TRANSPORT DE FORCE

Détermination du nouvel équilibre, après rupture d'une portée, des lignes électriques suspendues par chaînes d'isolateurs [1]

L'arrêté du Ministre des Travaux publics du 30 avril 1924 stipule, aux articles 48 et 52 que, « s'il est fait emploi d'isolateurs suspendus, la hauteur minimum des conducteurs doit être évaluée, pour les traversées importantes, en considérant les cas de rupture accidentelle survenant en un point quelconque de la ligne ».

Jusqu'ici la méthode à employer pour ces calculs a été exposée, par divers auteurs, en confondant chaque portée avec une parabole.

Mais il n'en est plus ainsi pour les grandes portées à fort coefficient de sécurité (faible tension); en particulier la tension moyenne ne peut plus être confondue avec la tension au point le plus bas. L'article qui suit est destiné à montrer comment la question peut être traitée dans toute sa généralité.

1er Problème. — Données initiales :

Une portée unique, distance des poteaux : $2\,X_1$.

Tension initiale : T_i *à température* θ.

Câble aluminium-acier de 37 brins.

Calculer ce que sera devenue la portée quand T_i *sera devenue* T_o

Afin de comparer ces résultats à ceux obtenus par M. Colte dans la *R. G. E.* du 12 décembre 1925, je prends comme lui

$2\,X_i = 245^m \qquad T_i = 4^k,76$, pas de surcharge.

Je choisis, comme chaînette de référence, celle dont le module R est $281^m,69$. J'appelle x_1 l'abscisse correspondant par similitude, dans cette chaînette, on a :

$$\frac{245}{2\,x_i} = \frac{T_i}{\pi R} = \frac{4,76}{281,69 \times 0,00385} = \frac{4,76}{1^k,0845065}$$

d'où

$$x_1 = 27^m,91609$$

$$l_i = \frac{R}{2}\left(e^{\frac{x_1}{R}} - e^{-\frac{x_1}{R}}\right) = 27^m,955$$

La longueur initiale du câble est alors :

$$2\,L_1 = 2\,l_i \cdot \frac{245}{2\,x_i} = 245,401$$

Calcul de L_o

La longueur au repos est donnée par la formule :

$$(1\ bis) \qquad 2\,L_o = \frac{2\,L_1}{1 + \lambda \,.\, T_i\,(1 + \eta)}$$

Le coefficient η (2) résulte de ce que la tension moyenne n'est pas T_i ; dans le cas présent, on trouve $\eta = 0,0016$.

Donc : $\qquad 2\,L_o = 245,2666$

car $\qquad \lambda = 115 \,.\, 10^{-6}$.

A la température θ' cette longueur est : $2\,L_0 \dfrac{1 + \alpha\,\theta'}{1 + \alpha\,\theta}$.

Calcul de la diminution de portée quand T_1 *est devenue* $T_o = 2,^k6$.

La formule (1 *bis*) donne encore, en appelant 2 X la nouvelle portée, et 2 L la nouvelle longueur

$$2\,L = 245,2666\ \left[1 + 115.10^{-6} . 2^k,6\ (1 + \eta)\right]$$

Comme η varie peu pour de petites variations de x, et que, de plus, cette variation de η est multipliée par 10^{-6}, on peut adopter pour η la valeur que prend ce coefficient pour une valeur de x très voisine de la valeur réelle et facilement calculable. Or

$$\frac{X}{x} = \frac{L}{l} = \frac{T_o}{\pi R} = \frac{2^k,6}{1,0845}$$

donc :

$$2\,l = 2\,L \,.\, \frac{1,0845}{2,6}$$

valeur très voisine de :

$$2\,l_1 = 245,2666 \,.\, 1,0845 \,.\, \frac{1}{2,6} = 265,99 \,.\, \frac{1}{2,6} = 102,346$$

x réel est donc très voisin de x_1 correspondant à $l_1 = 51^m,17$. Les calculs préliminaires de la chaînette de référence donnent ε_x et ε_{2x} pour $x = 50$ et $x = 52$; par interpolation on en conclut les ε_1 correspondant à l_1 ; on trouve :

$$\varepsilon_{x_1} = 0,277 \qquad \varepsilon_{2x_1} = 2,536.$$

d'où :

$$\eta = 0,007.$$

$2^k,6$ est donc à remplacer, pour le calcul de L, par $2^k,618$. Voici comment doit être conduit le calcul pour réduire les opérations au minimum :

Je pose : $\qquad \varepsilon = 245^m,2666 \,.\, 115.10^{-6} .\ 2^k,618.$

$$2\,L = 2\,L_0 + \varepsilon$$

(1) Les considérations théoriques sur lesquelles est basé cet article seront publiées ultérieurement ; elles comprennent les formules (1), (2), (3), (4) et (5) non mentionnées dans cet article-ci.

(2) $\eta = \dfrac{\varepsilon_{2x} - L\,\varepsilon_x}{2\,l}$; les termes du numérateur sont les différences premières : $l_{2x} - 2\,x$, $l_x - x$, de la chainette de référence.

donc :

$$2\,l = (2\,L_0 + \varepsilon)\,\frac{1{,}0845}{2{,}6} = \frac{2\,L_0 . 1.0845 + \varepsilon\,.\,1.0845}{2{,}6} =$$

$$= \frac{265{,}9916277 + \varepsilon\,.\,1.0845}{2{,}6}.$$

Cette division me donne :

$$2\,l = 102{,}335 \quad \text{d'où } l = 51{,}1675.$$

Les calculs préalables de la chaînette de référence me donnent, par interpolation, au moyen des différences première et seconde :

$$l - x = 0{,}2778 \quad \text{d'où } 2\,(l - x) = 0{,}5556.$$

Je pose :

$$2\,(l - x)\,.\,\frac{T_0}{1{,}0845} = \varepsilon'$$

J'ai :

$$2\,X = 2\,x\,.\,\frac{T_0}{1{,}0845} = [2\,l - 2\,(l - x)]\,\frac{T_0}{1{,}0845} =$$

$$= \left[2\,L\,.\,\frac{1{,}0845}{T_0} - 2\,(l - x)\right]\frac{T_0}{1{,}0845}$$

d'où

$$(6) \quad 2\,X = 2\,L - 2\,(l - x)\,\frac{T_0}{1.0845} = 2\,L - \varepsilon' = 2\,L_0 + \varepsilon - \varepsilon'$$

ou bien :

$$2\,X = 245^{m} + 0{,}2666 + \varepsilon - \varepsilon'$$

Cette manière d'écrire aura surtout sa justification dans le problème suivant :

Ici, je trouve : $2\,X = 244^{m}{,}008.$

et graphiquement :

$$f = 4^{m}{,}60\,.\,\frac{2{,}6}{1{,}0845} = 11^{m}.$$

En refaisant le même calcul pour divers T_0, on obtient les résultats ci-après applicables à tous les câbles al-acier à 37 brins dont la longueur initiale était celle d'une portée de 245^{m} avec $T_1 = 4^{k}{,}76$, quand cette tension devient To, sans variation de température :

T_0	2 X	f
—	—	—
$2^{k}{,}6$	244,008	11^{m}
2,9	244,277	10,10
3,0	244,315	9,7
3,2	244,4765	9
3,3	244,53	8,73
3,4	244,583	8,47
3,5	244,624	8,05
3,712	244,7106	7,70
3,8	244,741	7,60
3,945	244,782	7,20
4,056	244,826	7,10
4,215	244,8795	6,70
4,2677	244,888	6,68
4,4825	244,936	6,35
4,6137	244,969	6,25
4,76	245	6,05

Ce tableau permet de tracer la courbe : $\Delta\,(2\,X) = f\,(T_0)$ ou la courbe $T_0 = \varphi\,(2\,X)$.

2e Problème.

Ligne a plusieurs portées avec chaines d'isolateurs

A une certaine température θ on connaît, pour chaque portée, la distance exacte des points de suspension $2\,X_i$ et la flèche, ce qui revient à connaître la tension T_1 au point le plus bas de chaque portée.

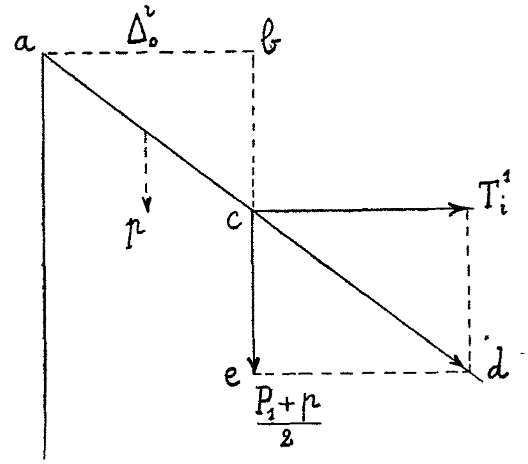
Comme on l'a vu précédemment, on peut donc calculer la longueur L_0^1 de chaque portion de câble sans tension et en déduire leur longueur L_0 au repos à une température quelconque.

Cependant, il se présente une difficulté pour la portée d'ancrage ; on y connaît l'écartement des poteaux Z_1, la longueur des chaînes a et leur poids p, mais on ne connaît pas exactement l'inclinaison de la chaîne d'ancrage ; il faut donc, pour cette portée d'ancrage, connaissant la position de la chaîne du premier poteau après celui d'ancrage, calculer la portée initiale $2\,X_1^1$ au moyen de T_1^1.

Pour les fortes tensions $2\,X_1^1$ diffère infiniment peu de $Z_1 - \Delta_1^1 - a$; mais il est nécessaire d'avoir une méthode de calcul applicable quelle que soit la tension.

Soit s la section du câble, P le poids d'une portée $Z_1 - \Delta_1^1$, de tension T_1^1. J'admets, en première approximation, que le poids du câble d'ancrage à tension T_1^1, est : $P - \pi\,.\,s\,.\,a$; je l'appelle P_1. On a :

$$(7) \quad \frac{e\,d}{e\,c} = \frac{b\,a}{b\,c} \text{ c'est-à-dire : } \frac{T_1^1\;s}{\frac{P_1 + p}{2}} = \frac{\Delta_0^1}{\sqrt{a^2 - (\Delta_0^1)^2}}$$



d'où Δ_0^1 ; connaissant la portée $(Z_1 - \Delta_1^1 - \Delta_0^1)$ et T_1^1, je calcule x puis L_1^1 comme il est indiqué dans le 1er problème. A cette longueur L_1^1 correspond un poids P'_1 différant légèrement de P_1. Ce poids P'_1 introduit dans la formule (7) me donne une nouvelle valeur Δ' de Δ_0^1. A un infiniment petit près, la vraie longueur est $L_1^1 \pm (\Delta_0^1 - \Delta')$; la modification qui en résulte pour P'_1 est absolument négligeable ; cependant si à la longueur $L_1^1 \pm (\Delta_0^1 - \Delta')$ correspondait un poids P_1'' différant sensiblement de P'_1, on calculerait une nouvelle approximation par le même procédé.

Connaissant la longueur sous tension T_1^1 et la portée $(Z_1 - \Delta' - \Delta_1^1)$, on calcule la longueur sans tension L_0^1 comme il a été indiqué précédemment.

On a donc, finalement, les longueurs au repos de chaque portion de la ligne ; elles suffisent pour déterminer le nouvel état d'équilibre après rupture, à une température θ', survenant dans la $(n + 1)^{me}$ portée au delà du poteau d'ancrage, en admettant qu'il n'y a pas glissement dans les attaches et pas de fléchissement des poteaux. J'appellerai : Z_1, Z_2, Z_n les écartements des poteaux ;

$$2\,L_0^1 \quad 2\,L_0^2 \ldots . 2\,L_0^p \ldots . 2\,L_0^n$$

les longueurs sans tension à la température de la rupture,

$$2\,X_1^1 \quad 2\,X_1^2 \ldots . 2\,X_1^p \ldots . 2\,X_1^n$$

les distances initiales entre les points de suspension au moyen desquelles ont été calculées les longueurs ci-dessus.

$$P_1 \qquad P_2 \ldots . P_p \ldots . P_n$$

le poids des portions de câble des longueurs $2\ L_0^1$, $2\ L_0^2$, — $2\ L_0^n$

$$\Delta_0 \qquad \Delta_1 \qquad \Delta_2 \ldots . \Delta_p \ldots . \Delta_n$$

les écartements de chaque point d'attache de son poteau après la rupture envisagée,

$$\Delta\ X_1 \qquad \Delta\ X_2 \ldots . \Delta\ X_p \ldots . \Delta\ X_n$$

les variations de portée résultant de cette rupture.

$$T_1 \qquad T_2 \ldots . T_p \ldots . T_n$$

les nouvelles tensions aux points les plus bas.

Pour chaque portée on a calculé au préalable l'abaque $\Delta\ X_p = f\ (T_p)$ à la température θ', la tension initiale à la température θ étant T_i^p (Voir 1er problème).

La formule (7) donne :

$$(7\ bis) \qquad \frac{(T_p - T_{p+1})\ s}{\frac{P_p + P_{p+1} + p}{2}} = \frac{\Delta_p}{\sqrt{a^2 - \Delta_p^2}}$$

Pour chaque valeur de $P_p + P_{p+1}$ construire la courbe :

$$\Delta\ T = \varphi\ (\Delta_p)$$

Au n^{me} point d'attache la formule précédente devient :

$$\frac{T_n \cdot s}{\frac{P_n + p}{2}} = \frac{\Delta_n}{\sqrt{a^2 - \Delta_n^2}}$$

d'où :

$$(8) \qquad \Delta_n = \frac{a\ T_n}{\sqrt{\left(\frac{P_n + p}{2 \cdot s}\right)^2 + T_n^2}}$$

Chaque valeur de T_n portée dans cette formule donne une valeur de Δ_n ; la valeur $\Delta\ X_n$ correspondante est prise dans l'abaque $\Delta\ X_n = f\ (T_n)$; on a ensuite :

$$\Delta_{n-1} = \Delta_n - \Delta\ X_n - (Z_n - 2\ X_n)$$

L'abaque de la formule (7 *bis*) donne alors $T_{n-1} - T_n$ d'où T_{n-1} et ainsi de suite, chaque tension T_p étant déduite de la précédente au moyen de la valeur trouvée pour Δ_p, chaque $\Delta\ X_p$ correspondant à T_p étant prise dans l'abaque $\Delta\ X_p = f\ (T_p)$, et chaque Δ_{p-1} résultant de Δ_p et de $\Delta\ X_p$ par suite de la relation :

$$(9) \qquad \Delta_{p-1} = \Delta_p - \Delta\ X_p - (Z_p - 2\ X_p)$$

De chaque valeur essayée pour T_n on déduira donc finalement la valeur correspondante de T_1 ; la valeur correspondante de Δ_0 résulte de la relation :

$$(10) \qquad Z_1 - 2\ X_1 = \Delta_1 + \Delta_0$$

relation dans laquelle $2\ X_1$ est la nouvelle distance entre les points de suspension, c'est-à-dire : $2\ X_1 = 2\ X_i^1 - \Delta\ X_1$; la relation précédente s'écrit donc :

$$(10\ bis) \qquad \Delta_0 = -\Delta_1 + \Delta\ X_1 + (Z_1 - 2\ X_i^1)$$

Mais, d'autre part, pour la valeur T_1 résultant du T_n essayé, la formule (7), sans l'indice *i*, donne, pour l'écartement du point d'attache d'ancrage Δ'_0, la formule d'équilibre :

$$(8\ bis) \qquad \Delta'_0 = \frac{a\ T_1}{\sqrt{\left(\frac{P_1 + p}{2}\right)^2 + T_2^1}}$$

Si Δ_0 est plus petit que Δ'_0 c'est que la valeur de T_n essayée est trop forte ; si, au contraire, $\Delta_0 > \Delta'_0$ c'est que T_n est trop faible.

Mais la zone de recherche de T_n est considérablement réduite grâce aux deux remarques ci-après :

a) Appelons T'_n la tension que prendrait la n^{me} portée si les deux portées voisines étaient rompues simultanément ; la tension à trouver est certaiènement supérieure à T'_n.

b) Appelons T''_n la tension que prendrait la n^{me} portée si après rupture de la $(n + 1)^{me}$ portée, on appliquait à la $(n - 1)^{me}$ portée une tension égale à la tension initiale T_i^{n-1} correspondant à l'équilibre de cette portée à la température θ', avant rupture de la $(n + 1)^{me}$ portée ; la tension à trouver est certainement inférieure à T''_n, puisque la tension réelle de la $(n - 1)^{me}$ est inférieure à la tension initiale.

C'est donc seulement entre T'_n et T''_n que devront porter les recherches.

Après que, au moyen des abaques résultant des formules (6), (7 *bis*) et (8), on sera parvenu à des limites suffisamment étroites pour les valeurs extrêmes de T_n desquelles résulte un signe nettement apparent de $\Delta_0 - \Delta'_0$, on devra effectuer les calculs pour les valeurs intermédiaires à essayer, au moyen des formules elles-mêmes, la précision des courbes graphiques devenant insuffisante quand on se rapproche du T_n exact du nouvel équilibre.

Je vais maintenant appliquer les considérations ci-dessus à un exemple ; pour simplifier je prendrai une série de poteaux équidistants et je supposerai que l'équilibre avant rupture est réalisé pour la position verticale de toutes les chaînes autres que celle d'ancrage, c'est-à-dire tension initiale T_i égale d'un bout à l'autre de la ligne.

Je prendrai, comme M. Cotte, le cas d'une rupture se produisant à la 6e portée après le poteau d'ancrage. N'ayant pas de données précises sur les longueurs et les poids des chaînes d'isolateurs des lignes étudiées par cet auteur, j'ai pris, au hasard, $a = 1$ mètre, $p = 40$ kg.

La position initiale de chaque chaîne, sauf celle d'ancrage, étant verticale, on a :

Pour la portée d'ancrage : $Z_1 = 2\ X_i^1 + \Delta_0^i$,

Pour toutes les autres : $Z_p = 2\ X_p^i$.

La formule (9) devient donc :

$$(9\ bis) \qquad \Delta_{p-1} = \Delta_p - \Delta\ X_p$$

Or, la formule (6) appliquée à la portée d'ancrage, est :

$$(6\ bis) \qquad 2\ X_1 = 2\ L_0^1 + \varepsilon_1 - \varepsilon'_1$$

Appliquée aux autres portées, et remarquant que $2\ X = 2\ X_i - \Delta\ X$, elle devient :

$$(6\ ter) \qquad 2\ X_i^p - \Delta\ X_p = 2\ L_0^p + \varepsilon_p - \varepsilon'_p$$

d'où

$$-\Delta\ X_p = (2\ L_0^p - 2\ X_i^p) + \varepsilon_p - \varepsilon'_p$$

Il résulte alors de (9 *bis*) et de (6 *ter*) :

$$(11) \qquad \Delta_{p-1} = \Delta_p + (2\ L_0^p - 2\ X_i^p) + \varepsilon_p - \varepsilon'_p$$

de (10) et de (6 *bis*) :

$$\Delta_0 = -\Delta_1 + Z_1 - 2\ L_0^1 + \varepsilon'_1 - \varepsilon_1$$

c'est-à-dire :

$$(12) \qquad \Delta_0 = \varepsilon'_1 + (Z_1 - 2\ L_0^1) - \varepsilon_1 - \Delta_1$$

Je prends les mêmes données initiales que celles du premier problème :

$2\ X_1 = 245^m \qquad T_i = 4^k,76 \qquad \pi = 0^k,00385.$

$\lambda = 115.10^{-6}$ Chaînette de référence : $R = 281,69$.

On a trouvé : $2\ L_0 = 245^m,2666$.

Ce résultat est applicable à tous les câbles aluminium-acier de 37 brins.

Je choisis un câble dont chaque brin a $\left(\frac{255}{100}\right)^{mm}$ de diamètre.

Calcul des poids, au moyen des longueurs sous tension :

La section totale est :

$$37 \cdot \frac{\overline{2,55}^2}{4}\ 3,1416 = 37 \cdot 5,107 = 188^{m/m^2},96 = s$$

Poids par km. : $188,96 \times 3^k,85 = 727^k,498$.

Le poids qui intervient dans les formules qui ont été utilisées pour la détermination de L_0 est le poids par mètre sous tension ; il est légèrement différent du poids par mètre sans tension par suite de l'allongement. Comme on a admis $\pi = 0^k,00385$ sous tension, le poids qui en résulte est, non pas $\pi . s . 2 L_0$, mais $\pi . s . 2 L_i$. On a trouvé, au premier problème, $2 L_i = 245^m,401$. Donc le P à introduire dans les formules (7 *bis*), (8), est :

$$P = 727,498 . \frac{245}{1000} = 178^k,528$$

Le poids de la portée d'ancrage est calculé comme il a été exposé au début de ce chapitre, c'est-à-dire :

En première approximation : $P_1 = P - \pi . s . a . = 178^k,528 - 0^k,727 = 177^k,801$.

J'introduis ce P_1 dans la formule (7)

$$\frac{4,76 . s.}{\frac{177,8 + 40}{2}} = \frac{\Delta_0^1}{\sqrt{1 - (\Delta_0^1)^2}}$$

d'où :

$$\Delta_0^1 = \frac{4,76}{\sqrt{\left(\frac{177,8 + 40}{2 . s .}\right)^2 + 4,76^2}} = \frac{4,76}{\sqrt{0,33212 + 4,76^2}} = $$
$$= 0,9929$$

En admettant provisoirement cette valeur, la distance initiale des points de suspension de la portée d'ancrage serait donc :

$$245^m - 0,9929 = 244^m,0071.$$

Connaissant $2 X_i^1$ et T_i^1 je calcule la longueur $2 L_i^1$ comme indiqué au premier problème, je trouve $2 L_i^1 = 244,402$. En comparant cette longueur sous tension 4,76 à celle trouvée pour la portée 245^m sous même tension $2 L_i = 245^m,401$ on voit que l'erreur commise, en admettant que la différence de ces deux longueurs est 1 mètre, est absolument négligeable pour l'évaluation du poids. En d'autres termes la correction à apporter à P_1 ne modifie pas Δ_0^1. Donc $2 X_i^1 = 244^m,0071$ est exact, donc $2 L_i^1 = 244,402$ l'est aussi. Le calcul de $2 L_0^1$ se fait ensuite comme indiqué au 1er problème, je trouve :

$$2 L_0^1 = 244^m,2737.$$

Recherche des valeurs limites de T_5 :

On a vu précédemment que la limite inférieure correspond au cas hypothétique de rupture aux 4e et 6e portées. Soit $2 X'_5$ l'écartement des points d'attache correspondant à ce nouvel équilibre de la 5e portée, Δ'_5 l'éloignement qui en résulte pour chaque point d'attache par rapport à son poteau.

J'essaye une tension quelconque $2^k,6$; l'abaque du 1er problème me donne $2 X'_5 = 244,008$; d'autre part la formule (8) donne

$$\Delta'_5 = 0,976. \ 244,008 + 2.0,976 = 245,960$$

Donc $2^k,6$ est trop fort ; en la diminuant, $2 X'_5$ va diminuer, de même que Δ'_5.

J'essaye ainsi successivement $2^k,4 - 2^k,1$. Cette dernière me donne $2 X'_5 + 2\Delta'_5 < 245$. Elle est donc trop faible. Finalement je trouve que $2^k,2$ correspond approximativement à l'équilibre.

On a vu précédemment que la limite supérieure résulte du cas hypothétique où, après rupture de la 6e portée, la traction exercée par la 4e portée sur le poteau de la 5e portée était maintenue à la valeur initiale $4^k,76$.

La formule (7 *bis*) donne :

$$\Delta'_4 = \frac{T_4 - T_5}{\sqrt{1,10376 + (T_4 - T_5)^2}}$$

J'essaye $T_5 = 3^k,76$, d'où $T_4 - T_5 = 1$; d'où $\Delta'_4 = 0,689$.

D'autre part, pour $T_5 = 3^k,76$, l'abaque du 1er problème donne $2 X'_5 = 244,728$.

Enfin la formule (8) donne :

$$\Delta'_5 = \frac{3,76}{\sqrt{0,3343 + (3,76)^2}} = 0,99$$

Comme $245 - 244,728 + 0,689 = 0,961$, alors que $\Delta'_5 = 0,99$, c'est que 3,76 est trop fort.

J'essaye $T_5 = 3,6$. Elle donne : $\Delta'_4 = 0,74$.

L'abaque du 1er problème donne : $2 X'_5 = 244,6715$.

$245 - 244,6715 + 0,74 = 1^m,11$, donc > que Δ'_5 qui est au plus égal à 1.

Donc $3^k,6$ est trop petit.

Par conséquent la limite supérieure de T_5 obtenue par ce procédé est comprise entre $3^k,6$ et $3^k,76$.

Essais au moyen des abaques des formules (6), (7 *bis*) et des formules (7), (8).

Les limites extrêmes des essais étant $2^k,2$ et $3^k,7$, j'essaye

$$T_5 = \frac{2,2 + 3,7}{2} = \underline{3 \text{ kg.}}$$

La formule (8) s'écrit :

$$\text{(I)} \qquad \boxed{\Delta_5 = \frac{T_5}{\sqrt{0,3343 + T_5^2}}}$$

elle donne : $\Delta_5 = 0,985$.

La formule (6) s'écrit, pour les portées de 245 m. de cette ligne, puisque $240 = 245,2666$;

$$\text{(II)} \qquad \boxed{2 X = 245^m + 0^m,2666 + \varepsilon - \varepsilon'}$$

elle donne un abaque que j'appellerai (II), où je lis :

$$2 X_5 = 244^m,315.$$

La formule (9 *bis*) me fournit ensuite :

$$\Delta_4 = 0.300.$$

La formule (7 *bis*) est ici :

$$\text{(III)} \qquad \boxed{T_p - T_{p+1} = 1,0506 \frac{\Delta_p}{\sqrt{1 - \Delta_p^2}}}$$

elle donne un abaque que j'appelle (III), où je lis :

$$T_4 - T_5 = 0,327.$$

d'où : $T_4 = 3^k,327$.

L'abaque (II) indique, pour cette tension, $2 X_4 = 244,5356$.

De la formule (9 *bis*) il résulterait alors :

$$\Delta_3 = 0,300 - (245 - 244,5356) = - 0,165.$$

ce qui prouve l'insuffisance de la tension essayée.

J'ai donc maintenant, comme limites, 3^k et $3^k,7$.

J'essaye $\frac{3 + 3,7}{2}$ c'est-à-dire approximativement $3^k,4$.

Je prends: $\underline{T_5 = 3^k,4.}$

(I) donne $\Delta_5 = 0,986$.
(II) donne $2 X_5 = 244,583$.
(9 *bis*) donne $\Delta_4 = 0,569$.
(III) donne $T_4 = 4,217$
(II) donne $2 X_4 = 244,88$
(9 *bis*) donne $\Delta_3 = 0,449$
(III) donne $T_3 = 4^k,62$.
(II) donne $2 X_3 = 244,96$ environ.
(9 *bis*) donne $\Delta_2 = 0,445$.
(III) donne $T_2 = T_2 = - 5$ kg.

Donc $T_5 = 3^k,4$ est trop fort, alors que 3^k était trop faible.

J'essaye maintenant

$$3^k,2 = \frac{3 + 3,4}{2}$$

Mais comme les limites sont assez rapprochées et que les abaques pourraient conduire à un résultat insuffisamment précis qui m'amènerait ensuite à un essai en dehors de la nouvelle limite vraie, j'opère par le calcul ; un exemple complet de la marche des calculs étant donné plus loin, je me contenterai ici d'enregistrer les résultats obtenus :

$T_5 = 3^k,2.$

$$\Delta_5 = 0,9843.$$
$$\text{Formule (II)} : \Delta_4 = 0,4608.$$
$$\text{Formule (III)} : T_4 = 3,7454$$
$$\text{Formule (II)} : \Delta_3 = 0,1885.$$
$$\text{Formule (III)} : T_3 = 3,8725.$$
$$\text{Formule (II)} : \Delta_2 = -0,041.$$

Donc $3^k,2$ est trop faible ; j'essaye alors

$$\frac{3,4 + 3,2}{2} = 3,3$$

$T_5 = 3^k,. 3.$

J'obtiens au moyen des mêmes formules que ci-dessus :

$$\Delta_5 = 0,985$$
$$\Delta_4 = 0,515$$
$$T_4 = 3,9313$$
$$\Delta_3 = 0,305$$
$$T_3 = 4,2677$$
$$\Delta_2 = 0,1933$$
$$T_2 = 4,4747$$
$$\Delta_1 = 0,1312$$
$$T_1 = 4,6137.$$

La formule (12) donne alors :

$$\Delta_0 = \varepsilon'_1 + (245 - 244,2737) - \varepsilon_1 - 0,1312$$

c'est-à-dire :

$$\Delta_0 = \varepsilon'_1 + 1 - (0,2737 + \varepsilon_1 + 0,1312)$$

Les quantités ε et ε' ont été définies au cours du 1er problème, on trouve :

$$\varepsilon_1 = 2\,L_1 - 2\,L_0 = 0,1299$$
$$\varepsilon'_1 = 2\,(l_1 - x)\,\frac{T_1}{1,0845} = 0,4237$$

donc $\Delta_0 = 0,889.$

La formule (8 *bis*) s'écrit :

$$\text{(IV)} \qquad \boxed{\Delta'_0 = \frac{T_1}{\sqrt{0,3321 + T_1^2}}}$$

Pour $T_1 = 4,6137$, elle donne :

$$\Delta'_0 = 0,9924.$$

Puisque Δ'_0 est plus grand que Δ_0, c'est que $T_5 = 3^k,3$ est trop fort. La solution est donc entre 3,2 et 3,3 ; mais, en comparant les résultats obtenus dans ces deux derniers essais, on se rend compte que 3,3 est assez proche de la solution tandis que 3,2 en est assez loin.

J'essaye alors $T_5 = 3^k27,.$

En opérant comme précédemment, je trouve que 3,27 est trop petit mais plus voisin de la solution que $3^k,3$.

J'essaye donc $3^k,28$, par laquelle je montrerai, à titre d'exemple, le développement complet des calculs.

$T_5 = 3^k,28$. La formule (1^{bis}) donne :

$$2\,L_5 = 2\,L_0\,[1 + \lambda\,(T_5 + \eta)]$$

η est défini dans le 1er problème où on a vu un exemple de calcul de ce coefficient ; ici, en se reportant aux tables de η établies pour la chaînette de référence R = 281,69 on trouve $\eta = 0,0163$.

Comme on l'a fait dans le 1er problème, je pose :

$$\varepsilon = \lambda\,(T_5 + \eta)\,2\,L_0 = 115.10^{-6}(3,2913)\,.\,245,266 = 0,092947$$

$2\,l$ de la chaînette de référence est définie par :

$$2\,l_5 = (2\,L_0 + \varepsilon)\,\frac{\eta\,R}{3,28} = \frac{2\,L_0\,.\,1,0845 + \varepsilon\,.\,1,0845}{3,28}$$

Le terme 1,0845.2 Lo qui se retrouve dans tous les calculs est obtenu une fois pour toutes, je l'appelle A ; A = 265,991627 ; donc

$$2\,l_5 = \frac{A + \varepsilon\,.\,1,0845}{3,28} = 81,1257$$

d'où $l_5 = 40,56285.$

Les tables de la chaînette de référence donnent, par interpolation, au moyen des différences première et seconde, pour cette valeur de l : $l - x = 0,13882.$

d'où $2\,(l - x) = 0,27764.$

Je calcule :

$$\varepsilon' = 2\,(l - x)\,.\,\frac{3,28}{1,0845} = 0,8397$$

Je calcule Δ_5 par la formule (I) : $\Delta_5 = 0,9849.$

La formule (II) devient pour la ligne étudiée :

$$\text{(V)} \qquad \boxed{\Delta_{p-1} = \Delta_p + 0,2666 + \varepsilon_p - \varepsilon'_p}$$

qui, ici, donne :

$$\Delta_4 = 0,9849 + 0,266 + 0,0929 - 0,8397 = 0,5047.$$

La formule (III) donne alors : $T_4 - T_5 = 0,6142.$

d'où $T_4 = 3,8942.$

Pour T_4 je calcule comme ci-dessus pour T_5, ε ε' ; (V) me donne ensuite Δ_3.

$$\Delta_3 = 0,2832.$$

de (III) je tire ensuite : $T_3 - T_4 = 0,3102$, d'où : $T_3 = 4,2044.$ Je recommence pour T_3 des calculs analogues à ceux exposés en détail par T_5 ; j'ai $\eta = 0,0134$ et je trouve : $\varepsilon = 0,1188.$

$$2\,l_3 = \frac{A + \varepsilon\,.\,1,0845}{4,2044} = 63,2957$$

Les tables de la chaînette de référence me donnent ensuite $2\,(l - x)$, d'où je conclus :

$$\varepsilon' = 2\,(l - x)\,.\,\frac{4,2044}{1,0845} = 0,5142$$

Ensuite (V) donne :

$$\Delta_2 = 0,2832 + 0,2666 + 0,1188 - 0,5142 = 0,1544.$$

Cette valeur de Δ_2 portée dans (III) fournit : $T_2 = 4,3685.$

Pour T_2 je calcule, comme précédemment, ε ε' ; ensuite (V) donne : $\Delta_1 = 0,0681.$

qui, portée dans III, fournit : $T_1 = 4,4402.$

Le η correspondant est 0,012 ; alors :

$$\varepsilon_1 = 4,452.115.10\,.\,244,2737 = 0,1249.$$

Je calcule ensuite : $2\,L_0^1\,.\,1,0845 = 264,9148.$

et $\varepsilon\,.\,1,0845 = 0,13545.$

puis :

$$\frac{264,9148 + 0,13545}{4,4402} = 59,696 = 2\,l_1$$

Les tables de la chaînette de référence me donnent :

$$2\,(l_1 - x) = 0.11128.$$

Je calcule :

$$\varepsilon'_1 = 2\,(l_1 - x)\,.\,\frac{4,4402}{1,0845} = 0,4555$$

J'applique enfin la formule (12) qui donne, comme on l'a vu dans le calcul du Δ_0 résultant de $T_5 = 3,3$:

$$\Delta_0 = \varepsilon'_1 + 1 - (0,2737 + \varepsilon_1 + 0,0681) = 0,9888$$

D'autre part la formule (IV) donne : $\Delta'_0 = 0,9917.$

Donc $T_5 = 3,28$ est un peu trop fort ; mais la différence $\Delta'_0 - \Delta_0$ étant seulement de $0^m,0029$, on pourra admettre que $T_5 = 3^k,28$ correspond sensiblement au nouvel équilibre.

Pour avoir la flèche de chaque travée on opère ainsi : de $2\,(l - x)$ et de $2\,l$ on conclut $2\,x$; on multiplie $2\,y$ par le rapport de similitude $\dfrac{T}{1,0845}$. Les résultats obtenus sont :

5e	portée	$T_5 = 3,28$	$f_5 = 8^m,69$
4e	—	$T_4 = 3,8942$	$f_4 = 7^m,35$
3e	—	$T_3 = 4,2044$	$f_3 = 6^m,78$
2e	—	$T_2 = 4,3685$	$f_2 = 6^m,54$
1re	—	$T_1 = 4,4402$	$f_1 = 6^m,36.$

Cdt DEWULF.