

Calcul des Barrages-Voûtes

Par GEORGES PRUDON, Ingénieur, Professeur à l'Institut Polytechnique de Grenoble

Différentes méthodes de calcul, concernant les barrages arqués, ont été proposées par les auteurs les plus qualifiés et les plus compétents. Mais tous s'accordent à reconnaître que ce calcul est, en toute rigueur, absolument impossible.

Les uns admettent que la forme en arc ne joue qu'un rôle secondaire et que le barrage travaille surtout comme un mur rectiligne s'opposant par son poids à la poussée, c'est l'ancienne théorie classique.

D'autres, principalement en Amérique, considèrent la poussée comme supportée par des arcs horizontaux encastrés aux culées, le mur n'intervenant plus. Il est évident que le barrage arqué travaille à la fois comme mur et comme arc, mais la détermination exacte de la part de poussée supportée respectivement par le mur et par l'arc est parfaitement impossible dans les cas pratiques.

Il faut remarquer d'ailleurs que les efforts thermiques produits par les variations de température produisent des efforts plus considérables que la poussée de l'eau. Donc toute détermination exacte devient illusoire.

Nous nous proposons dans cette note d'expliquer :

- 1° Une méthode qui serait parfaite si elle était d'une application moins ardue ;
- 2° De donner une méthode moins exacte, mais beaucoup plus simple permettant de fixer approximativement le soulagement produit par la forme en arc ;
- 3° D'en déduire ce que devrait être le profil du barrage pour faire travailler à la fois le mur et les arcs, profil correspondant au maximum d'économie.

Notre désir sera réalisé si les techniciens qualifiés en la matière veulent bien juger cette note dans son domaine qui est celui de la théorie et en déduire les conclusions pratiques qu'elle mérite ou non.

1° MÉTHODE EXACTE

Elle consisterait à décomposer le mur sur toute sa hauteur et l'arc suivant son développement en un certain nombre de parties égales.

La division du mur se faisant par des plans horizontaux, la division de l'arc par des plans normaux verticaux. Si on divise des deux façons en n parties, le parement amont du barrage est découpé en n^2 surfaces élémentaires assimilables à des rectangles de surface ω , la profondeur du centre de chaque rectangle au dessous de l'eau est x .

La poussée de l'eau sur le rectangle étant $p = x\omega$ une part : $K\omega x$ revient au mur, la part $(1 - K)\omega x$ revient à l'arc.

Le coefficient $K < 1$, de poussée est d'ailleurs variable d'un élément à l'autre, et on voit de suite que le problème revient à calculer ce coefficient K en tout point.

Nous négligerons dans toute cette étude l'influence des efforts tangentiels sur les déformations parce qu'elle est secondaire et que son introduction complique les calculs déjà peu simples.

Une façon (qui se présente à l'esprit de suite) de calculer les coefficients K est d'exprimer que, en chaque point, la flèche prise par l'élément mur auquel appartient la surface élémentaire ω est la même que la flèche prise par l'élément arc au même point.

Cette identification peut se faire, connaissant les lignes d'influence des flèches, suivant les éléments murs et suivant les éléments arcs. Une ligne d'influence d'un élément mur est facile à déterminer.

Considérons en effet (fig. 1) une tranche verticale de mur de largeur égale à 1 mètre ; appliquons à une section S une charge normale au parement amont $P = 1$, le diagramme des moments fléchissants est une simple droite à 45°.

En appelant E le coefficient d'élasticité de la matière (2.000 kgs/m²), I le moment d'inertie variable de la section horizontale, on obtient la ligne d'influence des flèches en traçant ; avec une distance polaire égale à E un funiculaire des forces fictives $\frac{M \Delta x}{I}$. Ce funiculaire C ayant d'ailleurs son côté de départ tangent au parement amont en bas.

Rappelons ici que si la charge 1 est appliquée en S' elle produit en S une flèche mesurée par l'ordonnée y' de la ligne d'influence en S' . Donc la ligne d'influence relative à S' passe par A . Cette propriété ne sert d'ailleurs pas à grand chose. Nous pourrions dans un calcul approché risquer une simplification qui est la suivante :

Quand la charge est appliquée en S' , elle produit en toute section une influence qui diffère, à un terme variable près, de l'influence que produirait l'application de la charge en S , car les diagrammes de moment diffèrent dans les deux cas d'une constante (fig. 1).

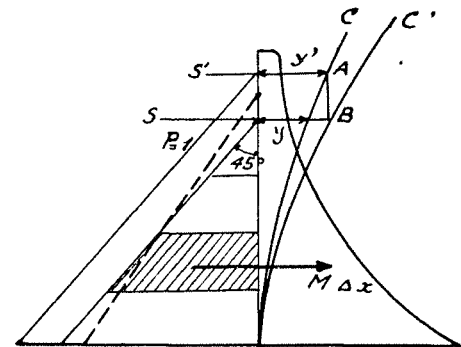


Fig. 1

Mais l'introduction de ce terme variable ne permet pas de trouver une simplification importante dans les calculs qui suivront.

Cette façon de voir n'est d'ailleurs pas exacte elle-même.

Par contre, supposons que l'on admette, au lieu de la différence de moments, le rapport de moments constant sur toute la hauteur, il en résulte de suite que les ordonnées des deux lignes d'influence C, C' sont proportionnelles et dans le rapport $\frac{y'}{y}$.

Cette façon de voir semble a priori risquée et même absurde, mais en fait elle ne diffère beaucoup de la vérité que pour les sections éloignées du sommet pour lesquelles les ordonnées des

lignes d'influence sont de plus en plus petites. Ce sont donc les termes les plus petits qui sont entachés de la plus grande part d'erreur et l'influence d'ensemble sur les résultats est moindre qu'il ne semble.

Nous n'indiquerons d'ailleurs cette méthode que pour nous en servir dans les calculs de première approximation.

Dans les calculs définitifs, nous prendrons les lignes d'influence une à une, sans chercher à établir de relations entre leurs ordonnées.

Cette parenthèse close, nous voyons qu'il est facile d'obtenir une ou plusieurs lignes d'influence pour les éléments murs.

Pour les éléments arcs, il n'en est pas de même. On peut évidemment déterminer par points la ligne des déformations produites dans l'arc par l'application d'une charge normale à l'arc appliqué en un point. C'est une opération des plus longues.

Supposons toutefois que l'on ait déterminé les lignes d'influence relatives aux différents éléments du demi arc. Les autres étant symétriques (Fig. 2).

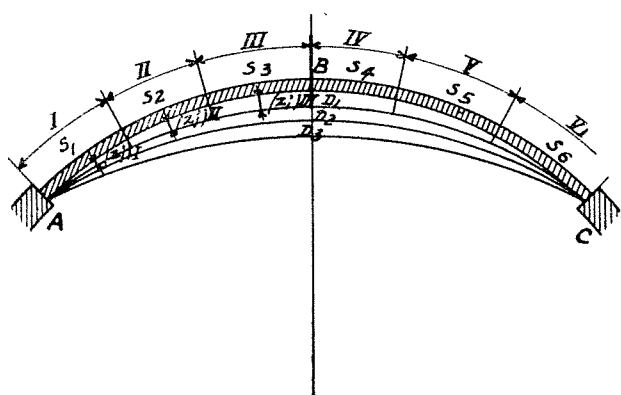


Fig. 2

Nous appellerons

$$| z_1^1 |_1, | z_2^1 |_1, | z_3^1 |_1$$

les ordonnées de la ligne D₁ suivant les sections S₁, S₂, S₃

$$| z_1^2 |_1, | z_2^2 |_1, | z_3^2 |_1$$

celles de la ligne D₂ suivant les mêmes sections.

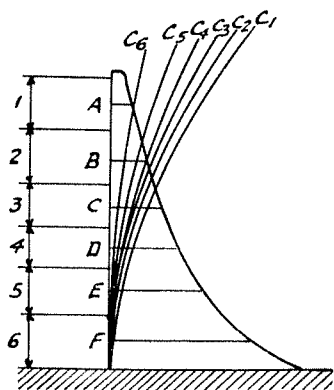


Fig. 3

Considérons de même les lignes d'influence de l'élément mur correspondant à la 1^{re} tranche de l'arc (fig. 3). Le 1/2 arc est divisé

en 6 tranches, C₁ est la ligne relative à la section médiane de l'élément (1), etc...

Nous représentons par

$$(y_1^1)_1, (y_2^1)_1, (y_3^1)_1$$

les ordonnées de C₁ suivant les sections A. B. C. D.

$$(y_1^2)_1, (y_2^2)_1, (y_3^2)_1$$

celles de C₂ suivant ces sections.

Appelons K₁¹, K₂¹, K₃¹ les coefficients de poussée supportée par le mur suivant ces éléments et x₁, x₂, x₃ les distances des sections A B C au plan supérieur d'eau.

Pour l'élément mur correspondant à la tranche II de l'arc, les lignes d'influence sont changées, les ordonnées des lignes d'influence deviennent

$$(y_1^1)_2, (y_2^1)_2, (y_3^1)_2, (y_4^1)_2, \text{ etc.}$$

Le raisonnement fait sur les tranches de murs se reprend pour les tranches d'arc.

Les ordonnées des lignes d'influence du 2^e arc correspondant à la tranche 2 des murs prennent la forme

$$(z_1^1)_2, (z_2^1)_2, (z_3^1)_2$$

Ces notations étant indiquées, écrivons l'égalité des flèches en tout point.

La flèche de l'élément 1 du mur appartenant à l'arc I est d'après une propriété connue des lignes d'influence

$$f_1 = \omega [K_1^4 x_1 (y_1^1)_1 + K_2^4 x_2 (y_2^1)_1 + \dots + K_6^4 x_6 (y_6^1)_1]$$

La flèche du même élément considéré comme appartenant à l'arc est

$$f_1 = \omega x_1 [(1 - K_1^4) (z_1^1)_1 + (1 - K_2^4) (z_2^1)_1 + \dots + (1 - K_6^4) (z_6^1)_1]$$

D'où l'équation

$$K_1^4 x_1 (y_1^1)_1 + K_2^4 x_2 (y_2^1)_1 + \dots = x_1 [(1 - K_1^4) (z_1^1)_1 + (1 - K_2^4) (z_2^1)_1 + \dots]$$

En écrivant des équations semblables pour tous les 6 éléments de chacun des trois murs I, II, III on aura 18 équations entre les 36 coefficients

$$K_1^1, K_2^1, K_1^2, K_2^2, K_1^6, K_2^6$$

qui sont égaux deux à deux, car

$$K_1^1 = K_1^6, K_2^1 = K_2^6$$

Le problème est soluble théoriquement, mais pas pratiquement. On peut certainement décomposer en un nombre moindre d'éléments, par exemple le 1/2 arc en deux murs sur chacun desquels on envisagera trois éléments. On aura par la résolution de 6 équations les 6 inconnues représentant les coefficients de poussée moyenne sur chacun des panneaux du barrage. On pourra ensuite étudier chacun de ceux-ci en détail. Mais la méthode perd la moitié de sa valeur d'exactitude si on considère peu d'éléments.

Nous n'indiquerons donc cette première méthode toute théorique que pour en faire sentir la généralité complète, en même temps, malheureusement, que toute la complexité.

2° MÉTHODE APPROCHÉE

Dans la méthode que nous allons exposer maintenant, nous supposons toujours l'arc divisé en n tranches élémentaires constituant autant de murs que nous décomposerons également en tranches horizontales.

Nous supposons donc que la poussée est uniforme suivant toute la longueur de l'arc en corrigeant ensuite les déformations par l'introduction d'une poussée moyenne et par le calcul graphique des flèches exactes.

Nous supposons de même l'arc à épaisseur constante. Comme il ne l'est généralement pas, e épaisseur, sera la moyenne entre les deux e extrêmes à la clé et aux naissances.

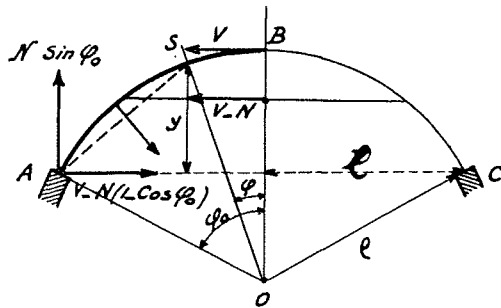


Fig. 4

Calcul des efforts. — Avant d'appliquer la méthode, il est indispensable de reprendre la théorie de l'arc élastique encastré aux extrémités et à courbure constante, qui peut être forte.

Nous supposons la ligne moyenne parfaitement circulaire d'abord, quitte à la modifier légèrement ensuite (fig. 4).

Nous appellerons φ_0 le $\frac{1}{2}$ angle d'ouverture de l'arc, φ l'abscisse angulaire d'une section quelconque S. Si l'arc était libre aux extrémités, il se développerait simplement un effort de compression $N = p \varphi$ ($p =$ pression, $\varphi =$ rayon) comme dans une conduite cylindrique sous pression.

L'encastrement fait qu'il n'en est pas de même.

Soit donc V la poussée à la clé.

La poussée horizontale en A est naturellement diminuée de la résultante des pressions agissant sur l'arc AB perpendiculairement à Oy .

Cette résultante est :

$$p\varphi (1 - \cos \varphi_0) = N (1 - \cos \varphi_0)$$

La poussée en A est donc :

$$V - N (1 - \cos \varphi_0)$$

Le moment d'encastrement sera représentée par M_1 ,

Calculons le moment en S.

Le moment des pressions agissant sur l'arc \widehat{AS} est :

$$- p\varphi 2 \varphi \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} = - N\varphi [1 - \cos (\varphi_0 - \varphi)]$$

On a donc :

$$M = M_1 - N\varphi [1 - \cos (\varphi_0 - \varphi)] - [V - N (1 - \cos \varphi_0)] \varphi (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

$$+ N\varphi \sin \varphi_0 (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$$

$$M = M_1 - N\varphi \cos \varphi_0 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) - [N (1 - \cos \varphi_0) V] \varphi (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

$$M = M_1 - (N - V) \varphi (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

Pour calculer le moment d'encastrement, exprimons que la rotation des sections extrêmes A et B est nulle, ce qui donne :

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{M ds}{EI} = 0$$

soit :

$$\int_0^{\varphi_0} M d\varphi = 0$$

On a :

$$M_1 \varphi_0 - (N - V) \varphi (\varphi_0 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0) = 0$$

soit :

$$M_1 = - (N - V) \varphi \left[\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi_0 \right]$$

En portant cette valeur dans M, il vient :

$$M = - (V - N) \varphi \left[\cos \varphi - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right]$$

Or $\varphi \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}$ est l'ordonnée OG du centre de gravité de l'arc, $\varphi \cos \varphi$ est l'ordonnée de la section et on voit que le moment en chaque point est le même que s'il était produit par un effort horizontal $(N - V)$ appliqué en G. Cet effort agit comme une traction à clé. Si l'arc n'est pas à épaisseur uniforme, G est le centre de gravité élastique, c'est-à-dire le centre des poids élémentaires $\frac{ds}{l}$. I étant le moment d'inertie.

Pour calculer V , il suffit d'exprimer que l'appui A est fixe, ou encore mieux, pour tenir compte de suite des actions thermiques qu'il se déplace d'une longueur $\alpha \theta l$.

α est le coefficient de dilatation.

θ la variation de température.

l la $\frac{1}{2}$ corde de l'arc.

Le déplacement horizontal produit en A par la flexion est ;

$$\frac{1}{EI} \int_0^{\varphi_0} M \varphi y d\varphi$$

qui tend à allonger l'arc. L'effort de compression en S a pour composante horizontale $V - N (1 - \cos \varphi)$.

Sa valeur est donc :

$$\frac{V - N (1 - \cos \varphi)}{\cos \varphi} = N + \frac{V - N}{\cos \varphi}$$

Le déplacement produit par la compression est :

$$\frac{1}{E\Omega} \int \left(N + \frac{V - N}{\cos \varphi} \right) y d\varphi$$

C'est un raccourcissement.

On a donc :

$$EI \alpha \theta l = (V - N) \varphi^3 \int_0^{\varphi_0} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right) (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi$$

$$+ \frac{Ne^2}{12} \varphi \int_0^{\varphi_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi + \frac{e^2}{12} (V - N) \varphi \int_0^{\varphi_0} \left(1 - \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} \right) d\varphi$$

Les intégrales sont faciles à calculer :

$$\int \left[\cos^2 \varphi - \left(\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \cos \varphi_0 \right) \cos \varphi + \frac{\sin 2\varphi_0}{2\varphi_0} \right] d\varphi = \frac{\sin 2\varphi_0}{\varphi_0} + \frac{\sin 2\varphi_0}{4} + \frac{\varphi_0}{2}$$

$$\int (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi = \sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0$$

$$\int \left(1 - \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} \right) d\varphi = \varphi_0 - \cos \varphi_0 L \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}$$

D'où :

$$(V - N) \left[\varphi^2 \left(-\frac{\sin^2 \varphi_0}{\varphi_0} + \frac{\sin 2\varphi_0}{4} + \frac{\varphi_0}{2} + \frac{e^2}{12} \left(\varphi_0 - \cos \varphi_0 L \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} \right) \right) \right]$$

$$= EI \alpha \theta \sin \varphi_0 - \frac{Ne^2}{12} (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0)$$

On tire de là :

$$V - N = \frac{Ne^2}{12} \frac{\left(\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi_0 \right) - \frac{Ee}{N} \alpha \theta \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}}{\varphi^2 \left(-\frac{\sin^2 \varphi_0}{\varphi_0^2} + \frac{\sin 2\varphi_0}{4\varphi_0} + \frac{1}{2} \right) + \frac{e^2}{12} \left(1 - \frac{\cos \varphi_0}{\varphi_0} L \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} \right)}$$

Pour simplifier cette formule, nous allons développer en série les lignes trigonométriques en remarquant que φ_0 étant < 1 radian en général, les termes d'ordre supérieur sont négligeables.

On a ainsi :

$$\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi_0 = \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{6} \right) - \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right) = \frac{\varphi_0^2}{3}$$

$$\left(\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right)^2 = \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{6} + \frac{\varphi_0^4}{120} \right)^2 = 1 - \frac{\varphi_0^2}{3} + \frac{2\varphi_0^4}{45} + \dots$$

$$\frac{\sin 2\varphi_0}{4\varphi_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\varphi_0^2}{3} + \frac{16\varphi_0^4}{120} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\varphi_0^2}{3} + \frac{\varphi_0^4}{15} + \dots$$

D'où :

$$-\left(\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right)^2 + \frac{\sin 2\varphi_0}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\varphi_0^4}{45} + \dots$$

De même

$$L \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} = 2 \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{\varphi_0}{2}}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 \frac{\varphi_0}{2}}{5} \right)$$

Or: $\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\varphi_0^3}{24}$

$$L \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} = 2 \left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\varphi_0^3}{24} + \frac{\left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\varphi_0^3}{24} \right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\varphi_0^3}{24} \right)^5}{5} \right)$$

$$= \varphi_0 + \frac{\varphi_0^3}{6} + \frac{\varphi_0^5}{30} + \dots$$

D'où :

$$1 - \frac{\cos \varphi_0}{\varphi_0} L \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} = 1 - \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{2} + \frac{\varphi_0^4}{24} \right) \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{6} + \frac{\varphi_0^4}{30} \right)$$

$$= \frac{\varphi_0^2}{3} - \frac{\varphi_0^4}{120}$$

On peut prendre simplement : $\frac{\varphi_0^2}{3}$

On a donc finalement :

$$V - N = -\frac{Ne^2}{12} \frac{\frac{\varphi_0^2}{3} - \frac{Ee}{N} \alpha \theta \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}}{\frac{\varphi_0^2}{45} + \frac{e^2}{12} \frac{\varphi_0^2}{3}}$$

Ou même en multipliant haut et bas par 36

$$V - N = -Ne^2 \frac{\frac{\varphi_0^2}{3} - \frac{3Ee}{N} \alpha \theta \frac{l}{s}}{0,8\varphi_0^2\varphi_0^4 + e^2\varphi_0^2}$$

$\frac{l}{s}$ est le rapport de la corde à l'arc.

Une élévation de température diminue $V - N$, donc les moments, par contre un abaissement de température les augmente.

De toutes façons, en appelant $(V - N)_0$ la poussée à la température initiale et $(V - N)_\theta$ la poussée pour une variation θ de température. On a :

$$(V - N)_\theta = (V - N)_0 \left(\frac{\varphi_0^2 - \frac{3Ee}{N} \alpha \theta \frac{l}{s}}{\varphi_0^2} \right) = (V - N)_0 \left(1 - \frac{3Ee \alpha \theta l}{N \varphi_0^2 s} \right)$$

Le facteur $\lambda = \left(1 - \frac{3Ee \alpha \theta l}{N \varphi_0^2 s} \right)$

où l'on représente par τ le travail moléculaire $\frac{N}{e}$ produit à la compression simple, est un facteur qui multiplie les moments. On voit de suite l'influence considérable de ce facteur car $E\alpha = 200.000 \times 0,00001 = 2 \text{ kg cm}^2$ pour la maçonnerie.

Une variation de 20° donne $E\alpha\theta = 40 \text{ kg cm}^2$ qui dépasse de beaucoup la valeur admise pour τ .

(A suivre).