Quant au prix de revient de la transformation du zinc ou de l'oxyde en sulfure, on voit immédiatement qu'il est diminué par l'installation de l'usine au voisinage immédiat d'un grand centre de consommation ; il est, en effet, plus avantageux de transporter le sulfure de fer et l'oxyde de zinc ou le zinc métallique, plutôt que l'acide sulfurique, le sulfate ferreux et le sulfure de zinc dont le poids total est presque triple de celui des premiers. Le four électrique, lui, doit être placé vers la mine puisque son rôle principal est, en quelque sorte, d'enrichir le minerai et que, d'autre part, au voisinage d'un grand centre de consommation, le prix de l'énergie électrique est toujours très élevé ; de plus, le rendement du four électrique serait certainement supérieur à celui indiqué par M. Côte dans le cas où il ne travaillerait que pour le sulfure de zinc, puisqu'il ne serait plus nécessaire d'observer les conditions de marche assez délicates qu'impose l'obtention d'un oxyde blanc.

Pour préciser, si l'on tient compte des transports et de l'augmentation de poids inhérente à la transformation de l'oxyde en sulfure de zinc, et en admettant pour les divers produits les prix habituels, et des pertes plutôt fortes, on arrive à ce résultat, que la transformation de l'oxyde en sulfure procure un avantage de 7 francs par 100 kilogrammes au moins, ce qui semble très suffisant pour payer la main-d'œuvre et les frais supplémentaires. En somme, du seul fait d'avoir à leur disposition le sulfure de fer, les industriels qui fabriqueraient de l'oxyde de zinc par la méthode de MM. Côte et Pierron, pourraient sans dépense supplémentaire obtenir du sulfure de zinc, produit qui, je le répète, semble appelé à un grand avenir pour les raisons que j'ai exposées plus haut.

Reste une dernière question : quelle est l'importance de l'industrie de la céruse, du blanc de zinc et du lithopone. Il est difficile d'obtenir, à ce sujet, des renseignements précis ; je dois à l'obligeance de M. le Directeur de l'*Office National du Commerce Extérieur* les trois nombres suivants qu'il m'a fournis à titre purement officieux :

Prod. moy. ann. de la céruse en France 20.000 à 25.000 T.
— — — — Allemagne 40.000 à 45.000 —
— — — du bl. de zinc en France 7.000 à 8.000 —

Ci-joint un extrait du « Tableau général du Commerce de la France » donnant le montant des importations et exportations des matières pour peinture (chiffres officiels). On remarquera qu'il n'y a pas de statistique spéciale pour le lithopone qui est compris dans les « couleurs non dénommées ». Il doit toutefois former une grande partie des importations puisque, en France, on ne fabrique que très peu de lithopone ; on peut donc admettre que la consommation française de lithopone est d'environ 4.000 tonnes par an.

ANNÉES	CÉRUSE		BLANC DE ZINC		COULEURS NON DÉNOMMÉES y compris le lithophone	
	IMPORT.	EXPORT.	IMPORT.	EXPORT.	IMPORT.	EXPORT.
	tonnes	tonnes	tonnes	tonnes	tonnes	tonnes
1899	1.928	202	1.659	1.789	446	369
1900	1.652	1[illegible]9	1.638	1.941	574	277
1901	832	266	1.159	1.690	920	215
1902	2 112	419	2.049	1.885	1.382	329
1903	1.882	374	2.682	2 297	1.402	434
1904	2.046	330	2.695	3.283	1.289	580
1905	2.070	284	4.041	2.557	2.035	415
1906	1.854	375	3.923	2.104	1.984	296
1907	1.803	301	3.961	3.238	2.210	627
1908	3.100	334	3.288	3.902	4.557	467

Pour résumer, les renseignements donnés plus haut, joints au montant des importations et exportations, permettent d'assigner à la consommation annuelle française les valeurs approchées suivantes : 25.000 tonnes pour la céruse, 7.000 pour le blanc de zinc et 4.000 pour le lithopone, c'est-à-dire 35.000 tonnes environ au total.

On voit quel avenir va s'ouvrir devant les produits concurrents de la céruse par la disparition en France de celle-ci, puisqu'elle entre pour plus des deux tiers dans la consommation totale.

J. Lahousse,
Professeur à l'Ecole Centrale Lyonnaise.

HYDRAULIQUE

NOUVELLE MÉTHODE DE JAUGEAGE PAR FLOTTEURS

(Suite)

Méthode du flotteur ascendant. — Si le lit de la rivière est trop accidenté, et s'il n'est pas possible d'employer un flotteur allongé tenant toute la hauteur de l'eau, on pourra appliquer le procédé du flotteur ascendant décrit dans *La Houille Blanche* d'octobre 1904, mais auquel nous avons apporté divers perfectionnements.

On plonge jusqu'au fond de la rivière, dans la zone la plus rapide, un flotteur de petites dimensions, une petite sphère par exemple, de 2 à 3 centimètres de diamètre. Cette sphère doit être suffisamment lestée de façon que, abandonnée à elle-même, elle remonte vers la surface aussi lentement que possible. En même temps qu'elle s'élève, elle est entraînée par le courant, et vient affleurer à la surface après avoir décrit une courbe OA (fig. 5).

Le mode de libération proposé dans l'article précité de *La Houille Blanche* nous paraissant absolument défectueux, nous avons imaginé d'autres procédés, que nous décrirons en détail lorsque nous rendrons compte de l'application expérimentale de la méthode.

Nous allons donner tout d'abord, de la loi d'ascension du flotteur, une interprétation plus vraisemblable.

Faisons abstraction pour un instant de la résistance opposée au flotteur par le milieu fluide dans lequel il se déplace. L'on peut alors considérer que son ascension s'accomplit sous l'action d'une force verticale constante, égale à la différence π du poids d'eau qu'il déplace et de son propre poids. C'est dire qu'elle s'accomplit d'un mouvement uniformément accéléré, d'accélération :

$$\gamma = \frac{\pi}{\mu},$$

en désignant par μ la masse du flotteur.

Supposons qu'après un temps t d'ascension, le flotteur ait atteint, à la hauteur z, la nappe de vitesse V.

Pendant le très petit intervalle de temps dt consécutif, on peut considérer qu'il se déplace horizontalement de $MP = dy$ avec la vitesse V, et verticalement de $MF = dz$ avec la vitesse $u = \gamma t$ acquise à l'instant t.

On a donc d'une part :

$$dy = V dt,$$

et, d'autre part :

$$dz = u dt = \gamma t \, dt;$$

de là :

$$\frac{dy}{dz} = \frac{V}{\gamma t}$$

et :
$$Vdz = \gamma t\, dy$$
On en conclut :
$$V_m = \frac{1}{H}\int_0^H V\, dz = \frac{1}{H}\int_0^H \gamma t\, dy = \frac{\gamma}{H}\int_0^H t\, dy$$

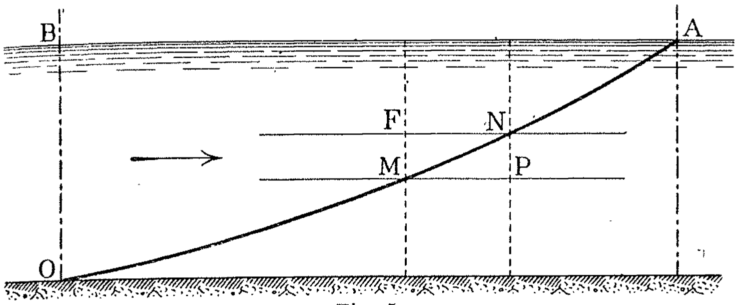

Fig. 5.

Supposons qu'on ait relevé la courbe représentant le temps t en fonction du parcours horizontal y. Pour procéder pratiquement à ce relevé, nous disposerons en travers de la rivière, de distance en distance, des lignes de visée simplement constituées par des cordons tendus d'une rive à l'autre, normalement au courant. Il suffira de suivre, sur l'une des rives, l'ascension du flotteur, et de noter avec un chronomètre les instants où il passe exactement « à l'aplomb » de chaque cordon.

La courbe Z étant ainsi relevée (fig. 6), l'intégrale $\int_0^H t\, dy$ équivaut à la surface Σ de l'aire comprise entre l'axe Oy et la courbe.

On mesurera cette surface, et l'on aura :
$$V_m = \frac{V}{H}\Sigma. \qquad (16)$$

Il est intéressant de remarquer que la vitesse V de translation horizontale du flotteur peut s'obtenir immédiatement sur la courbe Z en menant la tangente à cette courbe au point considéré. Si l'on appelle α l'angle de cette tangente avec l'axe des t, on a :
$$V = \frac{dy}{dt} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Pour établir la formule (16), nous avons négligé la résistance de l'eau. Grâce à cette simplification, nous avons pu supposer constante l'accélération *ascensionnelle*, et résoudre pratiquement l'intégrale $\int_0^H \gamma t\, dy$. Il importe, en vérité, de tenir compte de cette résistance. Analysons ses effets.

Imaginons d'abord que notre flotteur sphérique, de petites dimensions, s'élève verticalement dans une eau parfaitement tranquille. Nous le supposons d'une masse spécifique très peu différente de celle de l'eau de manière que son ascension s'effectue très lentement. Dans ces conditions, la résultante verticale R des frottements, dus au glissement des molécules d'eau sur la surface du flotteur et à la perturbation apportée au régime de l'eau, est une fonction de la vitesse ascensionnelle u suffisamment représentée par la formule :
$$R = a\frac{du}{dt} + fu, \qquad (*)$$

(*) En réalité, la résistance éprouvée par un corps en mouvement dans un fluide est de la forme plus générale :
$$R = a\frac{du}{dt} + fu + ku^2.$$
Comme la vitesse ascensionnelle du flotteur est ici très faible, de l'ordre du centimètre par seconde, on peut négliger le terme en u^2.

dans laquelle a est un coefficient d'inertie qui, pour la sphère, est égal à $\frac{\mu_1}{2}$, μ_1 étant la masse du volume d'eau équivalent au volume de la sphère, et f un coefficient de frottement dont la valeur dépend du diamètre du flotteur, de l'état de sa surface et aussi de la nature de l'eau (claire ou limoneuse).

En tenant compte de cette résistance, l'équation du mouvement ascensionnel doit s'écrire :
$$\mu\frac{du}{dt} = \pi - \left(\frac{\mu_1}{2}\frac{du}{dt} + fu\right),$$
ou :
$$\left(\mu + \frac{\mu_1}{2}\right)\frac{du}{dt} = \pi - fu.$$

Comme la force ascensionnelle doit être très faible, la densité apparente du flotteur doit être très peu différente de celle de l'eau, de sorte qu'on peut, sans erreur sensible pour la solution de l'équation, remplacer μ_1 par μ.

En posant :
$$\mu' = \frac{3}{2}\mu,$$
l'équation devient :
$$\mu'\frac{du}{dt} = \pi - fu.$$

C'est une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants. La résolution de cette équation conduit à l'intégrale exponentielle :
$$u = \frac{\pi}{f} + Ce^{-\frac{f}{\mu'}t},$$
C étant une constante d'intégration, dont nous fixerons la valeur d'après les conditions initiales :
$$u = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0\,;$$
il vient :
$$\frac{\pi}{f} + C = 0,$$
d'où :
$$C = -\frac{\pi}{f}.$$
On a donc :
$$u = \frac{\pi}{f}\left(1 - e^{-\frac{f}{\mu'}t}\right).$$

Remplaçons l'exponentielle par son développement en série :
$$u = \frac{\pi}{f}\left[1 - 1 + \frac{\frac{f}{\mu'}t}{1} - \frac{\left(\frac{f}{\mu'}t\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{f}{\mu'}t\right)^3}{1.2.3} - \dots\right]$$
ou, en effectuant :
$$u = \frac{\pi}{\mu'}t - \frac{1}{2}\frac{\pi}{\mu'}\frac{f}{\mu'}t^2 + \frac{1}{6}\frac{\pi}{\mu'}\frac{f^2}{\mu'^2}t^3 - \dots\dots$$

Si le flotteur est d'assez petites dimensions, et si sa surface est nette et polie, nous pourrons limiter cette dernière série à ses deux premiers termes, et écrire :
$$u = \frac{\pi}{\mu'}t - \frac{1}{2}\frac{\pi}{\mu'}\frac{f}{\mu'}t^2.$$
Posons :
$$\frac{\pi}{\mu'} = \gamma' \qquad \text{et} \qquad \frac{f}{\mu'} = \varphi.$$
On a :
$$u = \gamma' t - \frac{1}{2}\gamma'\varphi t^2. \qquad (17)$$

Considérons maintenant le cas du flotteur s'élevant dans une eau courante.

Si, à chaque instant, tous les filets de la nappe où se trouve compris le flotteur étaient animés d'une égale vitesse, le flotteur entraîné horizontalement à cette vitesse s'élèverait dans cette nappe ainsi que dans une eau tranquille, c'est-à-dire avec une vitesse ascensionnelle

$$u = \gamma' t - \frac{1}{2}\gamma' \varphi t^2.$$

En réalité, les filets s'écoulent avec des vitesses inégales, et le flotteur est entraîné avec une vitesse égale à la moyenne de ces vitesses. En sorte que les différentes zones horizontales de la sphère ont des déplacements relatifs par rapport aux filets incidents, et ces déplacements donnent lieu à de nouveaux frottements. Mais la sphère étant supposée de petites dimensions, nous allons voir que ces frottements sont sans influence sur son déplacement.

En effet, on peut admettre que la vitesse des filets varie linéairement de l'un à l'autre dans la faible épaisseur de la nappe. Leur vitesse moyenne coïncide alors avec la vitesse du filet médian F_m, et deux filets symétriques, tels que F_1 et F_2, sont animés de vitesses qui diffèrent également de la vitesse médiane, mais l'une en plus et l'autre en moins. Il en résulte que les déplacements relatifs de la sphère par rapport aux deux filets considérés créent des forces de frottement égales, parallèles, mais de sens contraire.

L'ensemble de ces forces équivaut à un couple dont le seul effet possible est de faire tourner la sphère sur elle-même autour de son diamètre horizontal perpendiculaire aux filets.

Lorsque le flotteur, du fait de sa progression verticale, passe dans une nappe plus rapide, le moment du couple augmente, mais jamais il n'influe sur la translation du flotteur à travers la masse liquide.

En définitive, tout se passe comme si le flotteur était, aux différents niveaux de son ascension, immergé dans une eau tranquille. C'est dire que sa vitesse ascensionnelle s'exprime encore par la formule (17).

Ceci dit, il est immédiat de rectifier l'expression de la vitesse moyenne V_m établie en première analyse.

On a toujours : $dy = V dt$,

mais, d'autre part :

$$dz = u dt = \left(\gamma' t - \frac{1}{2}\gamma' \varphi t^2\right) dt.$$

On en déduit :

$$V dz = \left(\gamma' t - \frac{1}{2}\gamma' \varphi t^2\right) dy,$$

et

$$V_m = \frac{1}{H}\int_0^H V dz = \frac{\gamma'}{H}\left[\int_0^H t\, dy - \frac{1}{2}\varphi \int_0^H t^2 dy\right].$$

Si l'on déduit de la courbe Z, relevée ainsi qu'il a été dit, la courbe Z' représentant les carrés des temps en fonction des déplacements horizontaux du flotteur, l'intégrale corrective $\int_0^H t^2 dy$ est égale à la surface Σ' de l'aire limitée par cette courbe.

Et l'on aura finalement une valeur très approchée de V_m par la formule :

$$V_m = \frac{\gamma'}{H}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\varphi \Sigma'\right), \qquad (18)$$

en supposant déterminés les coefficients γ' et φ.

Détermination de γ' — Nous avons posé : $\gamma' = \frac{\pi}{\mu}$, c'est-à-dire :

$$\gamma' = \frac{\pi}{\frac{3}{2}\mu} = \frac{2}{3}\frac{\pi}{\mu}.$$

Le facteur γ' est donc égal aux $\frac{2}{3}$ de l'accélération que la force ascensionnelle π communiquerait à la masse μ du flotteur dans un fluide sans résistance. Les paramètres π et γ étant simplement déterminables par l'expérience, nous évaluerons γ' par la formule ci-dessus.

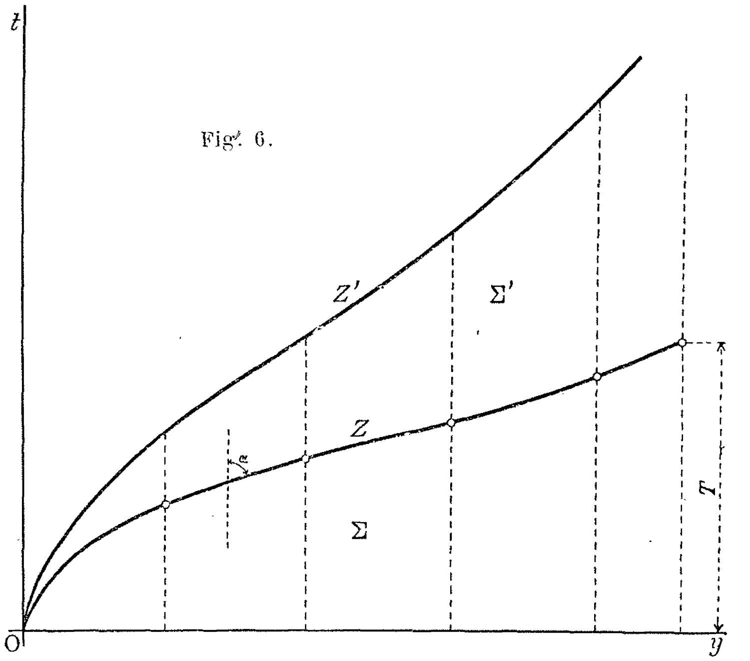

Fig. 6.

Mesure de π et de μ. — Il suffira de disposer d'une balance sensible (une balance de pharmacien par exemple). On mesurera la masse μ du flotteur par double pesée; si le flotteur est d'assez grosses dimensions pour qu'il y ait lieu, pendant les pesées, de tenir compte de la poussée de l'air, on constituera la tare avec une autre sphère de même diamètre.

On déterminera d'autre part la poussée différentielle π par une pesée hydrostatique, le flotteur étant immergé dans un vase contenant un peu d'eau prélevée dans la rivière.

Détermination du coefficient de frottement φ. — De l'expression de la vitesse ascensionnelle :

$$u = \gamma' t - \frac{1}{2}\gamma' \varphi t^2,$$

on déduit, par simple intégration, l'expression de la hauteur z à laquelle s'est élevé le flotteur après un temps t :

$$z = \frac{1}{2}\gamma' t^2 - \frac{1}{6}\gamma' \varphi t^3.$$

Appliquons cette relation à la course totale du flotteur : il vient, en désignant par T la durée totale du parcours :

$$H = \frac{1}{2}\gamma' T^2 - \frac{1}{6}\gamma' \varphi T^3,$$

d'où l'on tire :

$$\varphi = \frac{\frac{1}{2}\gamma' T^2 - H}{\frac{1}{6}\gamma' T^3}. \qquad (19)$$

Cette formule, qui ne fait intervenir que des paramètres déjà connus, permettra de calculer le coefficient φ.

Remarque. — Nous avons supposé que la rivière était sans pente appréciable, et par cela même que la course verticale du flotteur (distance verticale comprise entre l'origine de la trajectoire et le point d'émergence) était égale à la profondeur verticale de la rivière OB $= H$ (fig. 5).

Si la rivière présente une déclivité sensible i (fig. 7), la course verticale h du flotteur peut différer notablement de H.

Si l'on désigne par D le parcours expérimentalement mesuré :

$$H - h = D \sin i.$$

L'écart est non seulement proportionnel à la pente, mais encore à la longueur horizontale du parcours.

Malgré l'importance apparente de cet écart, nous allons voir que les formules (18) et (19) subsistent sans modification, alors qu'on pourrait être tenté, pour les corriger, d'y remplacer H par $h = H - D \sin i$.

Rapportons la trajectoire OA à l'axe Oy, parallèle au fond de la rivière, et à l'axe perpendiculaire Oz_1.

On a encore :

$$V_m = \frac{1}{H_1}\int_0^{H_1} V\,dz_1.$$

A l'instant t, le flotteur est animé, *parallèlement à l'axe* Oz_1, d'une vitesse u_1 déterminée par la résultante de la poussée normale au courant, $\pi \cos i$, et de la résistance de l'eau, $R = \frac{\mu}{2}\frac{du_1}{dt} + fu_1$.

L'équation du mouvement ascensionnel *parallèlement à* Oz_1 est donc :

$$\mu \frac{du_1}{dt} = \pi \cos i - \left(\frac{\mu}{2}\frac{du_1}{dt} + f u_1\right),$$

ou

$$\mu' \frac{du_1}{dt} = \pi \cos i - fu_1.$$

On en conclut, par intégration,

$$u_1 = \frac{\pi \cos i}{\mu'} t - \frac{1}{2}\frac{\pi \cos i}{\mu'} \cdot \frac{f}{\mu'} t^2;$$

ou, en posant: $\frac{\pi \cos i}{\mu'} = \gamma_1$,

$$u_1 = \gamma_1 t - \frac{1}{2}\gamma_1 \varphi t^2.$$

Au même instant t, le flotteur est animé, *parallèlement à* Oy, d'une vitesse :

$$V_1 = V - \frac{\pi \sin i}{\mu} t.$$

En effet, l'action de la nappe entraînante est contrariée par la composante $\pi \sin i$ de la poussée ascensionnelle, et il en résulte un glissement rétrograde du flotteur par rapport à la nappe.

Pendant l'intervalle de temps dt consécutif à l'instant t, le flotteur s'élève parallèlement à Oz_1 de :

$$dz_1 = u_1 dt = \left(\gamma_1 t - \frac{1}{2}\gamma_1 \varphi t^2\right) dt,$$

tandis qu'il se déplace parallèlement à Oy de :

$$dy_1 = V_1 dt = \left(V - \frac{\pi \sin i}{\mu} t\right) dt.$$

De là :

$$\frac{dz_1}{dy_1} = \frac{\gamma_1 t - \frac{1}{2}\gamma_1 \varphi t^2}{V - \frac{\pi \sin i}{\mu} t},$$

et :

$$V dz_1 = \left(\gamma_1 t - \frac{1}{2}\gamma_1 \varphi t^2\right) dy_1 + \frac{\pi \sin i}{\mu} t\, dz_1.$$

Remplaçons dans le dernier terme, de manière à le rendre intégrable, dz_1 par son expression en t. Il vient :

$$V dz_1 = \left(\gamma_1 t - \frac{1}{2}\gamma_1 \varphi t^2\right)\left[dy_1 + \frac{\pi \sin i}{\mu} t\right].$$

Or, si l'on se reporte à la figure 7, on voit que si l'on prend Oz comme axe, on a :

$$dy = \text{MQ} = V dt$$

tandis que si l'on prend Oz_1 comme axe, on a :

$$dy_1 = \text{MP} = \left(V - \frac{\pi \sin i}{\mu} t\right) dt$$

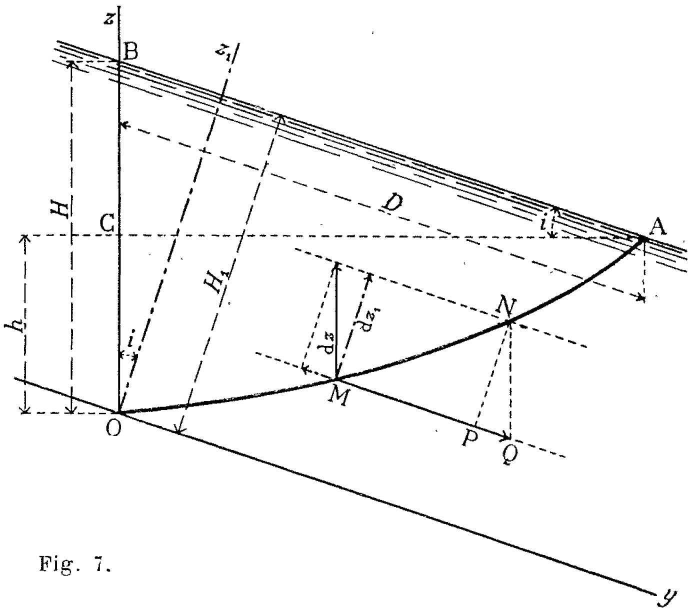

Fig. 7.

De sorte que l'expression entre crochets, $dy_1 + \frac{\pi \sin i}{\mu} t$, représente la distance MQ que parcourrait le flotteur, à la vitesse V de la nappe, si l'action de cette nappe n'était point contrariée par la composante $\pi \sin i$, c'est-à-dire *la distance* dy *relevée expérimentalement*.

On peut donc écrire :

$$V_m = \frac{1}{H_1}\int_0^{H} V dz_1 = \frac{\gamma_1}{H_1}\int_0^{H}\left(t - \frac{1}{2}\varphi t^2\right) dy.$$

Mais, comme :

$$\gamma_1 = \gamma' \cos i \qquad \text{et} \qquad H_1 = H \cos i,$$

il vient finalement la formule (18) déjà trouvée :

$$V_m = \frac{\gamma'}{H}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\varphi \Sigma'\right).$$

où Σ et Σ' se déduisent des distances y comptées parallèlement au courant, à partir du plan vertical Oz passant par l'origine de la trajectoire.

De même, l'expression (19) du coefficient φ de frottement ne subit pas de changement. On a en effet :

$$\varphi = \frac{\frac{1}{2}\gamma_1 T^2 - H_1}{\frac{1}{6}\gamma_1 T^3} = \frac{\frac{1}{2}\gamma' T^2 - H}{\frac{1}{6}\gamma' T^3}.$$

INFLUENCE DE L'INERTIE DU FLOTTEUR. — Le flotteur, une fois abandonné à lui-même au fond de la rivière, présente une certaine inertie à se mettre en mouvement : il n'obéit spontanément ni à l'impulsion verticale de l'eau, ni à l'entraînement horizontal du courant.

Nous avons tenu compte de l'inertie *ascensionnelle* en introduisant le terme en $a\frac{du}{dt}$ dans l'expression de la résistance R du fluide ; il importait en effet d'en tenir compte *systématiquement*, car, si la masse μ du flotteur est petite, la poussée verticale de l'eau π est également très faible ; dans ces conditions, l'inertie du flotteur doit être considérée comme un facteur sensible de son mouvement ascensionnel.

Par contre, nous avons fait abstraction de l'inertie *horizontale* du flotteur ; nous avons admis qu'il prenait dès le premier instant la vitesse du courant. En réalité, il est libéré avec une vitesse nulle dans une nappe d'eau animée d'une vitesse finie : c'est d'ailleurs la résultante des frottements dus au glissement relatif de l'eau qui détermine son déplacement horizontal; mais, bien qu'il soit de très petite masse, il lui faut un certain temps avant qu'il ne se déplace avec la vitesse du courant.

L'analyse mathématique montre que la vitesse relative de l'eau par rapport au flotteur décroit suivant une loi à peu près exponentielle, c'est-à-dire qu'elle ne s'annule théoriquement qu'après un temps infini. En pratique, il suffit d'un temps très court, cinq secondes au plus.

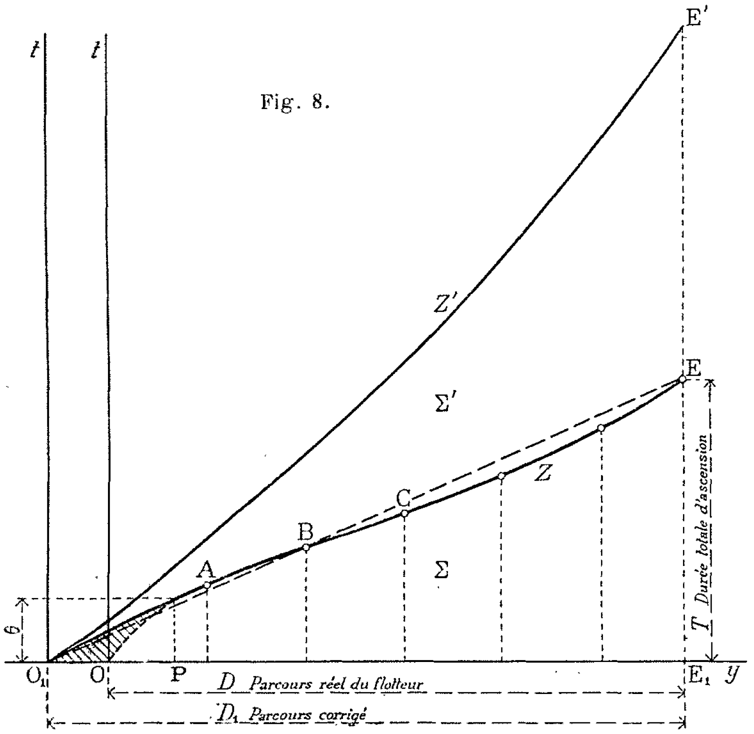

Fig. 8.

Pendant cette période variable θ, le flotteur se déplace moins vite que chacune des nappes qu'il traverse successivement, et la distance horizontale OP (fig. 8), qu'il franchit de la sorte, est moins grande que s'il se déplaçait à chaque instant avec la vitesse de l'eau. Il s'ensuit que la courbe Z présente, dans l'intervalle θ, un fléchissement plus ou moins prononcé. Si donc on extrapole normalement l'arc CBA jusqu'à son intersection O_1 avec l'axe Oy, le segment O_1P représente la vraie distance qu'aurait parcourue le flotteur au régime du courant. On pourra donc remédier à l'inertie horizontale du flotteur en prenant pour Σ la surface de l'aire comprise entre la courbe rectifiée O_1ABCE et l'axe O_1y. Quant à la courbe Z', on la déduira de la courbe Z ainsi corrigée.

Expression simplifiée de V_m. — Si l'on ne dispose pas d'une balance assez sensible pour procéder à la détermination précise de γ', ou si, dans les conditions de l'expérience, le terme correctif $\frac{1}{2}\varphi\,\Sigma'$ dû aux frottements est de minime importance, on pourra obtenir une expression simplifiée de V_m en considérant le mouvement ascentionnel du flotteur, comme uniformément accéléré *dans son ensemble.*

Le flotteur s'élevant de H en un temps T (*), l'accélération de ce mouvement fictif, équivalent dans son ensemble au mouvement réel, sera :

$$\gamma_m = \frac{2H}{T^2}.$$

Et la vitesse moyenne V_m aura pour expression :

$$V_m = \frac{\frac{2H}{T^2}}{H}\cdot\Sigma = \frac{2}{T^2}\Sigma. \qquad (20)$$

Telle est la formule simple, et suffisante en pratique, dont on peut admettre l'usage.

Si l'ascension du flotteur a été assimilée à un mouvement uniformément accéléré, la valeur de γ_m déduite des coordonnées limites H et T de la trajectoire constitue une valeur moyenne qui tient compte implicitement de l'influence des frottements et des remous internes de l'eau. Il s'ensuit que la valeur de V_m calculée par la formule approximative (20) est très peu différente de la valeur obtenue avec la formule correcte (18). On peut d'ailleurs se rendre compte de l'ordre de grandeur de cette différence.

On a, d'une part :

$$H = \frac{1}{2}\gamma_m T^2,$$

et, d'autre part :

$$H = \frac{1}{2}\gamma' T^2 - \frac{1}{6}\gamma'\varphi T^3.$$

On en déduit la relation

$$\gamma_m = \gamma'\left(1 - \frac{1}{3}\varphi T\right).$$

Il s'en suit que l'expression approchée de la vitesse moyenne

$$V_m = \frac{\gamma_m}{H}\Sigma$$

est équivalente à l'expression

$$V_m = \frac{\gamma'}{H}\left(1 - \frac{1}{3}\varphi T\right)\Sigma = \frac{\gamma'}{H}\left(\Sigma - \frac{1}{3}\varphi T\Sigma\right)$$

et, par suite, diffère de l'expression rigoureuse

$$V_m = \frac{\gamma'}{H}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\varphi\Sigma'\right)$$

de la quantité :

$$\Delta V_m = \frac{\gamma'}{H}\left(\Sigma - \frac{1}{3}\varphi T\Sigma\right) - \frac{\gamma'}{H}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\varphi\Sigma'\right)$$
$$= \frac{\gamma'\varphi}{H}\left(\frac{1}{2}\Sigma' - \frac{1}{3}T\Sigma\right).$$

L'expérience montre que la courbe Z est, dans son ensemble, à peu près rectiligne, ou du moins que l'aire Σ est très peu différente de l'aire triangulaire O_1EE_1 limitée par la corde O_1E.

Supposons, pour un instant, que la courbe Z se confonde exactement avec la corde sous-tendante.

Si l'on désigne par D_1 l'abcisse totale O_1E_1, la surface Σ a pour valeur :

$$\Sigma = \frac{TD_1}{2}$$

Comme d'ailleurs la corde O_1E a pour équation, par rapport aux axes O_1y et O_1t,

$$t = \frac{T}{D_1}y,$$

(*) La hauteur *ascentionnelle* du flotteur est $OB = H$ (fig. 7). C'est l'influence seule de la vitesse V qui fait redescendre le flotteur de $BC = D \sin i$, le mouvement ascentionnel proprement dit y étant absolument étranger.

on en conclut d'autre part, que :

$$\Sigma' = \int_0^T t^2 dy = \frac{T^2}{D_1^2} \int_0^{D_1} y^2 dy = \frac{T^2}{D_1^2} \cdot \frac{D_1^3}{3} = \frac{T^2 D_1}{3}$$

Dans ces conditions, l'erreur ΔV_m a pour valeur :

$$\Delta V_m = \frac{\gamma \varphi}{H} \left(\frac{1}{2} \frac{T^2 D_1}{3} - \frac{1}{3} T \frac{T D_1}{2} \right) = 0$$

Ainsi l'erreur ΔV_m, nulle dans le cas idéal où la courbe Z serait une droite, sera d'autant plus faible que l'aire Σ diffère moins de l'aire triangulaire O_1EE_1 correspondante.

Dans nos différents essais, l'écart ne dépassait pas ± 1 pour 100.

En adoptant la formule (20), l'expression du débit devient :

$$Q = H . \frac{S}{A} \frac{2}{T^2} . \Sigma = 2 \frac{S}{A} \frac{H}{T^2} \Sigma. \qquad (21)$$

(A suivre.)

H. Bureau,
Licencié ès-sciences Physiques et Mathématiques
Ingénieur au Laboratoire Central d'Electricité

AMÉNAGEMENT DES CHUTES

CALCUL DU DIAMÈTRE ÉCONOMIQUE DES CONDUITES FORCÉES

L'article que nous avons publié sous ce titre, dans le numéro de mars de cette Revue, comporte une faute d'impression, et deux erreurs qui nécessitent une rectification. Ces deux erreurs n'affectent en rien la règle que nous avions énoncée à la page 67 sur la condition d'économie, mais elles faussent complètement la formule (12) relative au diamètre. D'autre part, certains points de cet article nécessitent quelques développements, notamment sur la justification de la formule (2) que nous avons indiquée pour le calcul du poids total d'une conduite forcée.

Dans ces conditions, étant donné l'importance du sujet, et pour la clarté de l'exposition, il nous paraît nécessaire de reprendre complètement cette question. Ce nouvel exposé nous permettra, d'ailleurs, de donner une expression du diamètre économique à la fois plus simple et plus correcte.

Nous nous bornerons, comme nous l'avions fait, à l'étude d'une conduite uniformément inclinée.

Poids d'une conduite uniformément inclinée. — Dans l'article précédent, nous avions indiqué la formule suivante pour le calcul du poids total de la conduite forcée

$$P = 1{,}3 H D^2 L$$

Dans laquelle H représente la hauteur de chute, D le diamètre et L la longueur totale en mètres.

Voici l'explication de cette formule :

Si on admet que tous les tronçons soient d'égale longueur, la loi de croissance des épaisseurs est linéaire ; l'épaisseur moyenne sera donc la moyenne arithmétique des épaisseurs extrêmes, ce sera par suite l'épaisseur correspondant à la charge $H/2$. Le poids total d'une conduite uniformément inclinée, de longueur L, et de charge maxima H, sera donc le même que celui d'une conduite *horizontale* de longueur L et de charge $H/2$. Le problème revient, en somme, à calculer le poids de cette conduite horizontale. Soient : e son épaisseur, et δ le poids spécifique de l'acier. Le poids de cette conduite est donné par la relation :

$$P = \pi D e \delta L$$

mais, si D et H sont exprimés en mètres, et si R, taux de travail du métal, est exprimé en kgs par mm², l'épaisseur e est donnée ici, en millimètres, par la relation :

$$e = \frac{D \frac{H}{2}}{2R}$$

Par suite, le poids de la conduite, exprimé en kilogrammes, est :

$$P = \frac{\pi \delta}{4000 R} . H D^2 L = K H D^2 L \qquad (1)$$

Le poids du m³ d'acier étant de 7 700 kgs, et le taux R de travail généralement adopté étant de 7 kgs, la valeur du facteur constant K serait donc théoriquement égale à 0,86. Une première majoration est nécessaire pour tenir compte des rivets et recouvrements, dont le facteur de majoration admis est de 1,16 environ (pour les tuyaux à brides, relativement courts, ce facteur de majoration peut atteindre 1,4), de sorte que K devient égal à :

$$0{,}86 \times 1{,}16 = 1$$

Le poids cherché serait donc, en kilogrammes : $P = H D^2 L$.

Mais les formules précédentes conduisent à une épaisseur nulle pour $H = 0$; d'autre part, les conditions de rigidité du tuyau imposent une épaisseur minima à l'origine. Pour tenir compte de cette dernière majoration, on peut admettre, d'une manière générale, la relation :

$$P = 1{,}3 H D^2 L \qquad (2)$$

dont les résultats concordent sensiblement avec ceux des barêmes des chaudronniers.

Calcul du diamètre économique. — Nous appellerons f le prix en francs de la tonne d'acier, et t le taux d'amortissement et d'intérêt par franc. Les dépenses annuelles peuvent alors se mettre sous la forme :

$$S = M + X = M + a D^2$$

où M représente les dépenses fixes indépendantes de la conduite, et X la partie variable des dépenses (intérêt et amortissement de la conduite), avec, ici :

$$a = 0{,}0013 H L t f \qquad (5)$$

La perte de charge est donnée, comme précédemment, par la relation :

$$h = 0{,}00243 \frac{Q^2 L}{D^5}$$

La dépense annuelle, correspondant aux frottements dans la conduite, est donc :

$$Y = \frac{b}{D^5} \qquad (10)$$

en posant : $b = 0{,}0243 \, v \, Q^3 \, L$ (11)

v étant toujours le prix du cheval-an

L'expression des frais annuels est donc

$$F = M + \left(a D^2 + \frac{b}{D^5} \right) = M + z$$

La solution cherchée devant rendre F minimum, il faut que :

$$\frac{dz}{dD} = 2aD - \frac{5b}{D^6} = 0$$

d'où :

$$D = \sqrt[7]{\frac{5b}{2a}} = \sqrt[7]{46{,}73 \frac{v Q^3}{H t f}} \qquad (12)$$

Mais on peut admettre, comme nous l'avions indiqué, que, d'une façon générale, $t = 0{,}1$. D'ailleurs, une variation