rure de calcium, chlorure de sodium, soude ; usines de préparation de l'alumine et de la cryolithe ; énergie hydro-électrique abondante ; enfin, usines de fabrication, pourvues de moyens d'utilisation perfectionnés et d'un personnel de techniciens remarquables.

Georges FLUSIN,

Chargé du Cours d'Electrochimie et d'Electrométallurgie A l'Université de Grenoble.

HYDRAULIQUE

DES COUPS DE BÉLIER DANS LES CONDUITES

Note au sujet de l'emploi des réservoirs d'air pour atténuer les coups de bélier dans le cas d'une fermeture brusque, et sur l'emploi d'une disposition permettant d'en réduire considérablement les dimensions.

Par le Comte DE SPARRE,

Doyen de la Faculté Catholique des Sciences de Lyon

—(*Suite*)—

III

Reprenons maintenant le même problème en tenant compte, par la méthode de M. Allievi, de la dilatation du tuyau et de la compression du liquide.

Je rappelle que, dans cette méthode, si l est la longueur de la conduite, supposée circulaire et de diamètre constant, et a la vitesse de propagation (1), on doit considérer des périodes successives de durée égale à $\frac{2l}{a}$. Si alors y et v sont la pression et la vitesse dans le tuyau à l'extrémité du côté du distributeur, on a, pendant la première période, de longueur $\frac{2l}{a}$

$$y = y_0 + F(t) \qquad (36)$$

$$v = v_0 - \frac{g}{a} F(t) \qquad (37)$$

où y_0 et v_0 sont les valeurs de y et de v à l'état de régime.

On a ensuite pour une période quelconque :

$$y = y_0 + F(t) - F\left(t - \frac{2l}{a}\right) \qquad (38)$$

$$v = v_0 - \frac{g}{a}\left[F(t) + F\left(t - \frac{2l}{a}\right)\right] \qquad (39)$$

Formules dans lesquelles $F\left(t - \frac{2l}{a}\right)$ est connu au moyen des équations semblables relatives à la période précédente.

Ceci posé, le théorème de Bernoulli nous donnera, comme dans le cas précédent (2) :

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} = y - \frac{p_1}{\pi} - \alpha \frac{w^2}{2g} \qquad (40)$$

(1) D'après M. Allievi :

$$a = \frac{9\,900}{\sqrt{48{,}3 + K\frac{d}{e}}}$$

où d est le diamètre et e l'épaisseur de la conduite, et où, de plus, $K=0{,}5$ pour le fer et l'acier, et $K=1$ pour la fonte.

(2) Ici, en effet, la pression désignée dans (3') par $\frac{p_0}{\pi} + H(1+z)$ est désignée par y.

où on a aussi comme dans le cas précédent :

$$\frac{p_1}{\pi} = \left(\frac{p_0}{\pi} + H\right)\left(1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^t v\,dt\right) = y_0\left(1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^t v\,dt\right) \qquad (41)$$

et

$$w = \frac{Sv}{s}$$

En posant alors comme plus haut, formules (8) et (9) :

$$m = \frac{S^2}{s^2}(1 + \alpha) - 1 \qquad (8)$$

$$n = \frac{2g}{\lambda}\left(\frac{p_0}{\pi} + H\right) = \frac{2gy_0}{\lambda} \qquad (9)$$

on obtient :

$$mv^2 = 2g(y - y_0) - n\int_0^t v\,dt \qquad (42)$$

Mais pour la première période, les équations (36) et (37) donnent :

$$y - y_0 = F(t) = \frac{a}{g}(v_0 - v) \qquad (43)$$

Pour les périodes suivantes, les équations (38) et (39) :

$$y - y_0 = F(t) - F\left(t - \frac{2l}{a}\right)$$

Si on désigne alors par F_n et v_n les valeurs de F et de v pendant la n^e période de longueur $\frac{2l}{a}$, par F_{n-1} et v_{n-1} les valeurs de ces quantités à l'instant correspondant de la période précédente, et ainsi de suite, nous aurons, en vertu des équations (38) et (39) :

$$F_n = \frac{a}{g}(-v_n + v_0) - F_{n-1}$$

$$F_{n-1} = \frac{a}{g}(-v_{n-1} + v_0) - F_{n-2}$$

d'où on déduit :

$$F_n = \frac{a}{g}(-v_n + v_{n-1}) + F_{n-2}$$

D'ailleurs :

$$F_1 = \frac{a}{g}(-v_1 + v_0)$$

$$F_2 = \frac{a}{g}(-v_2 + v_0) - F_1 = \frac{a}{g}(-v_2 + v_1)$$

de sorte que, pour n pair, on a :

$$F_n = \frac{a}{g}(-v_n + v_{n-1} - v_{n-2} \qquad - v_2 + v_1)$$

et pour n impair :

$$F_n = \frac{a}{g}(-v_n + v_{n-1} - v_{n-2} \qquad - v_1 + v_0)$$

On en déduit pour le coup de bélier pendant la n^{me} période, si n est pair :

$$y_n - y_0 = F_n - F_{n-1}$$

$$= \frac{a}{g}\left[-v_n + 2(v_{n-1} - v_{n-2} + v_{n-3} \qquad + v_1) - v_0\right]$$

et pour n impair :

$$y_n - y_0 = \frac{a}{g}\left[-v_n + 2(v_{n-1} - v_{n-2} + v_{n-3} \qquad - v_1) + v_0\right]$$

Proposons-nous maintenant de calculer les valeurs de v et le coup de bélier au début et à la fin de chaque période, désignons pour cela par α_n et ζ_n la valeur de v et le coup de bélier au début de la n^{me} période et par β_n et ζ'_n les valeurs de ces quantités à la fin de cette même période.

Posons de plus :

$$\alpha_1 = v_0 - \varepsilon_1 \qquad \alpha_n = \beta_{n-1} - \varepsilon_n \qquad \beta_n = \alpha_n - \eta_n$$

Nous aurons alors (¹) :

$$\zeta_n = \frac{a}{g}\left[\varepsilon_n + \eta_{n-1} - \varepsilon_{n-1} - \eta_{n-2} + \varepsilon_{n-2} + \eta_{n-3} \quad -(-1)^n \varepsilon_1\right]$$

$$\zeta'_n = \frac{a}{g}\left[\varepsilon_n + \eta_n - \varepsilon_{n-1} - \eta_{n-1} + \varepsilon_{n-2} + \eta_{n-2} \quad - (-1)^n (\varepsilon_1 + \eta_1)\right]$$

d'où on déduit :

$$\zeta'_n - \zeta_n = \frac{2a}{g}\left[\frac{1}{2}\eta_n - \eta_{n-1} + \eta_{n-2} \quad - (-1)^n \eta_1\right] \quad (44)$$

$$\zeta_n - \zeta'_{n-1} = \frac{2a}{g}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-2} \quad - (-1)^n \varepsilon_1\right] \quad (45)$$

On calculera, au moyen de ces formules, les coups de bélier successifs une fois que l'on connaîtra $\varepsilon_1, \varepsilon_2 .. \varepsilon_n \; \eta_1, \eta_2 .. \eta_n$

Pour calculer ces quantités, si nous considérons d'abord le début de la première période, la formule (42) nous donnera :

$$m\alpha_1^2 = 2g\zeta_1 \quad (46)$$

où en vertu de (43) :

$$\zeta_1 = \frac{a}{g}(v_0 - \alpha_1) = \frac{a}{g}\varepsilon_1$$

Si nous supposons maintenant ε_1 assez petit pour que nous puissions négliger les termes en ε_1^2 (²), en remplaçant dans (46) α_1 par $v_0 - \varepsilon_1$, nous aurons :

$$m(v_0^2 - 2v_0\varepsilon_1) = 2a\varepsilon_1$$

d'où :

$$\varepsilon_1 = \frac{mv_0^2}{2a\left(1 + \frac{mv_0}{a}\right)} \quad (47) \qquad \zeta_1 = \frac{mv_0^2}{2g\left(1 + \frac{mv_0}{a}\right)} \quad (47')$$

Nous aurons ensuite pour la fin de la période :

$$m\beta_1^2 = 2g\zeta'_1 - n\int_0^{t_1} v\,dt \quad (48)$$

ou (49)

$$t_1 = \frac{2l}{a} \quad (49)$$

Retranchons cette équation de (46) et négligeons les termes en η_1^2, nous aurons :

$$m(\alpha_1^2 - \beta_1^2) = m\eta_1(\alpha_1 + \beta_1) = 2m\alpha_1\eta_1 = 2g(\zeta_1 - \zeta'_1) + n\int_0^{t_1} v\,dt$$

Mais dans la dernière intégrale nous pouvons, avec une approximation égale à celle à laquelle nous nous sommes arrêtés, remplacer v par sa valeur moyenne

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} = \alpha_1 - \frac{\eta_1}{2}$$

(¹) On a en effet à la fin d'une période :

$$v_{n-1} - v_n = \beta_{n-1} - \beta_n = \beta_{n-1} - \alpha_n + \alpha_n - \beta_n = \varepsilon_n + \eta_n,$$

$$v_0 - v_1 = v_0 - \alpha_1 + \alpha_1 - \beta_1 = \varepsilon_1 + \eta_1$$

et au début d'une période :

$$v_{n-1} - v_n = \alpha_{n-1} - \alpha_n = \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} + \beta_{n-1} - \alpha_n = \eta_{n-1} + \varepsilon_n .$$

$$v_0 - v_1 = v_0 - \alpha_1 = \varepsilon_1 .$$

(²) Ce qui doit avoir lieu si nous supposons les conditions réglées de façon que le coup de bélier initial garde une valeur modérée.

Nous aurons alors, en tenant compte de (44) et (49) :

$$2m\alpha_1\eta_1 = -2a\eta_1 + \frac{nl}{a}(2\alpha_1 - \eta_1)$$

d'où :

$$\eta_1 = \frac{\frac{nl\alpha_1}{a^2}}{1 + \frac{m\alpha_1}{a} + \frac{nl}{2a^2}} \quad (50)$$

L'équation (42) nous donnera ensuite, d'une façon semblable :

$$m\alpha_n^2 = 2g\zeta_n - n\int_0^{t_{n-1}} v\,dt$$

$$m\beta_n^2 = 2g\zeta'_n - n\int_0^{t_n} v\,dt$$

d'où on déduit :

$$m(\alpha_n^2 - \beta_n^2) = 2g(\zeta_n - \zeta'_n) + n\int_{t_{n-1}}^{t_n} v\,dt$$

$$m(\beta_{n-1}^2 - \alpha_n^2) = 2g(\zeta'_{n-1} - \zeta_n)$$

Négligeons de nouveau dans ces formules ε_n^2 et η_n^2, dans l'intégrale, remplaçons v par sa valeur moyenne $\frac{\alpha_n + \beta_n}{2} = \alpha_n - \frac{\eta_n}{2}$ et de plus remplaçons $\zeta'_n - \zeta_n$ et $\zeta'_{n-1} - \zeta_n$ par leurs valeurs (44) et (45), nous aurons :

$$2m\alpha_n\eta_n = -4a\left[\frac{1}{2}\eta_n - \eta_{n-1} + \eta_{n-2} \quad - (-1)^n\eta_1\right] + n\left(\alpha_n - \frac{\eta_n}{2}\right)\frac{2l}{a}$$

$$2m\beta_{n-1}\varepsilon_n = -4a\left[\frac{1}{2}\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-2} \quad - (-1)^n\varepsilon_1\right]$$

d'où on déduit :

$$\varepsilon_n = \frac{2(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n-2} + \quad + (-1)^n\varepsilon_1)}{1 + \frac{m}{a}\beta_{n-1}} \quad (51)$$

$$\eta_n = \frac{2(\eta_{n-1} - \eta_{n-2} + \quad + (-1)^n\eta_1) + \frac{nl}{a^2}\alpha_n}{1 + \frac{m}{a}\alpha_n + \frac{nl}{2a^2}} \quad (52)$$

Si nous considérons d'abord la première période, nous aurons pour le coup de bélier initial :

$$\zeta_1 = \frac{a}{g}\varepsilon_1 = \frac{mv_0^2}{2g\left(1 + \frac{mv_0}{a}\right)}$$

$$\zeta'_1 = \frac{a}{g}(\varepsilon_1 + \eta_1) = \frac{mv_0^2}{2g\left(1 + \frac{mv_0}{a}\right)} + \frac{\frac{nl\alpha_1}{ag}}{1 + \frac{m\alpha_1}{a} + \frac{nl}{2a^2}} \quad (50')$$

Nous avons vu que, si on néglige la dilatation du tuyau et la compression du liquide, le coup de bélier maximum a sa plus petite valeur pour :

$$mv_0 = \sqrt{nl}$$

et sa valeur est alors :

$$\frac{v_0\sqrt{nl}}{2g} \quad (53)$$

D'ailleurs, si on a :

$$\frac{m^2v_0^2}{nl} = 1 - \beta$$

ou aux termes en β^2 près :

$$mv_0 = \sqrt{nl}\left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \qquad (54)$$

Nous avons vu que le coup de bélier maximum était égal à (1) :

$$\zeta_m = \frac{v_0 \sqrt{nl}}{2g}\left[1 + \beta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right)\right]$$

ou :

$$\zeta_m = \frac{v_0 \sqrt{nl}}{2g}\left(1 + 0,1321\,\beta\right)$$

de sorte que si β est petit le coup de bélier conservera sensiblement la même valeur que pour $\beta = 0$. Nous venons d'ailleurs de voir que, si on adopte la théorie de M. Allievi, le coup de bélier à la fin de la première période est :

$$\frac{mv_0^2}{2g\left(1 + \frac{mv_0}{a}\right)} + \frac{\frac{nl}{ag}\,\alpha_1}{1 + \frac{m\alpha_1}{a} + \frac{nl}{2a^2}}$$

Mais si nous tenons compte de la relation (54), cette expression peut s'écrire

$$\frac{v_0 \sqrt{nl}\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)}{2g\left[1 + \frac{\sqrt{nl}}{a}\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\right]} + \frac{\frac{nl}{ag}\,(v_0 - \varepsilon_1)}{1 + \frac{m\,(v_0 - \varepsilon_1)}{a} + \frac{nl}{2a^2}}$$

Et si nous supposons, ce qui aura généralement lieu $\frac{\sqrt{nl}}{a}$ et β petit, nous pourrons prendre pour la partie principale de l'expression précédente :

$$\frac{v_0 \sqrt{nl}}{2g}\left[1 - \frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{nl}}{a} + \frac{2\sqrt{nl}}{a}\right] = \frac{v_0 \sqrt{nl}}{2g}\left(1 - \frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{nl}}{a}\right)$$

Si nous prenons alors :

$$\beta = 2\,\frac{\sqrt{nl}}{a} \qquad (55)$$

cette expression se réduira à $\frac{v_0 \sqrt{nl}}{2g}$, donc avec ce choix pour β le coup de bélier à la fin de la première période différera peu de la valeur (53) indiquée plus haut.

Nous déterminerons alors n par la condition que cette valeur (53) soit une fraction $\frac{1}{\mu}$ du coup de bélier s'il n'y avait pas de réservoir d'air, ce qui nous donnera comme plus haut :

$$\frac{v_0 \sqrt{nl}}{2g} = \frac{av_0}{\mu g}$$

d'où :

$$n = \frac{4a^2}{\mu^2 l} \qquad (27)$$

et par suite en vertu de (9) :

$$\lambda = \frac{g\mu^2 l\left(\frac{p_0}{\pi} + H\right)}{2a^2} \qquad (26)$$

n et λ étant déterminés de cette façon, nous déterminerons m par la formule (54) où β a la valeur (55), ce qui nous donne :

$$m = \frac{\sqrt{nl}}{v_0}\left(1 - \frac{\sqrt{nl}}{a}\right) \qquad (58)$$

(1) Formules (21) et (22).

m étant ainsi déterminé, la section s du tube joignant la conduite au réservoir se déduira de la formule (8) .

$$m = \frac{S^2}{s^2}\,(1 + \alpha) - 1$$

d'où :

$$s = S\sqrt{\frac{1 + \alpha}{1 + m}} \quad (59) \qquad\qquad d = D\sqrt[4]{\frac{1 + \alpha}{1 + m}}\ (^1) \quad (60)$$

formules dans lesquelles il conviendra généralement de prendre, comme nous l'avons dit, $\alpha = 0,3$.

Avec ce choix et quelle que soit la théorie que l'on adopte, le coup de bélier maximum différera peu de la valeur (53) (2).

Comme premier exemple, supposons, comme précédemment :

$$v_0 = 1, \quad \frac{p_0}{\pi} + H = 200, \quad a = 1250, \quad l = 500, \quad \mu = 10, \quad g = 10$$

Les formules (26) et (27) nous donnent alors :

$$n = 125 \qquad \lambda = 32$$

et par suite, si nous supposons comme plus haut, $q = 4$, nous aurons :

$$L = 2$$

Nous aurons ensuite par la formule (58) :

$$m = 200$$

puis, par la formule (60), en prenant $\alpha = 0,3$, pour le diamètre d de la tubulure reliant la conduite au réservoir :

$$d = D\sqrt[4]{\frac{1,3}{201}} = 0,2836\,D$$

Si, par exemple, $D = 0^m5$, on aurait $d = 0,1418$ (3). Dans ce cas, si on négligeait la dilatation du tuyau et la compression du liquide, les formules (22) et (55) nous donneront :

$$\zeta_m = \frac{v_0 \sqrt{nl}}{2g}\left(1 + 0,2642\,\frac{\sqrt{nl}}{a}\right) = \frac{250}{20}\left(1 + \frac{0,2642}{5}\right)$$

ou

$$\zeta_m = 13,16$$

Nous aurons d'ailleurs, dans la même hypothèse, pour le temps total T de la compression, par les formules (33) et (55) :

$$T = 2\sqrt{\frac{500}{125}}\left(1 + 0,132\,\frac{2\sqrt{125.500}}{1250}\right) = 4,2$$

Calculons maintenant, en conservant les mêmes valeurs de m et de n, par la méthode indiquée plus haut, les coups de bélier successifs au commencement et à la fin de chaque période.

Nous aurons d'abord pour la première période par les formules (47), (47'), (50), (50') :

$$\varepsilon_1 = 0,069 \qquad \alpha_1 = 1 - \varepsilon_1 = 0,931 \qquad \zeta_1 = 8,625$$
$$\eta_1 = 0,032 \qquad \beta_1 = \alpha_1 - \eta_1 = 0,899 \qquad \zeta'_1 = 12,625$$

(1) D étant le diamètre de la conduite et d celui de la tubulure reliant cette conduite au réservoir.

(2) Remarquons d'ailleurs que dans ces formules on peut, vu le degré d'approximation à obtenir, prendre :

$$g = 10, \quad \frac{p_0}{\pi} = 10$$

(3) En comparant ce résultat à celui donné plus haut ($d = 0,134$), on voit que si on tient compte, ainsi que nous venons de le dire, de la dilatation, on est conduit à augmenter de 8 mm. environ le diamètre de la tubulure.

Puis successivement pour les périodes suivantes, par les formules (51), (52), (44), (45) :

$$\begin{array}{lll}
\varepsilon_2 = 0,12 & \alpha_2 = \beta_1 - \varepsilon_2 = 0,779 & \zeta_2 = 10,35 \\
\eta_2 = 0,08 & \beta_2 = \alpha_2 - \eta_2 = 0,70 & \zeta'_2 = 12,30 \\
\varepsilon_3 = 0,092 & \alpha_3 = \beta_2 - \varepsilon_3 = 0,608 & \zeta_3 = 11,05 \\
\eta_3 = 0,108 & \beta_3 = \alpha_3 - \eta_3 = 0,500 & \zeta'_3 = 12,35 \\
\varepsilon_4 = 0,076 & \alpha_4 = \beta_3 - \varepsilon_4 = 0,424 & \zeta_4 = 11,60 \\
\eta_4 = 0,126 & \beta_4 = \alpha_4 - \eta_4 = 0,298 & \zeta'_4 = 12,35 \\
\varepsilon_5 = 0,067 & \alpha_5 = \beta_4 - \varepsilon_5 = 0,231 & \zeta_5 = 11,975 \\
\eta_5 = 0,134 & \beta_5 = \alpha_5 - \eta_5 = 0,097 & \zeta'_5 = 12,225 \\
\varepsilon_6 = 0,063 & \alpha_6 = \beta_5 - \varepsilon_6 = 0,034 & \zeta_6 = 12,1 \\
\eta_6 = 0,134 & \beta_6 = \alpha_6 - \eta_6 = -0,10 &
\end{array}$$

v devient donc nul pendant la sixième période. On a d'ailleurs pour la durée t_1 d'une période :

$$t_1 = \frac{2l}{a} = \frac{1000}{1250} = 0,8$$

de sorte que :

$$6t_1 = 4^s,8 \qquad\qquad 5t_1 = 4^s$$

La vitesse s'annule donc au bout de $4^s,2$ environ.

Comme on le voit, ces résultats diffèrent fort peu de ceux obtenus plus haut en négligeant la dilatation du tuyau et la compression du liquide.

Nous remarquerons même que ces résultats diffèrent encore moins, en ce qui concerne la pression, de ceux, plus simples, obtenus en calculant toujours m par la formule (58) :

$$m = \frac{\sqrt{nl}}{v_0}\left(1 - \frac{\sqrt{nl}}{a}\right)$$

dans laquelle n a toujours la valeur (9), et en calculant ensuite ζ_m et T (1) par les formules (22') et (31) :

$$\zeta_m = \frac{\sqrt{nl}}{2g} v_0 \tag{22}$$

$$T = \frac{2l}{mv_0} \tag{31}$$

On trouverait en effet dans le cas actuel par ces formules :

$$\zeta_m = 12,50 \qquad\qquad T = 5$$

Supposons comme second exemple :

$$v_0 = 0,8 \quad l = 730 \quad H = 360 \quad a = 1200 \quad \mu = 10\ (2)$$

Nous aurons alors par les formules (56) et (57) :

$$n = 79 \qquad\qquad \lambda = 93,7$$

D'où, si nous supposons, comme plus haut, $\sigma = 16\,S$:

$$L = \frac{\lambda}{16} = 5,9$$

On a ensuite par la formule (58) :

$$m = 240$$

puis par la formule (60) :

$$d = D\sqrt[4]{\frac{1+\alpha}{1+m}} = 0,271\,D$$

Nous aurons ensuite, en négligeant toujours la dilatation du tuyau et la compression du liquide, par les formules (22) et (55) :

$$\zeta_m = \frac{v_0\sqrt{nl}}{2g}\left(1 + 0,2642\,\frac{\sqrt{nl}}{a}\right)$$

Mais ici :

$$\frac{v_0\sqrt{nl}}{2g} = 9,6$$

de sorte que la formule précédente donne :

$$\zeta_m = 10,113$$

On a ensuite pour le temps de la compression :

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{n}}\left(1 + 0,264\,\frac{\sqrt{nl}}{a}\right) = 2\sqrt{\frac{l}{n}} + 0,528\,\frac{l}{a}$$

ce qui donne ici :

$$T = 6^s,4$$

Si nous calculons maintenant, en suivant la méthode de M. Allievi, de la façon que nous avons indiquée, les coups de bélier successifs au début et à la fin de chaque période ; en conservant pour m et n les mêmes valeurs, et prenant toujours, pour simplifier les calculs $g = 10$, nous aurons :

$$\begin{array}{lll}
\varepsilon_1 = 0,055 & \alpha_1 = v_0 - \varepsilon_1 = 0,745 & \zeta_1 = 6,6 \\
\eta_1 = 0,025 & \beta_1 = \alpha_1 - \eta_1 = 0,720 & \zeta'_1 = 9,6 \\
\varepsilon_2 = 0,096 & \alpha_2 = \beta_1 - \varepsilon_2 = 0,624 & \zeta_2 = 7,92 \\
\eta_2 = 0,066 & \beta_2 = \alpha_2 - \eta_2 = 0,558 & \zeta'_2 = 9,84 \\
\varepsilon_3 = 0,074 & \alpha_3 = \beta_2 - \varepsilon_3 = 0,484 & \zeta_3 = 8,88 \\
\eta_3 = 0,091 & \beta_3 = \alpha_3 - \eta_3 = 0,393 & \zeta'_3 = 9,96 \\
\varepsilon_4 = 0,061 & \alpha_4 = \beta_3 - \varepsilon_4 = 0,332 & \zeta_4 = 9,36 \\
\eta_4 = 0,104 & \beta_4 = \alpha_4 - \eta_4 = 0,228 & \zeta'_4 = 9,84 \\
\varepsilon_5 = 0,053 & \alpha_5 = \beta_4 - \varepsilon_5 = 0,175 & \zeta_5 = 9,48 \\
\eta_5 = 0,109 & \beta_5 = \alpha_5 - \eta_5 = 0,066 & \zeta'_5 = 9,60 \\
\varepsilon_6 = 0,049 & \alpha_6 = \beta_5 - \varepsilon_6 = 0,017 & \zeta_6 = 9,48 \\
\eta_6 = 0,108 & \beta_6 = \alpha_6 - \eta_6 = 0,091 &
\end{array}$$

La vitesse de l'eau dans la conduite devient donc nulle à la fin de la 6e période. On a d'ailleurs pour la durée d'une période :

$$t_1 = \frac{2l}{a} = 1,217$$

donc :

$$T = 6^s,28$$

On trouve donc pour le coup de bélier maximum 9,96, et pour la durée de la compression $6^s,3$. Résultats qui diffèrent peu de ceux obtenus précédemment en négligeant la dilatation du tuyau et la compression du liquide. Nous serions arrivés à des résultats ne différant guère plus, au moins pour la pression, de ceux-ci, si, comme dans l'exemple précédent, nous prenions pour ζ_m et T les valeurs déduites des formules (22') et (31), on obtiendrait en effet ainsi (1) :

$$\zeta_m = \frac{\sqrt{nl}}{2g} v_0 = 9,6 \qquad\qquad T = \frac{2l}{mv_0} = 7,6$$

IV

Résumé et Conclusions

Comme nous l'avons dit en commençant, les réservoirs d'air établis dans les conditions que nous avons fait con-

(1) Qui correspondent au cas où $m^2 v_0^2 = nl$.

(2) Nous prenons d'ailleurs $\frac{p_0}{\varpi} = g = 10$

(1) La valeur de m étant toujours calculée par la formule (58) :

$$m = \frac{\sqrt{nl}}{v_0}\left(1 - \frac{\sqrt{nl}}{a}\right)$$

naître, conditions qui permettent de réduire de moitié leur volume pour une valeur donnée du coup de bélier maximum, peuvent rendre de grands services dans le cas des débits moyens et des hauteurs de chute ne dépassant pas 300 à 400 mètres.

Leur emploi paraît spécialement indiqué pour les moteurs alimentés par un réservoir contenant une quantité limitée d'eau et en particulier dans le cas d'une accumulation hydraulique.

Ce dispositif présente en effet l'avantage de n'occasionner aucune perte d'eau, ce qui n'est pas le cas pour les *by pass* ou vannes compensées.

Ceci dit, voici comment il y aura à établir le réservoir d'air pour obtenir les résultats les plus avantageux, les lettres qui figurent dans les formules ayant les significations suivantes :

l longueur de la conduite.
D diamètre de la conduite supposée circulaire.
Δ diamètre du réservoir supposé cylindrique.
$q = \frac{\Delta}{D}$ rapport du diamètre du réservoir à celui de la conduite ; on suppose $q > 1$.
H hauteur de chute.
p_0 pression atmosphérique en hauteur d'eau.
π poids spécifique du liquide.
g gravité (1).
L longueur du réservoir d'air.
v_0 vitesse de l'eau dans la conduite à l'état de régime.
a vitesse de propagation.

Dans le cas d'une fermeture brusque, le coup de bélier est égal, d'après M. Allievi, à $\frac{a v_0}{g}$ soit, en prenant comme nous l'avons dit, $g = 10$, à $\frac{a v_0}{10}$

Nous supposons qu'on veuille un réservoir d'air qui réduise, dans le cas d'une fermeture brusque, le coup de bélier à $\frac{1}{\mu}$ de la valeur précédente, soit à

$$\frac{a v_0}{10 \mu}$$

On devra, dans ce cas, en prenant ainsi que nous le supposons, $\frac{p_0}{\pi} = 10$ adopter pour la longueur L du réservoir :

$$L = \frac{5 \mu^2 l (H + 10)}{a^2 q^2}$$

On calculera ensuite n et m par les formules suivantes :

$$n = \frac{4 a^2}{\mu^2 l}$$

$$m = \frac{\sqrt{nl}}{v_0}\left(1 - \frac{\sqrt{nl}}{a}\right) = \frac{2a}{\mu v_0}\left(1 - \frac{2}{\mu}\right)$$

On reliera alors la conduite au réservoir par un tuyau plus étroit de diamètre d donné par la relation :

$$d = D \sqrt[4]{\frac{1 + \alpha}{1 + m}}$$

formule dans laquelle on pourra prendre $\alpha = 0{,}3$.

(1) Pour simplifier les calculs nous avons pris $g = \frac{p_0}{\pi} = 10$.

Ceci étant le coup de bélier maximum sera sensiblement égal à $\frac{a v_0}{\mu g}$ soit, avec l'approximation convenue, à

$$\frac{a v_0}{10 \mu}$$

De plus la vitesse de l'eau dans la conduite deviendra nulle au bout d'un temps T donné approximativement par la formule :

$$T = \frac{2l}{m v_0} = \frac{\mu l}{a\left(1 - \frac{2}{\mu}\right)}$$

Enfin à ce moment, la moitié environ de la force vive possédée par l'eau de la conduite au début, aura été détruite, ce qui, en annulant rapidement les oscillations de l'eau, facilitera le réglage et supprimera les chances de résonnances.

Si la conduite se compose de parties de diamètres différents, on devrait prendre :

$$l = l_1 + l_2 \frac{D_2^2}{D^2} + l_3 \frac{D_3^2}{D^2} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

où l_1 est la longueur de la partie inférieure de la conduite, D son diamètre, l_2, la longueur de la partie suivante, et D_2 son diamètre, et ainsi de suite.

Remarque. — Comme nous l'avons dit, le dispositif que nous avons indiqué semble devoir être particulièrement avantageux dans le cas d'une accumulation hydraulique.

En effet, si on emploie l'accumulation hydraulique, il y aura avantage, toutes les fois que ce procédé sera possible, à y avoir recours à la station réceptrice et non pas à la station génératrice.

Soit, en effet, n le rendement de l'appareil moteur et pompe, destiné à élever l'eau, n_1 celui de l'appareil, turbine et dynamo, destiné à transformer en énergie électrique l'énergie potentielle de l'eau du réservoir, rendements que nous supposons être les mêmes, quel que soit le point où est établi l'accumulateur hydraulique, et m le rendement de la ligne. Une quantité A d'énergie disponible à la station génératrice donnera toujours une quantité Ann_1m d'énergie supplémentaire disponible au point d'arrivée.

En effet, si l'accumulation a lieu à la station génératrice, la quantité A d'énergie disponible permettra d'en accumuler une quantité nA à l'état potentiel dans le réservoir qui en produira une égale à n_1nA à l'origine de la ligne, et une mn_1nA à l'arrivée. Si, au lieu de cela, l'accumulation a lieu à la station réceptrice, la quantité A d'énergie sera réduite à mA à son arrivée à cette station et elle permettra d'en accumuler dans le réservoir une quantité nmA à l'état potentiel, quantité qui en produira une égale à n_1nmA lorsqu'on l'aura de nouveau transformée en énergie électrique.

Toutefois, si le rendement est le même dans les deux cas, l'accumulation à la station réceptrice présente deux avantages importants :

1° Dans le premier cas, celui de l'accumulation à la station génératrice, la ligne devra être calculée de façon à pouvoir transporter, au moment des pointes, non seulement l'énergie totale que peut produire, en l'unité de temps, la station génératrice, mais en plus l'énergie supplémentaire que l'on demandera à ce moment à l'accumulation hydraulique ; au lieu de cela dans le second cas, la ligne travaillera toujours à pleine charge et devra transporter seulement l'énergie totale que peut produire la station génératrice en l'unité de temps. Or, comme la ligne doit être calculée sur l'énergie maxima qu'elle doit avoir à transporter à un moment donné, elle sera moins coûteuse dans le second cas que dans le premier.

2° Dans le premier cas, pour une quantité A d'énergie disponible, on devra en accumuler, à l'état d'énergie potentielle, dans l'eau du réservoir, une quantité nA, tandis que dans le second cette énergie à accumuler sera seulement égale à mnA, et par suite le réservoir sera notablement plus petit, surtout si la ligne est longue et par suite m grand

Il résulte de cette remarque que l'accumulation devant avoir lieu, lorsque cela est possible, à chaque station réceptrice, on se trouvera, en général, dans le cas où un réservoir d'air peut être le plus utilement employé, car pour chacune de ces accumulations partielles le débit ne sera pas très considérable.

(A suivre.)

ÉLECTROCHIMIE

LA FABRICATION INDUSTRIELLE DE L'AZOTE PUR [1]

On sait que le problème tant cherché de la fixation de l'azote atmosphérique a reçu dans ces dernières années deux solutions intéressantes, dès à présent exploitées sur une très grande échelle : l'une réalise la fixation sous forme d'oxydes d'azote par l'électrisation directe des gaz de l'air ; l'autre consiste dans l'absorption de l'azote par le carbure de calcium chauffé au rouge.

Les résultats acquis dans cette seconde voie surtout paraissent remarquables et ont ouvert très opportunément un débouché considérable à l'industrie congestionnée du carbure. Que la cyanamide formée soit employée telle quelle comme engrais, ou que, décomposée par la vapeur d'eau sous pression, elle serve de point de départ à la fabrication de l'ammoniaque, toujours est-il que les usines récentes, dont la puissance de production annuelle n'est pas très éloignée de 100 000 tonnes, arrivent à fixer jusqu'à 400 kilog. d'azote par cheval et par an.

La fixation sous forme d'acide nitrique, elle, ne conduit guère encore qu'à 100 kilog. d'azote par cheval et par an, et il semble très désirable pour l'avenir de cette industrie qu'on se préoccupe à brève échéance des larges possibilités d'amélioration conférées par l'emploi de l'air suroxygéné.

Plus diligente que sa concurrente, l'industrie de la cyanamide a déjà fait un large appel à celle de la liquéfaction de l'air. Pour l'obtention des torrents d'azote qui lui étaient nécessaires, les procédés chimiques ne se sont en effet montrés à la hauteur de la tâche ni au point de vue de la puissance de production ni à celui du bon marché ; au surplus, des procédés qui, comme ceux basés sur la liquéfaction de l'air, ne requièrent que de l'énergie paraissent s'imposer dans une industrie dont la caractéristique est justement l'emploi de forces motrices énormes.

Il est vrai que le problème posé par l'industrie de la cyanamide aux techniciens de l'air liquide était particulièrement difficile. C'est une pureté de 99,6 pour 100 qui lui est nécessaire, ou plus exactement, l'azote livré ne doit pas tenir plus de 0,4 pour 100 d'oxygène, faute de quoi, entre autres inconvénients, les électrodes en charbon des fours à cyanamide sont brûlées rapidement. Aujourd'hui même, l'industrie de la cyanamide est plus exigeante encore et c'est du 99,75 pour 100 que doivent fournir les appareils.

De ce problème que j'ai été tenté tout d'abord de juger insoluble, la première solution a été fournie par un procédé imaginé simultanément dès 1903 par l'éminent professeur Linde et par mon collaborateur R. Lévy. Ce procédé, mis au point par le professeur Linde, a donné des résultats remarquables qui ont justifié son emploi immédiat dans un grand nombre d'installations.

Dans ce procédé, l'air traité est liquéfié en une seule masse à 21 pour 100 d'oxygène et sa liquéfaction provoque la vaporisation d'oxygène liquide. De l'oxygène vaporisé, le 1/5 environ est extrait de l'appareil, tandis que les 4/5 restant montent dans la colonne de rectification qui surmonte l'appareil, en sens inverse et au contact du liquide à 21 pour 100 déversé vers le haut. L'oxygène est retenu par le liquide laveur, mais seulement jusqu'à concurrence d'une teneur finale de 7 pour 100 correspondante aux 21 pour 100 du liquide laveur. L'azote qui s'échappe tient donc nécessairement encore 7 pour 100 d'oxygène, et ne semble pas que la méthode puisse arriver à mieux.

Mais par un artifice extrêmement ingénieux, une partie, le 1/3 environ, de cet azote impur est, après réchauffement dans des échangeurs, comprimé vers 4 à 5 atmosphères, desséché puis refroidi à travers un échangeur et liquéfié de nouveau dans le vaporisateur à oxygène liquide. On obtient ainsi un liquide très riche en azote qui, conformément à mon procédé ordinaire [1], est déversé au sommet de la colonne de rectification et soumet le gaz à 7 pour 100 de la première rectification à une rectification complémentaire qui en abaisse beaucoup la teneur en oxygène. On n'est pas encore ainsi au but cependant, car le liquide laveur à 7 p. 100 ne peut rectifier théoriquement que jusqu'à 1 pour 100 au plus. Mais les choses se modifient bientôt d'elles-mêmes, car le gaz rectifié à 1 ou 2 pour 100, repris à son tour par le compresseur, fournit par sa liquéfaction un liquide beaucoup plus pauvre en oxygène et ainsi de suite, en sorte qu'automatiquement la teneur de l'azote tend vers la pureté absolue et qu'il n'est pas rare de voir les appareils Linde donner de l'azote absolument pur.

Dans mon cas, le problème paraissait bien plus simple. On sait en effet que dans mon procédé l'azote liquide nécessaire à la rectification finale est obtenu avec une extrême simplicité par la condensation progressive et méthodique de l'air traité grâce au dispositif du *retour en arrière.* En principe, ce procédé réalise la séparation intégrale de l'air en oxygène pur et azote pur. En pratique, le liquide laveur de nos appareils courants renferme encore 4 à 5 % d'oxygène et il est en trop petite proportion pour obtenir l'effet voulu, parce que l'azote résiduel ne se condense que difficilement dans l'oxygène liquide ; de sorte que je n'arrivais couramment qu'à de l'azote à 2 ou 3 pour 100.

Après de nombreux essais, je suis arrivé à faire en sorte que la teneur de l'azote résiduel au sommet des tubes du faisceau de retour en arrière, pour une liquéfaction de moins de moitié, n'est pas moindre de 99,6 pour 100, tant est parfaite l'exactitude des phénomène de condensation progressive et de rectification qui s'y passent. D'autre part, j'ai facilité la liquéfaction de cet azote résiduel en la produisant non plus dans le bain d'oxygène, mais dans des liquides un peu plus froids, ceux qui circulent dans le bas de la colonne de rectification.

[1] Note de M. Georges CLAUDE, présentée à l'*Académie des Sciences* par M. D'ARSONVAL, séance du 23 octobre 1911.

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 20 novembre 1905.