facilement, une vitesse $n = 150$ tours à la minute seulement, soit $\omega = 15,7$.

En prenant comme valeur du rendement : $\eta = 0,85$, nous aurons, d'après la relation (51) :

$$-\mathcal{M} = \eta \frac{Qh}{\omega} = 162,4 \text{ kilogrammètres.}$$

De la relation (48a) nous déduisons :

$$(w_{ur})_1 = -\frac{\mathcal{M}g}{Q} = 2,655.$$

Prenons, comme valeur du rayon maximum à l'entrée $r_1' = 0^m,40$; nous aurons alors :

$$w_{r1}' = \frac{(w_{ur})_1}{r_1'} = 6,64 \text{ m/sec.}$$

Prenons comme valeur de la vitesse radiale correspondant au rayon maximum d'entrée $w_{r1}' = 2,50 \text{ m/sec.}$; la valeur de la constante A est donnée par :

$$A = -\frac{w_{r1}'}{r_1'} = 6,25.$$

Prenons enfin comme valeur de la vitesse de l'eau à la sortie au bord de la couronne extérieure, $w_{z2}' = 3 \text{ m/sec.}$, nous aurons :

$$\bar{\gamma}_2' = \frac{w_{z2}'}{2A} = 0^m,24.$$

Soient, r_2' le rayon correspondant à ce point du bord de la couronne extérieure, et r_0 le rayon de la ligne d'écoulement ψ'' correspondant à l'ordonnée $\bar{\gamma}_2'$; nous avons :

$$w_{z2}' \pi \gamma (r_2'^2 - r_0^2) = Q,$$

soit :

$$\pi (r_2'^2 - r_0^2) = 0^m,20.$$

Relation qui est vérifiée pour les valeurs :

$$r_2' = 0^m,300 \quad r_0 = 0^m,163.$$

Nous avons alors :

$$\psi' = Ar_2'^2 \bar{\gamma}_2' = 0,135; \quad \psi'' = Ar_0^2 \bar{\gamma}_2' = 0,040;$$

$$\bar{\gamma}_1' = \frac{\psi'}{Ar_1'^2} = 0^m,135.$$

L'ordonnée $\bar{\gamma}_1''$ du point d'intersection de l'hyperbole d'entrée $(w_{ur})_1$ avec la courbe ψ'' diffère très peu de $\bar{\gamma}_0$:

$$\bar{\gamma}_0 = \frac{\psi''}{Ar_1'^2} = 0^m,040, \quad \text{soit sensiblement } \bar{\gamma}_1''.$$

La méthode graphique donnera d'ailleurs très simplement la valeur de cette ordonnée.

Substituons maintenant les valeurs de r_1' , $\bar{\gamma}_1'$, r_2' , $\bar{\gamma}_2'$ et $(w_{ur})_1$ dans la relation (49a); nous trouverons :

$$B = 20,1, \quad C = 31,2,$$

et, d'après la relation (49) :

$$r_1'' = \sqrt{\frac{(w_{ur})_1 + C\bar{\gamma}_1'^2}{B}} = 0^m,367$$

en prenant :

$$\bar{\gamma}_2'' = \frac{\bar{\gamma}_2'}{r_2'} r_2'' = 0,8 r_2''$$

En tenant compte en outre de la relation :

$$\psi'' = Ar_2''^2 \bar{\gamma}_2'',$$

nous trouvons : $r_2'' = 0^m,16$; $r_2' = 0^m,20$.

Nous connaissons ainsi toutes les valeurs déterminant le profil de la roue et nous pouvons le représenter graphiquement, comme l'indique la figure 17.

Nous ferons remarquer que notre calcul n'a conduit jusqu'à présent qu'à des résultats admissibles en pratique.

Pour connaître les angles des directrices, il nous faut encore déterminer les vitesses w_u et w_r à l'angle supérieur de la section d'entrée; nous avons :

$$w_{u1}'' = \frac{(w_{ur})_1}{r_1''} = 7,24 \text{ m/sec.};$$

$$w_{r1}'' = -Ar_1'' = -2,29 \text{ m/sec.};$$

d'où, les valeurs de w_{u1}' et de w_{r1}' étant connues :

$$\text{tg } \alpha' = \frac{w_{r1}'}{w_{u1}'} = 0,377, \quad \alpha' = 20^{\circ}40';$$

$$\text{tg } \alpha'' = \frac{w_{r1}''}{w_{u1}''} = 0,316, \quad \alpha'' = 17^{\circ}30'.$$

La variation de l'angle des directrices est donc très faible.

Enfin, les angles φ de la trajection absolue, prennent, à l'entrée et à la sortie, les valeurs suivantes déduites de la relation (52) :

$$\varphi' = +0,487,$$

$$\varphi'' = +1,425;$$

les angles χ correspondants de la trajectoire relative ont pour valeurs :

$$\chi' = -0,235, \quad \chi'' = -0,091.$$

Les aubes ainsi définies, comme le montre la figure 18 en plan, ne s'étendent que sur une faible portion de la circonférence, et ne prennent pas un développement exagéré. Soit u la vitesse périphérique de la roue :

$$u = r\omega; \quad (54)$$

la relation :

$$\text{tg } \beta = \frac{w_r}{u - w_u} \quad (55)$$

donne, ainsi que l'indique la figure 19, les angles β de l'aube à la périphérie en coupe horizontale.

Nous aurons donc, pour les vitesses en mètres par seconde, aux sommets des aubes :

$$u_1' = 6^m,28; u_1'' = 5^m,76; u_2' = 4^m,71; u_2'' = 3^m,14;$$

$$w_{u1}' = 6^m,64; w_{u1}'' = 7^m,24; w_{u2}' = 0; w_{u2}'' = 0;$$

$$w_{r1}' = -2^m,50; w_{r1}'' = -2^m,29; w_{r2}' = -1^m,88; w_{r2}'' = -1^m,25;$$

d'où, pour les angles :

$$\text{tg } \beta_1' = 6,95; \quad \text{tg } \beta_2' = -0,4;$$

$$\text{tg } \beta_1'' = 1,55; \quad \text{tg } \beta_2'' = -0,4;$$

$$\text{soit : } \beta_1' = 81^{\circ}50'; \beta_1'' = 56^{\circ}10'; \beta_2' = \beta_2'' = -22^{\circ}.$$

Les équations (54) et (55), tout à fait générales, nous permettront de calculer l'inclinaison des trajectoires relatives sur l'aube, en chaque point de l'aube, à moins que nous ne préférions déduire cette inclinaison des courbes construites d'après l'équation (53).

V. — Conclusions.

La théorie que nous avons développée pour les turbines à admission totale s'applique à tous les types de turbines à admission totale, ainsi qu'à leurs réciproques, telles que les pompes centrifuges; elle nous a conduit à des formules pratiques très simples, et par conséquent d'une application immédiate. Toute cette théorie est basée sur l'étude de l'écoulement des liquides dans les corps creux soumis à un mouvement de rotation autour d'un axe. L'hypothèse que tous les points d'un parallèle décrit autour de l'axe de rotation du corps en mouvement (cet axe de rotation étant en même temps celui de la roue mobile) sont soumis à la même pression, et sont dans le même état de mouvement, revient à admettre un nombre indéfini d'aubes; dans ces conditions, le problème est ramené à un problème qui se traduit par des équations à deux dimensions, et peut être traité mathématiquement. Par contre, la théorie des turbines enseignée jusqu'à maintenant se bornait, d'après la méthode indiquée par Euler, à l'étude d'un filet liquide isolé, et ne traitait le problème qu'à l'aide d'équations à une seule dimension; elle ne permettait donc pas de déterminer d'une façon précise la forme de la roue. D'ailleurs, il est bon de faire remarquer que les moyens mathématiques dont nous disposons actuellement ne nous permettent pas encore d'analyser les variations de pression et de vitesse qui se produisent à coup sûr sur un parallèle, par suite du fait que les aubes sont en nombre fini. Il ne nous paraît possible de perfectionner la théorie dans cet ordre d'idées que si l'on disposait d'un vaste matériel d'études, pour lequel les méthodes de recherches sont d'ailleurs encore à trouver. Pour notre part, nous n'avons pas voulu admettre l'usage, consacré jusqu'à ce jour, des coefficients de résistance, dont les valeurs sont la plupart du temps tout à fait arbitraires; pour tenir compte des pertes qui se produisent dans l'utilisation totale de l'énergie, nous avons fait intervenir dans la formule du moment de rotation, en fonction du travail disponible et du nombre de tours, la valeur du *rendement total*, cette dernière ayant été établie expérimentalement sur un grand nombre de turbines.

D'autre part, nous avons toujours trouvé une *expression définie* pour la valeur de ce moment de rotation lorsque les parois de la roue et des parties adjacentes du distributeur et du tuyau d'aspiration correspondaient en coupe méridienne

FIG. 17

FIG. 18

FIG. 19

à des lignes d'écoulement. C'est aussi à cette condition que la turbine, ainsi que la pompe, est réellement remplie d'eau à sa vitesse normale de régime.

Si nous ajoutons, en outre, la condition que les sections de la roue donnent en coupe méridienne des courbes pour lesquelles les valeurs du produit $w_n r$ sont constantes, nous pourrions appliquer en toute exactitude l'équation des moments d'Euler pour une hauteur quelconque finie de la roue; cette équation n'était applicable, jusqu'ici, qu'à un filet liquide moyen. Grâce à cette méthode, nous pouvons garantir une utilisation à peu près uniforme de l'énergie des éléments liquides, bien que ces derniers soient répartis sur leurs trajectoires respectives.

Enfin, les composantes radiale et axiale de la vitesse absolue de l'eau sont déterminées en même temps que la fonction d'écoulement qui donne la forme des parois de la turbine; en outre, la composante tangentielle w_u est supposée être une fonction arbitraire de r et de τ . Dans ces conditions, le calcul des trajectoires absolue et relative et, par conséquent, la détermination de la forme de l'aubage ne présentent aucune difficulté. En prolongeant les trajectoires absolues, nous obtenons la forme des directrices du distributeur et des aubes du diffuseur, au voisinage immédiat de la roue: par conséquent, pour les pompes, nous obtenons, en prolongeant de même les courbes des parois ψ , la forme de toute la capote.

Les vitesses relatives de l'eau dans la roue n'interviennent pas obligatoirement dans l'étude théorique et dans le calcul de la roue; les valeurs de ces vitesses se déduisent plutôt tout naturellement des vitesses absolues en fonction de la vitesse angulaire déterminée d'après le nombre de tours que l'on s'est donné.

Il est bon de faire remarquer encore que la théorie précédente ne s'applique que dans le cas où l'entrée de l'eau dans la roue, et sa sortie de cette roue ont lieu sans choc, c'est-à-dire pour le régime normal de vitesse et de débit. Pour le moment, il ne nous est pas possible de dire jusqu'à quelles limites elle peut s'étendre à d'autres conditions qu'à ce régime normal.

En tous cas, nous pouvons conclure que, chaque fois que l'on s'écartera de notre théorie, soit pour le calcul, soit pour la construction des turbines, on n'aura d'abord pas le droit d'appliquer l'équation des moments d'Euler (équation utilisée à faux jusqu'ici) d'une façon générale; on créera ensuite dans la machine à construire des espaces absolument vides de liquide ou des espaces dans lesquels, se formeront des tourbillons, correspondant naturellement à des pertes d'énergie dont il sera impossible de tenir compte dans les calculs.

E. KREITMANN,

Ingenieur des Arts et Manufactures.

G. ROUTIN,

Ancien élève de l'Ecole Polytechnique.

Nous rappelons que tout ce qui concerne la Rédaction doit être adressé au rédacteur en chef, M. COTE, 24, rue Sully, à LYON, et que tout ce qui concerne l'Administration doit être adressé aux éditeurs, MM. GRATIER et REY, 23, Grande Rue, à GRENOBLE.

LE MOIS HYDRO-ÉLECTRIQUE

ACADÉMIE DES SCIENCES

CHIMIE ET ÉLECTROCHIMIE

Industrie de la soude électrolytique. Théorie du procédé à cloche. — Note de M. André BROCHET. Séance du 19 octobre.

Parmi les méthodes employées pour la fabrication de la soude électrolytique, la plus récente consiste à faire arriver dans le voisinage de l'anode une solution salée, qui sort de l'appareil après s'être chargée de soude à la cathode. La soude libérée prend part à l'électrolyse; les premiers ions OH forment ainsi une couche limite qui tend à se diriger vers l'anode. Si la vitesse du liquide est égale ou supérieure à celles des ions OH, le rendement est théorique. Pratiquement, pour empêcher le chlore de réagir sur l'alcali, on emploie le procédé à cloche. Le compartiment anodique a la forme d'une cloche renfermant l'anode, les cathodes sont à l'extérieur, et un certain nombre de ces cloches sont réunies dans un récipient commun.

Nous avons cherché à déterminer, par le calcul, les conditions de fonctionnement d'un tel procédé, dans le cas du rendement maximum.

La vitesse d'un ion est donnée par la formule

$$v = \frac{l U}{F L}$$

La chute de tension peut être mise sous la forme :

$$U = \frac{1}{\alpha} L d_c \quad \text{d'où : } v = \frac{l d_c}{\alpha F}$$

La vitesse de l'anion OH, et par conséquent celle du liquide, au cas où la couche limite reste stationnaire, est donc fonction de la mobilité de l'ion OH, de la densité de courant, auxquelles elle est proportionnelle, et de la conductivité du liquide à laquelle elle est inversement proportionnelle.

D'autre part, il est facile d'établir, comme l'a fait M. Ph. Guye pour la méthode avec diagramme, que la concentration équivalente du liquide sortant de l'électrolyseur est proportionnelle à l'intensité du courant, et inversement proportionnelle au volume du liquide qui s'écoule. Si ce volume est défini par la section de la cloche et la hauteur h correspondant au déplacement du liquide en une heure, la conductibilité équivalente est donnée par l'expression.

$$C = \frac{d_c}{F h} 10^3$$

Dans le cas où la couche limite reste en place, h vitesse du liquide est égale à v vitesse de l'anion OH, et l'on a finalement :

$$C = \frac{\alpha}{l_{OH}} 10^3$$

La concentration équivalente du liquide qui s'écoule de l'appareil, lorsque la couche limite reste stationnaire, est donc fonction uniquement de la conductivité de l'électrolyte à laquelle elle est proportionnelle, et de la mobilité de l'ion OH à laquelle elle est inversement proportionnelle. Elle est indépendante de la densité de courant, et de la nature de l'alcali.

Applications numériques. — Si nous prenons (à 18°) deux solutions renfermant 20 pour 100 de chlorure de potassium ou de sodium, et la solution saturée de chlorure de sodium, on trouve ($l_{OH} = 174$).

Chlorure	γ_{18}	C	Alcali
K	0,2677	1,538	83,13 gr. par litre
Na	0,1957	1,125	45,00
Na (sat.)	0,2156	1,239	49,56

Comme dans les procédés à diaphragme, on voit qu'il y a avantage, au point de vue rendement, à fabriquer de la potasse de préférence à la soude.

Etant donné la solution de chlorure de sodium saturé à 18°, si nous utilisons une densité de courant de 1 ampère par dm^2 , l'application des formules précédentes nous conduit aux résultats suivants :

I. Vitesse de déplacement du liquide dans la cloche : 0,301 cm. à l'heure.

II. Vitesse d'écoulement du liquide : 30,1 cm^3 par heure et par dm^2 de surface horizontale de cloche.

III. Chute de tension dans la cloche (vers l'anode) : 0,046 volt par centimètre.