

HYDRAULIQUE

Calcul des Barrages-Voûtes

Par GEORGES PRUDON, Ingénieur, Professeur à l'Institut Polytechnique de Grenoble

(SUITE)

CALCUL DES FLÈCHES DANS L'ARC

Nous nous proposons maintenant, de calculer les flèches produites dans l'arc par les poussées seulement. Pour tenir compte de la température, il suffira d'introduire ensuite le facteur .

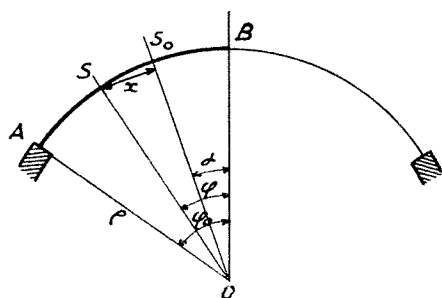


Fig. 5.

Considérons donc l'arc (fig. 5). Nous allons calculer la flèche en une section S_0 d'abscisse angulaire x ; S étant une section quelconque, le moment y' est :

$$M = -(V - N) \rho \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right)$$

L'effort de compression dans l'arc est sensiblement constant et égal à N :

La flèche en S_0 est donnée par l'intégrale

$$\int_x^{\varphi_0} \left(-\frac{M \rho}{EI} + \frac{N}{E \Omega} \right) x d\varphi$$

$$= \frac{1}{EI} \left[-(V - N) \rho^3 \int_x^{\varphi_0} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right) \sin(\varphi - x) d\varphi - \frac{N e^2}{12} \rho \int_x^{\varphi_0} \sin(\varphi - x) d\varphi \right]$$

En appelant f cette flèche, il vient :

$$\frac{EI}{\rho} f = -(V - N) \rho^2 \int_x^{\varphi_0} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right) \sin(\varphi - x) d\varphi + \frac{N e^2}{12} \left[1 - \cos(\varphi_0 - x) \right]$$

L'intégrale est encore facile à calculer :

$$\int \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right) \sin(\varphi - x) d\varphi = \int \cos \varphi \sin(\varphi - x) d\varphi - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \left[1 - \cos(\varphi_0 - x) \right]$$

$$\int_x^{\varphi_0} \cos \varphi \sin(\varphi - x) d\varphi = \frac{1}{2} \int_x^{\varphi_0} \left(\sin(2\varphi - x) - \sin x \right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos x - \cos(2\varphi_0 - x)}{2} - \sin x (\varphi_0 - x) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 - x) - (\varphi_0 - x) \sin x \right)$$

D'où

$$\frac{EI}{\rho} f = -(V - N) \rho^2 \left[\frac{\sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 - x) - (\varphi_0 - x) \sin x}{2} - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \left(1 - \cos(\varphi_0 - x) \right) \right]$$

$$+ \frac{N e^2}{12} \left[1 - \cos(\varphi_0 - x) \right]$$

Nous allons encore ici, développer en série tous les termes

$$1 - \cos(\varphi_0 - x) = 1 - \left[1 - \frac{(\varphi_0 - x)^2}{2} + \frac{(\varphi_0 - x)^4}{24} \right] = \frac{(\varphi_0 - x)^2}{2} - \frac{(\varphi_0 - x)^4}{24}$$

$$\frac{\sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 - x) - (\varphi_0 - x) \sin x}{2} = \frac{\left(\varphi_0 - \frac{\varphi_0^3}{6} \right) \left(\varphi_0 - x - \frac{(\varphi_0 - x)^3}{6} \right) - (\varphi_0 - x) \left(x - \frac{x^3}{6} \right)}{2}$$

$$= \frac{(\varphi_0 - x)^2}{2} - \frac{\varphi_0 (\varphi_0 - x)}{12} \left[(\varphi_0 - x)^2 + \varphi_0^2 \right] + \frac{x^3}{12} (\varphi_0 - x)$$

D'où

$$\frac{\sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 - x) - (\varphi_0 - x) \sin x}{2} - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \left[1 - \cos(\varphi_0 - x) \right]$$

$$= \frac{(\varphi_0 - x)^2}{2} - \frac{\varphi_0 (\varphi_0 - x)}{12} \left[(\varphi_0 - x)^2 + \varphi_0^2 \right] + \frac{x^3}{12} (\varphi_0 - x)$$

$$- \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{6} \right) \left[\frac{(\varphi_0 - x)^2}{2} - \frac{(\varphi_0 - x)^4}{24} \right] = - \frac{(\varphi_0^2 - x^2)^2}{24}$$

Donc

$$\frac{EI}{\rho} f = -(V - N) \rho^2 \frac{(\varphi_0^2 - x^2)^2}{24} + \frac{N e^2}{12} \left[\frac{(\varphi_0 - x)^2}{2} - \frac{(\varphi_0 - x)^4}{24} \right]$$

En appelant f_0 la flèche à température initiale et remplaçant $V - N$ par sa valeur, il vient

$$\frac{EI}{\rho} f_0 = \frac{N e^2}{12} \left[\frac{(\varphi_0 - x)^2}{2} - \frac{(\varphi_0 - x)^4}{24} \right] + \frac{\rho^2}{0,8 \varphi_0^2 \varphi_0^2 + e^2} \frac{(\varphi_0^2 - x^2)^2}{2}$$

qui peut s'écrire en valeur absolue et en simplifiant encore :

$$\frac{EI}{\rho} f_0 = \frac{N e^2}{12} \left[\frac{(\varphi_0^2 - x^2)^2}{2} \frac{\rho^2}{0,8 \varphi_0^2 \varphi_0^2 + e^2} + \frac{(\varphi_0 - x)^2}{2} \right]$$

à la température θ le facteur λ intervient et la flèche f est donnée par

$$\frac{EI}{\rho} f = \frac{N e^2}{12} \left[\frac{(\varphi_0^2 - x^2)^2}{2} \frac{\lambda}{0,8 \varphi_0^2 + \left(\frac{e}{\rho} \right)^2} + \frac{(\varphi_0 - x)^2}{2} \right]$$

En remplaçant I par $\frac{e^3}{12}$ on tire :

$$f = \frac{N \rho}{2 E e} \left[\frac{\lambda (\varphi_0^2 - x^2)^2}{0,8 \varphi_0^2 + \left(\frac{e}{\rho} \right)^2} + (\varphi_0 - x)^2 \right]$$

Cette expression n'est valable que pour le $\frac{1}{2}$ arc. Si on avait négligé l'influence de la compression, on serait arrivé à la formule extrêmement séduisante :

$$f = \frac{N \rho}{2 E e} \frac{\lambda (\varphi_0^2 - x^2)^2}{0,8 \varphi_0^2 + \left(\frac{e}{\rho} \right)^2}$$

valable pour tout l'arc, car elle est symétrique.

f s'annulant aux deux encastremets pour $x = \pm \varphi_0$. Mais il est impossible de négliger cette influence, sauf quand on fera intervenir le facteur thermique λ , car alors le 2^e terme est négligeable à côté du premier.

En résumé, nous voyons qu'en remplaçant N par $p \varphi$ la pression p étant égale en tonnes à la profondeur x correspondant à l'arc, en mètres, f prend la forme :

$$f = \frac{\varphi^2}{2 E e} (\varphi_0 - x)^2 \left[\frac{\lambda (\varphi_0 + x)^2}{0,8 \varphi_0^2 + \left(\frac{e}{\varphi}\right)^2} + 1 \right] \cdot x$$

x étant exprimé en tonnes correspondantes à la profondeur en mètres. On peut l'écrire simplement $f = z x$

z étant la flèche que donnerait la pression unitaire.

Pour chaque section (x déterminé), z est fonction de l'épaisseur e et du rayon, donc de x .

La flèche réelle de l'arc en un point de l'arc est $(1 - K) z x$.

DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS DE POUSSÉE

Nous arrivons à la partie essentielle du problème. Figurons donc une tranche élémentaire du mur de 1 mètre de large correspondant à un élément d'arc défini par son angle x (fig. 6).

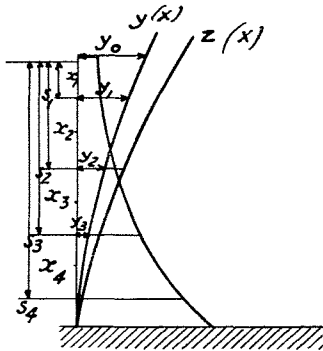


Fig. 6.

Traçons la ligne d'influence des flèches du mur relative au sommet. Les ordonnées de cette ligne sont $y(x)$. Traçons de même la courbe $z(x)$, car la quantité z

$$z = \frac{\varphi^2 (\varphi_0 - x)^2}{2 E e} \left[\frac{\lambda (\varphi_0 + x)^2}{0,8 \varphi_0^2 + \left(\frac{e}{\varphi}\right)^2} + 1 \right]$$

dépend de l'épaisseur e (moyenne) de φ , et de φ_0 toutes choses qui peuvent varier avec la profondeur x .

Décomposons le mur par des sections horizontales distantes de h mètres.

Les centres de poussée élémentaires sont à des profondeurs x_1, x_2, x_3 .

Les ordonnées correspondantes de la ligne d'influence sont y_1, y_2, y_3 , les coefficients de poussée sont K_1, K_2, K_3 .

Nous sommes obligés pour arriver à des résultats approchés mais simples, de considérer les lignes d'influence comme ayant leurs ordonnées proportionnelles. L'inflexion du mur en S_1 est alors

$$f = h \frac{y_1}{y_0} (K_1 x_1 y_1 + K_2 x_2 y_2 + \dots + K_n x_n y_n)$$

L'inflexion de l'arc à la même section est

$$f = (1 - K_1) z_1 x_1$$

indépendante de h .

D'où l'équation :

$$(1) \quad h \frac{y_1}{y_0} (K_1 x_1 y_1 + \dots) = (1 - K_1) z_1 x_1$$

Pour avoir l'inflexion du mur en S_2 , il suffit de multiplier les ordonnées de la ligne d'influence par $\frac{y_2}{y_0}$ et on a la deuxième équation :

$$h \frac{y_2}{y_0} (K_1 x_1 y_1 + \dots) = (1 - K_2) z_2 x_2$$

et ainsi de suite. Ces équations donnent :

$$\frac{(1 - K_1) z_1 x_1}{y_1} = \frac{(1 - K_2) z_2 x_2}{y_2} = \dots = \frac{h}{y_0} (K_1 x_1 y_1 + \dots)$$

On en tire :

$$1 - K_2 = \frac{(1 - K_1) z_1 x_1 y_2}{z_2 x_2 y_1}$$

$$1 - K_3 = \frac{(1 - K_1) s_1 x_1 y_3}{s_3 x_3 y_1}$$

D'où

$$K_2 = 1 - (1 - K_1) \frac{z_1 x_1 y_2}{z_2 x_2 y_1}$$

$$K_3 = 1 - (1 - K_1) \frac{z_1 x_1 y_3}{z_3 x_3 y_1}$$

En portant ces valeurs dans l'équation (I), il vient :

$$-(1 - K_1 - 1) x_1 y_1^2 + x_2 y_2 y_1 \left[1 - (1 - K_1) \frac{z_1 x_1 y_2}{z_2 x_2 y_1} \right] + \dots = (1 - K_1) \frac{z_1 x_1 y_0}{h}$$

D'où

$$x_1 (1 - K_1) = \frac{y_1 (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)}{y_1^2 + z_1 \left(\frac{y_0}{h} + \frac{y_2^2}{z_2} + \frac{y_3^2}{z_3} + \dots \right)}$$

On a de même

$$x_2 (1 - K_2) = \frac{y_2 (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)}{y_2^2 + z_2 \left(\frac{y_0}{h} + \frac{y_1^2}{z_1} + \frac{y_3^2}{z_3} + \dots \right)}$$

Ces formules très symétriques donnent donc des valeurs approchées des poussées sur les éléments d'arc superposés. Elles montrent que ces poussées sont sensiblement proportionnelles aux ordonnées y_1, y_2, \dots, y_n de la ligne d'influence du mur.

On pourrait naturellement en déduire K_1, K_2, \dots c'est-à-dire les poussées sur le mur. On vérifierait donc la stabilité du mur, mais c'est inutile pour le moment, la vérification de l'arc devant précéder celle des murs.

CAS OU LA CRÊTE DU BARRAGE ÉMERGE (REVANCHE)

Nous avons supposé jusqu'ici que l'eau affleurerait le moment du barrage. C'est le cas pour les parties formant déversoir. Généralement le niveau de l'eau est un peu au-dessous de la crête du barrage. En ce cas, l'arc supérieur du barrage non soumis à la poussée de l'eau reçoit toutefois de la part du mur fléchi une poussée que par réaction l'arc restitue au mur (fig. 7).

La poussée négative que le mur reçoit de l'arc pour l'élément supérieur non mouillé est de la forme $K_0 h$.

La flèche au sommet est :

$$- K_0 h y_0 + K_1 h x_1 y_1 + \dots - K_n h x_n y_n$$

La flèche de l'arc est de même : $K_0 z_0$.

L'égalité des flèches donnée ici :

$$- K_0 y_0 + K_1 x_1 y_1 + \dots = \frac{K_0 z_0}{h}$$

et :

$$K_0 = \frac{K_1 x_1 y_1 + \dots + K_n x_n y_n}{y_0 + \frac{z_0}{h}}$$

Cette équation d'une forme différente des autres ne pourrait pas être introduite dans le système sans en compliquer la résolution.

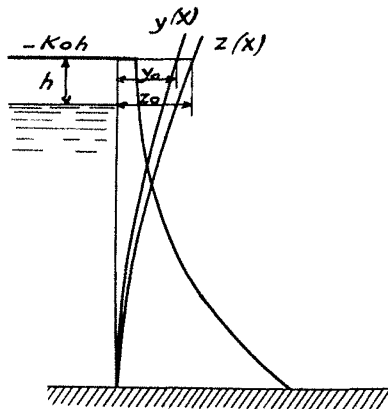


Fig. 7.

On peut donc résoudre ce système comme il a été indiqué et porter les valeurs trouvées pour K_1 K_2 dans K_0 , ce qui revient à négliger pour l'ensemble du mur l'influence soulageante de la crête.

Mais on a :

$$K_1 x_1 y_1 + \dots + K_n x_n y_n = \frac{(1 - K_1) z_1 x_1 y_0}{h y_1}$$

D'où :

$$K_0 = \frac{(1 - K_1) z_1 x_1 y_0}{y_1 (h y_0 + z_0)}$$

La poussée négative au sommet du mur est :

$$-K_0 h = \frac{-(1 - K_1) z_1 x_1 y_0 h}{(h_1 y_0 + z_0) y_1}$$

et il faut en tenir compte dans le tracé de la ligne des poussées dans le mur ; son effet est favorable, elle rapproche la ligne de poussée du parement amont et diminue les efforts dans l'ensemble.

VÉRIFICATION DE LA STABILITÉ DE L'ARC

En divisant le $\frac{1}{2}$ arc AB en différentes parties définies chacune par la position α de son centre, et cet arc étant lui-même placé à une profondeur x_n , il faut calculer les coefficients $(1 - K_n) X_n$ de poussée en chaque partie par les formules approchées que nous avons données.

Comme l'arc ne travaille pas à la compression simple, il doit avoir une épaisseur croissant de la clé aux naissances, suivant une certaine loi, par exemple suivant la loi classique : $e = \frac{e_0}{\cos \alpha}$, e_0 étant l'épaisseur de la clé.

Pour chaque mur élémentaire I, II, III, il faut déterminer la ligne d'influence des flèches relatives au sommet. Cette opération, qui a été faite pour le mur élémentaire I, peut se répéter très vite pour tous les autres, en remarquant que si $(y_n)_0$ sont les ordonnées de la ligne d'influence du mur élémentaire passant par la clé des arcs, les ordonnées $(y_n)_\alpha$ d'un mur élémentaire défini par l'angle α , sont telles que $\frac{(y_n)_\alpha}{(y_n)_0} = \frac{I_0}{I_\alpha}$ en vertu du tracé de Mohr qui a permis de les déterminer :

Donc : $(y_n)_\alpha = (y_n)_0 \left(\frac{e_0}{e}\right)^3$

soit : $(y_n)_\alpha = (y_n)_0 \cos^3 \alpha$

si on adopte la loi classique de l'épaisseur. Les y figurant dans les coefficients de poussée sont donc déterminés, les z également puisque :

$$z = \frac{\rho^2}{2 E e} (\varphi_0 - \alpha)^2 \left[\frac{\lambda (\varphi_0 + \alpha)^2}{0,8 \varphi_0^2 + \left(\frac{e}{\rho}\right)^2} + 1 \right]$$

On peut donc calculer, suivant la même hauteur x_n , pour différents murs, les coefficients $(1 - K_n) \alpha \cdot x_n$ de poussée sur l'arc. Les poussées sur les éléments de cet arc sont $(1 - K_n)_I x_n s$, $(1 - K_n)_{II} x_n s$, etc...

La détermination exacte de la ligne de poussée dans l'arc est complètement impossible pour le calcul. On peut admettre encore que l'arc travaille sous une poussée uniforme qui serait le $(1 - K_n)$ moyen de ceux que nous venons de déterminer.

La poussée à la clé serait ainsi donnée par

D'où
$$V = \left(N - \frac{N e^2 \lambda}{0,8 \rho^2 \varphi_0^2 + e^2} \right)$$

ρ étant le facteur thermique, et $N = \rho (1 - K_n)$ moyen. x_n

$$V = \rho (1 - K_n)_{\text{moyen}} \left[1 - \frac{\lambda e^2}{0,8 \rho^2 \varphi_0^2 + e^2} \right] \cdot x_n$$

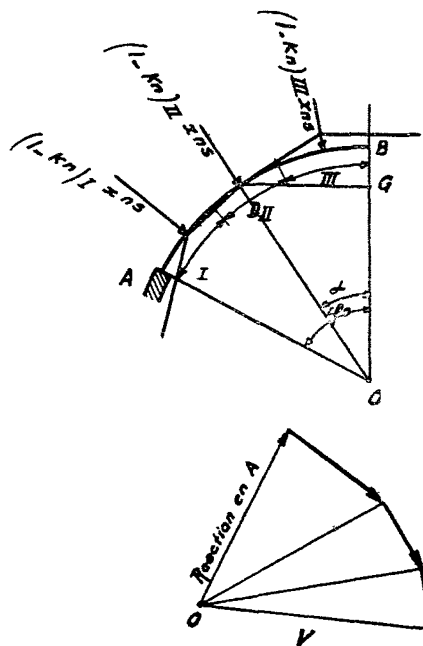


Fig. 8.

En traçant (fig. 8) un funiculaire des actions $(1 - K_n) \cdot x_n s$ avec une distance polaire égale à V , ce funiculaire passant par le point D situé sur l'horizontale du centre élastique G, on a la ligne de poussée dans l'arc, on en déduit facilement le travail par les méthodes classiques. La distribution des efforts dans l'arc étant changée, on voit toutefois que les flèches calculées au début de cette étude ne correspondent plus aux flèches réelles. Il serait toutefois illusion de chercher à les calculer exactement. Cherchons à les déterminer graphiquement.

Figurons l'arc divisé en n parties égales à Δs , chaque partie correspondant à un angle au centre $\Delta \varphi$ (fig. 9). En ne faisant pas intervenir le facteur x_n , profondeur de l'arc, qui interviendra ultérieurement, les poussées sur les éléments sont $(1 - K_n)_I \Delta s$, $(1 - K_n)_{II} \Delta s \dots$

Comme il a été expliqué précédemment, un funiculaire de ces poussées tracées avec O comme pôle donne la ligne de poussée dans l'arc. Or la flèche en une section S, comme il a été indiqué plus haut est donnée par :

$$f = \rho \int_{\varphi_0}^{\alpha} \left(\frac{M \rho}{EI} + \frac{N}{EQ} \right) \cdot \sin(\varphi - \alpha) d\varphi$$

Or le moment M dans une section S'est égal à l'effort de compression N multiplié par la distance d de la ligne de poussée à la fibre moyenne dans le plan de la section.

On a donc :

$$f = \frac{\rho}{E} \int_{\varphi_0}^{\alpha} \frac{N}{I} \left(d + \frac{e^2}{12 \rho} \right) \sin(\varphi - \alpha) \cdot ds$$

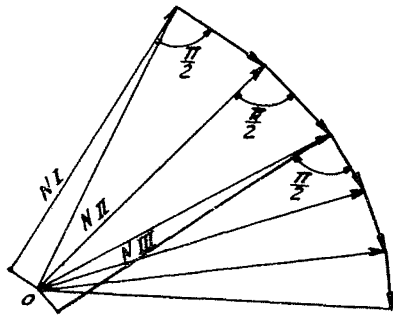
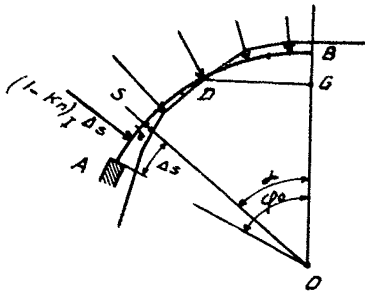


Fig. 9.

Il est facile de former graphiquement le terme $d + \frac{e^2}{12\varphi} = d'$ en chaque section, ce qui donne la ligne de poussée pointillée (fig. 10).

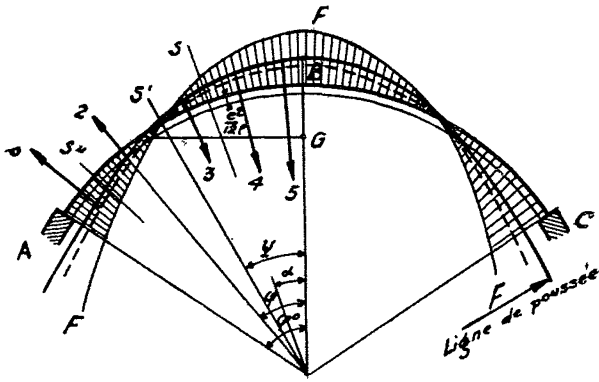


Fig. 10.

Pour chaque section, $\frac{N}{I}$ est facile à tirer du polygone des poussées (fig. 10). En multipliant d' par $\frac{N}{I}$, qui varie peu, on obtient une courbe F d'allure identique à la ligne des poussées.

L'équation de la flèche s'écrit :

$$f = \frac{\rho}{E} \sum_A^S \frac{Nd'}{I} \sin(\varphi - \alpha) \cdot \Delta s$$

Or :
$$\frac{Nd'}{I} \Delta s$$

représente la surface comprise entre l'élément Δs de l'arc et la courbe F, surface qui peut se planimétrer et qui, d'ailleurs, a un signe algébrique,

Considérons ces surfaces comme des poussées fictives dirigées vers le point O et traçons un polygone de ces forces fictives (fig. II) à assez grande échelle A, 1, 2, 3, 4 B. En menant par A une perpendiculaire à 1 et par B une horizontale, on obtient un point O

Faisons passer par O une droite faisant avec OX l'angle α et projetons en KL le contour des forces fictives agissant à gauche de S, c'est-à-dire (1) + (2) + (3). On voit facilement que

$$\widehat{KL} = \sum_s^A \left(\frac{Nd'}{I} \Delta s \right) \sin(\varphi - \alpha)$$

Par conséquent la flèche en S est donnée par

$$f = \frac{\rho}{E} \widehat{KL}$$

La flèche à la clé est :

$$\frac{\rho}{E} \widehat{BL}_0$$

Les flèches en S' S'' sont de même

$$\frac{\rho}{E} \widehat{K'L'}, \quad \frac{\rho}{E} \widehat{K''L''}$$

Le lieu du point L est un cercle décrit sur OA comme diamètre. Le lieu de K est une courbe présentant un point d'inflexion pour une valeur ψ de l'angle α correspondant à la section de l'arc pour laquelle le terme d' défini plus haut s'annule. Cette section est située à peu près sur la même horizontale que le centre de gravité G et approximativement $\psi = \frac{2\theta}{13}$

Dans le $\frac{1}{2}$ arc BC les flèches sont symétriques.

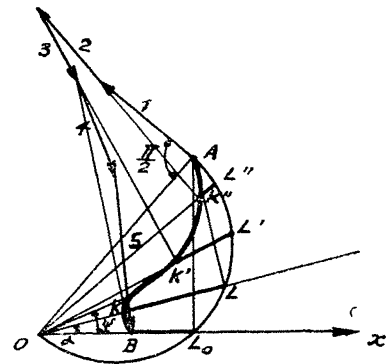


Fig. 11.

Rectification des coefficients z. — Nous avons supposé dans cette étude graphique que la déformation était produite par une pression variable, mais dont la valeur moyenne est $(1 - K_n)$ moyen étendue à l'arc.

Les coefficients z de déformation de l'arc supposent une pression moyenne égale à 1.

On peut donc prendre pour les z rectifiés les valeurs des flèches obtenues graphiquement, divisées par $(1 - K_n)$ moy. On a :

$$z \text{ rectifié} = \frac{\rho \widehat{KL}}{E (1 - K_n)_{\text{moyen}}}$$

Naturellement, il faut faire cette rectification pour toutes les sections des différents arcs situés aux différentes profondeurs.

Cette opération est longue, mais les valeurs de z rectifiées permettront de calculer exactement, pour les coefficients de poussée, des valeurs que l'on pourra considérer comme définitives.

Naturellement on peut, pour chacun des arcs, la ligne des poussées ayant été déterminée, modifier la forme circulaire de l'arc pour adapter le mieux possible sa ligne moyenne à la ligne de poussée.

La forme est d'ailleurs peu changée sauf aux naissances.

Dans le calcul du travail, il faut admettre des taux très bas environ 20 Klgcm à la compression et 4 Klg à l'extension, car il est impossible d'éviter celle-ci à toutes les sections.

L'emploi de ces taux très bas est justifié.

1° Par l'influence énorme de la température.

2° Par le danger considérable que présenterait la ruine de l'ouvrage.

Il nous reste, pour compléter cette étude, à parler de l'influence d'une inégalité de température sur les deux faces.

(A suivre.)