CALCUL
DES
TUBES A SECTION ELLIPTIQUE
soumis à une pression intérieure

Cette note de calcul n'est qu'un aperçu sur une question d'un intérêt réel, bien que très spéciale.
Evidemment, pour tout tube soumis à une pression intérieure, la forme circulaire est plus avantageuse que toute autre.
Néanmoins, certains robinets-vannes présentent une section ovale et leur calcul offre des difficultés telles, que seul l'essai sous pression permet de vérifier la résistance.
Il sera facile aux praticiens que la question intéressera, de déterminer les épaisseurs et les nervures, en vue d'utiliser le poids minimum de métal.
Le calcul restant à faire, tombe, en effet, dans le démaine de la flexion simple.

Le calcul de ce genre de tube, qui se fait généralement par des procédés ampiriques, pourrait être conduit d'une façon plus exacte sans grosse difficulté.

Deux modes de calcul s'offrent, tous deux approchés d'ailleurs, mais suffisamment exacts pour les besoins de la pratique.

1° Mode de Calcul

Considérons une conduite elliptique de $\frac{1}{2}$ axes : a et b soumise à une pression intérieure p.

Considérons le 1/4 de l'ellipse AB en équilibre (figure 1).

Le moment fléchissant en A est : M=MA. Ce moment est dû à la pression intérieure qui tend à ramener la section elliptique à la forme circulaire. La pression de A à une section quelconque M est égale sensiblement à $p\,s$, en appelant s la corde AM et cette pression est appliquée au milieu de AM.

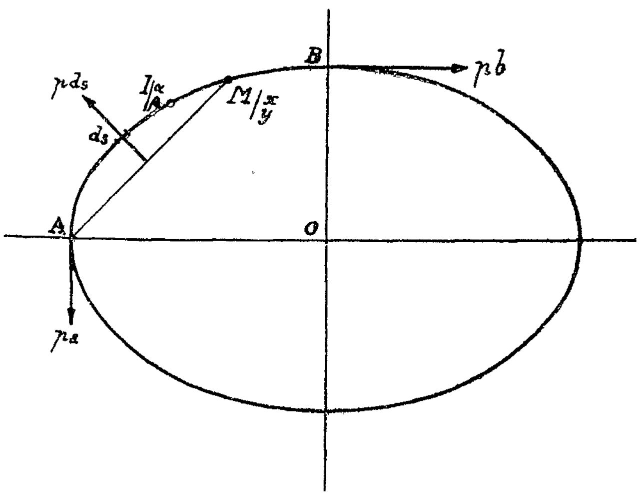

Fig. 1

Enfin, la pression intérieure produit en A une extension pa et en B une extension pb.

Le moment fléchissant en $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ est :

$$M = MA - pa\ (a-x) + \frac{ps^2}{2}$$

et, d'après l'équation de l'ellipse : $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\ (a^2 - x^2)$

donc :

$$s^2 = (a-x)^2 + y^2 = (a-x)\left[(a-x) + \frac{b^2}{a^2}(a+x)\right]$$

$$= \frac{a-x}{a^2}\left[a^2\ (a-x) + b^2\ (a+x)\right]$$

D'où :

$$M = MA - \frac{p\ (a-x)}{2}\left[2\ a - (a-x) - \frac{b^2}{a^2}(a+x)\right]$$

$$M = MA - \frac{p\ (a-x)}{2}\left[(a+x) - \frac{b^2}{a^2}(a+x)\right]$$

$$M = MA - \frac{p\ (a^2-x^2)}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)$$

Comme $a^2 - x^2 = \frac{a^2\,y^2}{b^2}$, il vient :

$$M = MA - \frac{pa^2\,y^2}{2\,b^2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right) = MA - \frac{py^2}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)$$

Posons enfin : $\frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = K^2$

Il vient : $M = MA - \frac{py^2\,K^2}{2}$

Pour déterminer MA, il suffit de remarquer que les deux sections A et B restent rectangulaires après la flexion.

D'où l'équation : $\int_A^B \frac{M\ ds}{EI} = 0$

Remplaçons M par sa valeur. Il vient :

$$\int_A^B MA\ ds - \frac{p\,K^2}{2}\int_A^B y^2\,ds = 0$$

Or, en appelant : r un rayon moyen de la section : $r = \frac{a+b}{2}$, il vient :

$$\int_A^B ds = \frac{\pi r}{2} \qquad \int_A^B y^2\,ds = \frac{\pi r^3}{4}$$

D'où : $M_A\ \frac{\pi r}{2} = \frac{pr^2}{2}\frac{\pi r^3}{4}$

$$M_A = \frac{pK^2\,r^2}{4}$$

En remplaçant cette valeur M_A, il vient :

$$M = \frac{pK^2}{4}\ (r^2 - 2\,y^2)$$

Ce moment est maximum en A, en B, il vaut sensiblement la moitié. Enfin, il s'annulle pour $y = \frac{r}{\sqrt{2}} = r \sin 45°$, c'est-à-dire suivant les bissectrices des axes.

L'équarissage de la conduite doit donc être déterminé en A. En appelant e l'épaisseur de la conduite, on a :

$$\frac{I}{n} = \frac{e^2}{6} = \frac{M}{R} = \frac{pK^2r^2}{4\,R}$$

$e = Kr\sqrt{\frac{1{,}5\,p}{R}}$ formule qui donne l'épaisseur.

Exemple : Pour $p=20$ kgs cm², $R=800$ kgs cm² (fonte aciérée) :

$$b=0^m45.$$
$$a=0^m90.$$

On a $r = \frac{a+b}{2} = 67$ cm.

$$K = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b}} = 1{,}73.$$

D'où $e = 1{,}73 \times 67 \times \sqrt{\frac{1{,}5 \times 20}{800}} = 22$ cm.

Dans ce calcul, on n'a pas tenu compte de l'effort d'extension facile à évaluer. Cet effort en M a deux composantes :

$$X = py$$
$$Y = px$$

sa valeur est donc, en projetant sur la tangente en M :

$$N = py \cos \alpha + px \sin \alpha.$$

L'équation de l'ellipse donne : $tg\ \alpha = y' = \frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$

D'où : $\sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{bx}{a\sqrt{a^2-e^2x^2}}$

en posant $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

De même $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{a\sqrt{a^2-e^2x^2}}$

D'où : $N = \frac{p\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad a\sqrt{a^2-x^2} + pbx^2}{a\sqrt{a^2-e^2x^2}}$

$$N = \frac{pab}{\sqrt{a^2-e^2x^2}}$$

Cet effort est maximum en A, mais son influence sur la répartition des moments peut être négligée et il suffit de vérifier si le travail résultant en A ne dépasse pas la limite admise.

Dans l'exemple choisi, on a : $pa = 20 \times 90 = 1.800$ kgs. Le travail moléculaire est augmenté de $\frac{1800}{22} = 82$ kgs. Donc, du 10 % environ.

2° Méthode de calcul

On peut encore traiter le problème plus exactement de la façon suivante, mais toujours en négligeant, en première approximation, l'effort d'extension.

Considérons encore le 1/4 d'ellipse (figure 2). Le moment résultant des pressions agissant sur l'arc AM, par rapport au point M, est :

$$\int_A^M pds.d$$

Appelons α, β les coordonnées d'un point quelconque I de l'arc AM.

Nous pouvons poser :

$$\alpha = a \cos t.$$
$$\beta = b \sin t.$$

$$ds = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2} = a\sqrt{1-e^2 \cos^2 t}\ dt.$$

D'autre part, l'équation de la normale à l'ellipse en I est :

$$(X-\alpha)\ \alpha' + (Y-\beta)\ \beta' = 0.$$

Soit $-a X \sin t + b Y \cos t + (a^2-b^2) \sin t \cos t = 0.$

La distance d de M à cette normale est, en posant $c^2 = a^2 - b^2$

$$d = \frac{ax \sin t - by \cos t - c^2 \sin t \cos t}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t}}\ dt$$

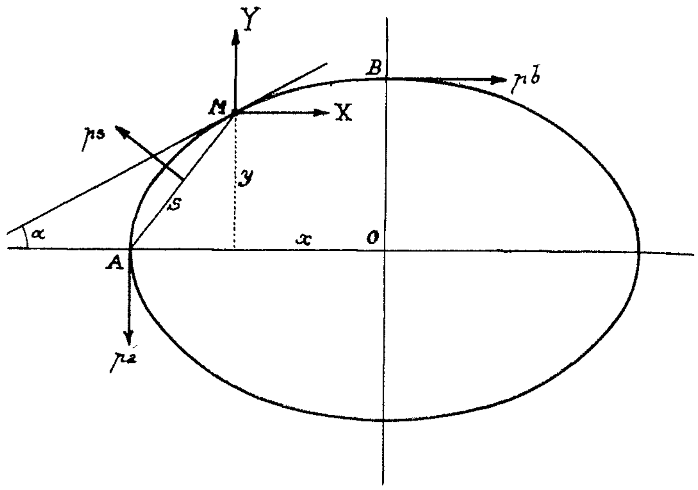

Fig. 2

Le moment résultant, par rapport à M des pressions pds est donc :

$$p\int_A^M \frac{a\sqrt{1-c^2\cos^2 t}\ (ax \sin t - by \cos t - c^2 \sin t \cos t)}{\sqrt{a^2-c^2\cos^2 t}}\ dt$$

$$= p\int_0^{\arcsin\frac{y}{b}} (ax \sin t - by \cos t - \frac{c^2}{2} \sin 2t)\ dt$$

$$= p\left[-by \sin t - ax \cos t + \frac{c^2}{4} \cos 2t\right]_0^{\arcsin\frac{y}{b}}$$

$$= d\left[\frac{ax}{b}(b - \sqrt{b^2-y^2}) - \frac{c^2y^2}{2b^2} - y^2\right]$$

$$= p\left[x(a-x) - \frac{2b^2+c^2}{2a^2}(a^2-x^2)\right]$$

D'où finalement : $\int_A^M pd.\ ds = \frac{p(a-x)}{2a^2}\left[c^2 x - a(a^2+b^2)\right]$

L'expression du moment fléchissant en M est donc exactement :

$$M = \frac{p(a-x)}{2a^2}\left[c^2 x - a(a^2+b^2)\right] - pa(a-x) + M_A$$

$$M \quad MA - \frac{p(a-x)}{2a^2}\left[2a^3 - c^2 x - a(a^2+b^2)\right]$$

$$M = MA - \frac{pe^2}{2}(a-x)^2$$

On détermine ensuite MA par la même condition que dans le premier mode de calcul, c'est-à-dire par l'équation :

$$\int_A^B M ds = \int_A^B M_A\ ds - \frac{pe^2}{2}\int_A^B (a-x)^2\ ds = 0.$$

$$\text{D'ou } M_A = \frac{pe^2}{2}\frac{\int_A^B (a-x)^2\ ds}{\int_A^B ds}$$

Calculons ces intégrales.

Nous avons :

$$\int_A^B ds = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\ dt$$

$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{e^2}{2}\cos^2 t - \frac{e^4}{8}\cos^4 t + \ldots\ldots\right) dt$$

Comme e est sûrement <1, en arrêtant au troisième terme), l'erreur est de l'ordre du $\frac{1}{100}$. On a donc pratiquement :

$$\int ds = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{e^2}{2}\cos^2 t - \frac{e^4}{4}\cos^4 t\right) dt = \frac{\pi a}{2}\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64}\right)$$

Cette valeur étant par excès, nous prendrons :

$$\int ds = \frac{\pi a}{2}\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{e^4}{20}\right)$$

Calculons l'intégrale du numérateur.
Nous aurons, en posant : $x = a$ Cos t.

$$\int (a - x)^2\ ds = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos t)^2 . \left(1 - \frac{e^2}{2}\cos^2 t\right) dt$$

$$= a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos t + \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)\cos^2 t + e^2\cos^3 t - \frac{e^2}{2}\cos^4 t\right) dt$$

$$= a^3\left[\frac{\pi}{32}(24 - 7e^2) - \frac{2}{3}(3 - e^2)\right]$$

D'où : $\quad M_A = \frac{pe^2 a^2 K^2}{2}$, en posant

$$K^2 = \frac{\frac{\pi}{32}(24 - 7e^2) - 2/3\,(3 - e^2)}{\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{e^4}{20}\right)}$$

et en remplaçant dans l'expression du moment, il vient :

$$M = M_A - \frac{pe^2}{2}(a - x)^2 = \frac{pe^2}{2}\left[a^2 K^2 - (a - x)^2\right]$$

Si $K > 1$, le moment est encore maximum pour $x = a$, c'est-à-dire en A, et minimum en B pour : $x = 0$.
Ces conclusions sont inversées, si $K < 1$.

On a toujours : $\left\{\begin{aligned} M_A &= \frac{pe^2}{2} a^2 K^2 \\ M_B &= \frac{pe^2 a^2}{2}(K^2 - 1)\end{aligned}\right.$

En appelant donc h l'épaisseur du tube constante, on a

$$\frac{h^2}{6} = \frac{M_{max}}{R} = \frac{pe^2 a^2}{2R} \times K^2 \text{ ou } = \frac{pe^2 a^2}{2R}(1 - K^2)$$

d'où $\quad h \left\{\begin{aligned} &= aeK\sqrt{\frac{3p}{R}} \\ &= ae\sqrt{1 - K^2}\sqrt{\frac{3p}{R}}\end{aligned}\right.$

suivant que R est > 1 ou < 1.

Cette formule est de même forme que celle trouvée par la première méthode.

Application. — Prenons le même exemple que plus haut. Nous avons :

$$a = 0^m90$$
$$b = 0^m45$$

$$e^2 = \frac{\overline{90}^2 - \overline{45}^2}{\overline{90}^2} = 0{,}45 \qquad e = 0{,}865$$

Calculons

$$K^2 = \frac{0{,}10\,(24 - 5{,}25) - 2/3\,(3 - 0{,}75)}{1{,}57\left(1 - \frac{0.75}{4} - \frac{0{,}56}{20}\right)} = 0{,}312$$

D'où : $\quad 1 - K^2 = 0{,}68 \qquad \sqrt{1 - K^2} = 0{,}825$

Il vient : $h = \frac{90 \times 0\ 82 \times 0.865\sqrt{60}}{\sqrt{800}} = 17 \text{ cm } 2$

Le résultat trouvé par cette deuxième méthode, plus exacte, est donc plus faible, et c'est cette méthode qui doit être conservée.

La valeur du travail moléculaire produit par l'extension est :

$$\frac{pa}{h} = \frac{20 \times 90}{27{,}2} = 104 \text{ klg cm}^2$$

Le travail moléculaire résultant est donc celui admis, majoré de 13 %.

On peut évidemment réaliser une légère économie de métal en nervurant le tube intérieurement pour renforcer le module d'inertie de la section longitudinale.

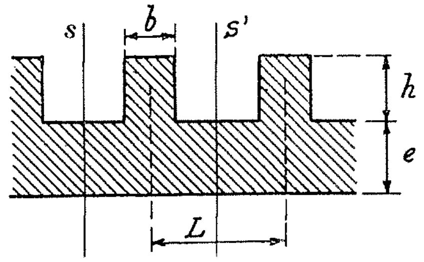

Fig. 3

En appelant L l'écartement des nervures, h leur hauteur, b leur largeur, l l'épaisseur du tube proprement dit (fig. 3), on doit avoir, en considérant la portion en T comprise entre les sections S et S'

$$\frac{I}{n} = \frac{M_{max}}{R} = \frac{pe^2 a^2\sqrt{1 - K^2}}{2R}$$

Il est rationnel alors de se fixer l, b, h et de tirer L d'une équation d'équarissage longue à poser, mais sans difficultés.

Disons enfin qu'il serait possible de réaliser la forme d'égale résistance sans ou avec nervures, en remarquant que les moments fléchissants en B et A sont entre eux dans un rapport connu, qui est dans le cas de l'exemple : $\frac{1 - K^2}{K^2}$

Les épaisseurs en B et A pourraient être prises dans le rapport $\frac{\sqrt{1 - K^2}}{K}$, mais alors toute la théorie précédente tombe en défaut, car elle suppose le tube d'égale épaisseur et il y aurait alors à craindre une majoration d'ensemble de tous les moments sans aucun moyen de contrôle.

G. Prudon,
Ingénieur,
Chargé de Conférences à l'Institut Polytechnique de Grenoble.