

ÉLECTRICITÉ

Calcul mécanique des lignes électriques dans le cas de longues portées en forte pente

Tout câble en équilibre constitue un segment de chaînette ; mais, quand les points d'attache sont à des niveaux différents, les déformations résultant des changements de température, du vent, du givre, ne sont plus symétriques, comme elles le sont dans le cas des portées horizontales. On cherche néanmoins généralement, au moyen de diverses approximations, à donner aux formules d'équilibre des portées inclinées, une forme semblable à celles des câbles tendus entre deux points d'attache au même niveau ; on peut ainsi utiliser les abaques établis pour ces dernières. Mais, dans les cas où une plus grande précision est nécessaire, l'exactitude primant alors la rapidité, il est utile de disposer de méthodes de calcul plus rigoureuses.

Le but du présent article est de comparer entre eux les degrés d'exactitude des abaques et des calculs.

I. — ETUDES THÉORIQUES PRÉLIMINAIRES

Avant d'examiner les méthodes employées dans la pratique, il a paru nécessaire d'analyser tout d'abord la question avec une rigueur mathématique ; si, par la suite, les formules ainsi obtenues sont reconnues inemployables industriellement, elles permettront tout au moins de déterminer éventuellement des points de repère d'une précision absolue donnant une base solide pour l'évaluation du degré de précision réalisé dans les tableaux de pose.

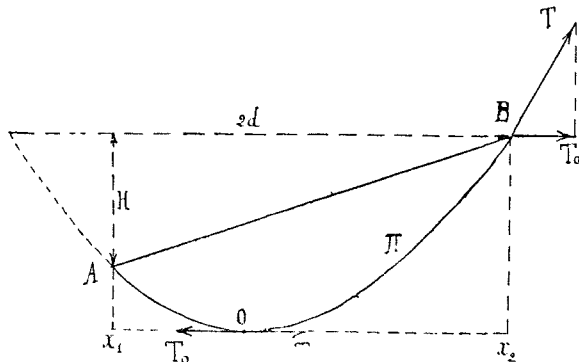


Fig. 1.

Appelons Π la force (poids et surcharge produite par le vent ou le givre) agissant sur l'unité de longueur du câble. Il est à noter que la tension n'étant pas la même tout le long du câble, l'allongement n'est pas uniforme ; le poids par unité de longueur n'est donc pas constant dans un câble sous tension ; la courbe d'équilibre réelle n'est pas, par suite, une chaînette parfaite. Nous raisonnerons cependant sur une courbe géométrique dont le Π constant sera la moyenne des Π' variant d'un point à l'autre du câble ; en d'autres termes, $\Pi = \frac{S \Pi' d l}{l}$, en appelant l la longueur de l'arc réel. P étant la force totale externe, on a bien, ainsi, $P = \Pi L$.

Le module de cette chaînette est :

$$m = \frac{T_0}{\Pi}$$

Les formules suivantes sont connues :

$$(1) \quad Y = \frac{m}{2} \left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}} \right) = m \cdot \cos h \frac{x}{m}$$

$$(2) \quad l_x = \frac{m}{2} \left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}} \right) = m \sin h \frac{x}{m}$$

On sait que, en appelant t la tension au point x , on a :

$$Y = \frac{t}{\Pi}$$

Y est l'ordonnée par rapport à un axe horizontal placé à une distance m au-dessous de o .

l_x est la longueur de l'arc compris entre o et le point d'abscisse x .

1. *Longueur de l'arc de chaînette.* — On a appelé précédemment l la longueur de l'arc réel. C'est aussi la longueur de la chaînette, en prenant pour force totale $P = \Pi l$.

Les équations précédentes donnent :

$$Y_1 = m \cos h \frac{x_1}{m} \quad Y_2 = m \cos h \frac{x_2}{m}$$

$$l_1 = m \sin h \frac{x_1}{m} \quad l_2 = m \sin h \frac{x_2}{m}$$

Donc, puisque $l = l_1 + l_2$ et $H = Y_2 - Y_1$,

$$l^2 = m^2 \left(\sin^2 h \frac{x_1}{m} + \sin^2 h \frac{x_2}{m} + 2 \sin h \frac{x_1}{m} \sin h \frac{x_2}{m} \right)$$

$$H^2 = m^2 \left(\cos^2 h \frac{x_1}{m} + \cos^2 h \frac{x_2}{m} - 2 \cos h \frac{x_1}{m} \cos h \frac{x_2}{m} \right)$$

Retranchons nombre à nombre :

$$\frac{l^2 - H^2}{m^2} = -1 - 1 + 2 \left(\sin h \frac{x_1}{m} \sin h \frac{x_2}{m} + \cos h \frac{x_1}{m} \cos h \frac{x_2}{m} \right)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{l^2 - H^2}{m^2} = 2 \left[-1 + \cos h \frac{x_1 + x_2}{m} \right] = 2 \cdot 2 \cdot \sin^2 h \frac{x_1 + x_2}{2m}$$

ERRATUM

Page 52, renvoi (2), lire :

$$\eta = \frac{\varepsilon^2 x - 4 \varepsilon x}{2 l} \quad \text{et non} \quad \frac{\varepsilon^2 x - L \varepsilon x}{2 l}$$

Page 53, 4^{me} alinéa de la colonne de droite, lire :

$$Z_1 = \Delta_1 - a \quad \text{et non} \quad Z_1 = \Delta - a$$

Page 54, formule (8), le dénominateur est T_0^3 et non T_0 .

Page 55, 2^{me} alinéa de « Recherche des valeurs ... », lire : « J'essaye.... ; d'autre part la formule (8) donne :

$$\Delta'_5 = 0,976$$

Comme $244,008 + 2,0976 = 245,960$, c'est que 246 est trop fort

Page 56, « J'essaye alors $T_5 = 3^{27}$ », la 3^{me} ligne de ce paragraphe est : « J'essaye donc 3^{28} pour laquelle, et non par laquelle.

Page 56, colonne de gauche, au bas, lire :

$$2 l_5 = (2 L_0 + \varepsilon) \frac{\pi R}{3,28} \quad \text{et non} \quad = (2 L_0 + \varepsilon) \frac{\eta R}{3,28}$$

d'où :

$$l^2 = 4 m^2 \sin^2 h \frac{x_1 + x_2}{2m} + H^2 = \left[2 \left(m \sin h \frac{d}{2m} \right) \right]^2 + H^2$$

La partie entre parenthèses est le double de la longueur de l'arc, l d'un point d'abscisse d , d'où :

$$(3) \quad l^2 = (2 l_d)^2 + H^2$$

Cette remarque ramène l'étude de la variation de la longueur d'une portée en pente à l'étude de la variation de la longueur de la portée horizontale de même module dont la distance des points d'attache serait la projection horizontale de celle de la portée en pente.

2. *Longueur du câble libre (l_0)* c'est-à-dire en supposant que toute tension disparaît sans changement de température.

Soit t la tension en un point quelconque de la chaînette considérée, dl_0 la longueur de la n^{me} partie du câble libre, à la même température, n étant pris assez grand pour que dl_0 puisse être considéré comme un infiniment petit.

Par suite de la tension t , dl_0 est devenue :

$$(4) \quad ds = dl_0 (1 + \lambda t)$$

La force externe agissant sur ds est Πds .

Soit Y_g l'ordonnée du centre de gravité du câble en équilibre ; Y_g est défini par l'équation connue du centre de gravité d'un corps quelconque :

$$(5) \quad P Y_g = \int_{-x_1}^{x_2} Y \cdot \Pi ds$$

c'est-à-dire

$$\Pi l Y_g = \Pi \int_{-x_1}^{x_2} Y ds$$

donc :

$$(5 \text{ bis}) \quad Y_g = \frac{\int_{-x_1}^{x_2} Y ds}{l}$$

Considérons un arc élémentaire ds défini par l'équation (4) ; imaginons que les conditions extérieures (vent, température, givre) restent les mêmes, nous faisons décroître progressivement la tension du câble ; la tension t de l'élément ds diminuera mais la force externe Πds agissant sur cet élément restera invariable, de même, donc, aussi, la force externe totale P . Quant t sera devenu nul, l'élément ds sera redevenu ce qu'il était avant d'être soumis à t , c'est-à-dire dl_0 ; comme on avait choisi

$$dl_0 = \frac{l_0}{n},$$

il supportera le n^{me} partie de la force externe totale P ; on vient de voir, d'autre part, que la force interne agissant sur ce même élément n'a pas varié pendant que t diminuait ; donc :

$$\frac{P}{n} = \Pi ds$$

alors, voir (5) :

$$P Y_g = \int_{-x_1}^{x_2} Y \cdot \Pi ds, \text{ est aussi égal à } \int_{-x_1}^{x_2} Y \frac{P}{n}$$

c'est-à-dire que :

$$P Y_g = P \int_{-x_1}^{x_2} Y \cdot \frac{1}{n} \text{ ou bien : } Y_g = \int_{-x_1}^{x_2} Y \cdot \frac{1}{n}$$

Mais, par suite de la définition de dl_0 ,

$$\frac{dl_0}{l_0} = \frac{1}{n}$$

donc :

$$(6) \quad Y_g = \int_{-x_1}^{x_2} Y \frac{dl_0}{l_0}$$

D'autre part, l'équation (4) intégrée devient :

$$l = l_0 + \lambda \int_{-x_1}^{x_2} t dl_0$$

Remplaçant t par sa valeur ΠY :

$$l = l_0 + \lambda \Pi \int_{-x_1}^{x_2} Y dl_0$$

c'est-à-dire :

$$l = l_0 \left(1 + \lambda \Pi \int_{-x_1}^{x_2} Y \frac{dl_0}{l_0} \right)$$

c'est-à-dire, vu (6) :

$$l = l_0 (1 + \lambda \Pi Y_g)$$

ou bien, par suite de (5 bis) :

$$l = l_0 \left(1 + \lambda \Pi \frac{\int_{-x_1}^{x_2} Y ds}{l} \right)$$

comme $\Pi Y = t$

$$l = l_0 \left(1 + \lambda \frac{\int_{-x_1}^{x_2} t ds}{l} \right)$$

Le deuxième terme de la parenthèse est la tension moyenne

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_m \\ T_m = \frac{\int_{-x_1}^{x_2} t ds}{l} \\ l = l_0 (1 + \lambda T_m) \end{array} \right.$$

Calculons T_m .

ds est la longueur d'un arc infiniment petit du câble en équilibre ; elle est donc aussi la longueur d'un arc infiniment petit de la chaînette représentée par les équations (1) et (2) :

$$ds = d \cdot lx = \cos h \frac{x}{m} \cdot dx$$

comme

$$t = \Pi Y = \Pi \cdot m \cdot \cos h \frac{x}{m},$$

on a donc :

$$t \cdot ds = \Pi \cdot m \cdot \cos^2 h \frac{x}{m} \cdot dx$$

donc :

$$T_m = \frac{\Pi \cdot m}{l} \int_{-x_1}^{x_2} \cos^2 h \frac{x}{m} \cdot dx$$

Mais :

$$\cos^2 h \frac{x}{m} = \frac{\cos h \frac{2x}{m} + 1}{2}$$

Donc :

$$\int_{-x_1}^{x_2} \cos^2 h \frac{\partial}{\partial x} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{m}{2} \sin h \frac{2x}{m} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[x_1 + x_2 + \frac{m}{2} \left(\sin h \frac{2x_2}{m} + \sin h \frac{2x_1}{m} \right) \right]$$

par conséquent, puisque $x_1 + x_2 = 2d$, voir (fig. 1) :

$$T_m = \frac{\Pi \cdot m}{2l} \left[2d + \frac{m}{2} \left(\sin h \frac{2x_2}{m} + \sin h \frac{2x_1}{m} \right) \right]$$

En conservant les notations de l'équation (2), cette équation-ci s'écrit, en observant que $\Pi m = T_0$:

$$(7 \text{ bis}) \quad T_m = \frac{T_0}{2l} \left[2d + \frac{1}{2} (l_{x_2} + l_{x_1}) \right]$$

ou encore, en écrivant $\frac{2x}{m}$ sous la forme $\frac{x}{\frac{m}{2}}$ et appelant l'_x la

longueur de l'arc d'abscisse x dans la chaînette de module $\frac{m}{2}$:

$$(7 \text{ ter}) \quad T_m = \frac{T_0}{2l} \left[2d + \frac{1}{2} (l'_{x_2} + l'_{x_1}) \right]$$

$l'_{x_2} + l'_{x_1}$ est la longueur de l'arc découpé par les verticales x_2 et x_1 dans la chaînette de module $\frac{m}{2}$. Cette remarque sera utilisée ultérieurement.

Reprenons l'expression de T_m en fonction des sinus hyperboliques; on a :

$$\sin h \frac{2x_2}{m} + \sin h \frac{2x_1}{m} = 2 \sin h \frac{x_1 + x_2}{m} \cos h \frac{x_2 - x_1}{m}$$

or :

$$\cos h \frac{x_2 - x_1}{m} = 1 + 2 \sin^2 h \frac{x_2 - x_1}{2m}$$

D'autre part :

$$H = Y_2 - Y_1 = m \left(\cos h \frac{x_2}{m} - \cos h \frac{x_1}{m} \right)$$

et :

$$\cos h \frac{x_2}{m} - \cos h \frac{x_1}{m} = 2 \sin h \frac{x_1 + x_2}{2m} \sin h \frac{x_2 - x_1}{2m} =$$

$$= 2 \sin h \frac{d}{m} \sin h \frac{x_2 - x_1}{2m}$$

donc :

$$H = 2m \sin h \frac{d}{m} \sin h \frac{x_2 - x_1}{2m}$$

d'où :

$$(8) \quad \sin h \frac{x_2 - x_1}{2m} = \frac{H}{2m \sin h \frac{d}{m}}$$

comme on a obtenu précédemment :

$$T_m = \frac{\Pi m}{2l} \left[2d + \frac{m}{2} \cdot 2 \sin h \frac{x_1 + x_2}{m} \left(1 + 2 \sin^2 h \frac{x_2 - x_1}{2m} \right) \right]$$

il résulte de (8) ci-dessus, en remplaçant Πm par T_0 et $x_1 + x_2$ par $2d$:

$$T_m = \frac{T_0}{2l} \left[2d + m \sin h \frac{2d}{m} \left(1 + \frac{H^2}{2m^2 \sin^2 h \frac{d}{m}} \right) \right]$$

$2l$ est donnée par l'équation (3), l'expression complète de T_m est donc :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} T_m &= \frac{T_0}{2 \sqrt{(2m \sin h \frac{d}{m})^2 + H^2}} \left[2d + m \sin h \frac{2d}{m} \right. \\ &\quad \left. \left(1 + \frac{H^2}{2 \left(m \sin h \frac{d}{m} \right)^2} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

ou bien, en employant les notations de la formule (2) :

$$T_m = \frac{T_0}{2 \sqrt{(2l_d)^2 + H^2}} \left[2d + l_d \left(1 + \frac{H^2}{2(l_d)^2} \right) \right]$$

valeurs qui portées dans la 2^e équation (7) donnent exactement la longueur l_0 du câble libre, à la température θ de l'équilibre considéré.

Ces équations permettent donc de calculer l_0 à la température θ si l'on connaît, pour cette température, la tension horizontale T_0 qui résulterait d'une charge quelconque Π .

3. *Variation de la température.* — Si la température passe de θ à θ' , la nouvelle courbe d'équilibre fera partie d'une chaînette de module m' ; ce segment de chaînette aura une longueur l' donnée par l'équation :

$$(7 \text{ ter}) \quad l' = l_0 (1 + \lambda T'_m)$$

formule dans laquelle l_0 est la longueur primitive l_0 , du câble libre à la température θ , portée à la température θ' sans intervention d'aucune tension; donc :

$$(10) \quad l_0 = l_0 \frac{1 + \alpha \theta'}{1 + \alpha \theta}$$

la formule (9) donne :

$$(10 \text{ bis}) \quad T'_m = \frac{T'_0}{2l'} \left[2d + l'_d \left(1 + \frac{H^2}{2(l'_d)^2} \right) \right]$$

l'équation (3) donne :

$$(3 \text{ bis}) \quad l'_2 = (2l'_d)^2 + H^2$$

Les équations ci-dessus, 7 ter, 10 10 bis, 3 bis, déterminent exactement les nouvelles valeurs du module

$$m' = \frac{T'_0}{\Pi} \text{ d'où } T'_0.$$

4. *Variation de la charge.* — Si la surcharge a varié ou a disparu, Π est devenu π , dès lors les formules ci-dessus au lieu d'être exprimées en fonction de T_0 et m' , le sont en fonction de la nouvelle tension horizontale l'_0 et du module $\frac{l'_0}{\pi}$; elles donnent donc la tension horizontale du nouvel équilibre.

5. *Tension au point d'attache le plus haut.* — Elle était du début,

$$T = T_0 + \Pi Y_2;$$

(1) donne Y_2 en fonction de x_2 ; la valeur de x_2 résulte de l'équation (8), car :

$$x_2 - x_1 = x_2 = (2d - x_2) = 2(x_2 + d)$$

Ce calcul exigera l'usage d'une table de fonctions hyperboliques.

Après la variation de la charge et à la température θ' la tension au point le plus haut est devenue :

$$T' = l'_0 + \pi Y'_2$$

le nouveau module $m = \frac{l'_0}{\pi}$ étant déterminé comme on l'a indiqué au § 4, l'équation (8) donne x'_2 , l'équation (1) donne Y'_2 .

6. *Utilisation des formules précédentes.* — Le problème le plus général qui se pose est le suivant : « Quelle devra être la tension au point d'attache supérieur lors de la pose pour que le câble ne soit jamais soumis à des tensions dépassant la tension maxima T résultant du taux de sécurité imposé. »

Soient $\Pi \quad \Pi' \dots \Pi_r \dots \Pi^n$

les charges maximum aux températures :

$$0 \quad \theta' \dots \theta^p \dots \theta^n$$

On calculera les tensions horizontales correspondantes :

$$T_0 \quad T'_0 \dots T^p \dots T^n$$

donnant la tension T au point le plus haut, de la manière suivante :

$$m_p = \frac{T^p}{\Pi^p}$$

$$Y_2 = \frac{T}{\Pi^p} = m_p \cos h \frac{x_2}{m_p}$$

$$Y_1 = \frac{T}{\Pi^p} - H = m_p \cos h \frac{x_1}{m_p}$$

En les retranchant membre et membre, on obtient, voir (8) :

$$\sin h \frac{x_2 - x_1}{2 m_p} = \frac{H}{2 m_p \sin h \frac{d}{m_p}}$$

En les ajoutant membre à membre, il vient :

$$2 \frac{T}{\Pi^p} - H = m_p \left(\cos h \frac{x_2}{m_p} + \cos h \frac{x_1}{m_p} \right)$$

Le deuxième facteur du second membre peut s'écrire :

$$2 \cos h \frac{x_1 + x_2}{2 m_p} \cos h \frac{x_2 - x_1}{2 m_p}$$

donc :

$$\cos h \frac{x_2 - x_1}{2 m_p} = \frac{2 \frac{T}{\Pi^p} - H}{2 m_p \cos h \frac{d}{m_p}}$$

Par conséquent :

$$\cos^2 h \frac{x_2 - x_1}{2 m_p} - \sin^2 h \frac{x_2 - x_1}{2 m_p} = \frac{\left(2 \frac{T}{\Pi^p} - H \right)^2}{\left(2 m_p \cos h \frac{d}{m_p} \right)^2} - \frac{H^2}{\left(2 m_p \sin h \frac{d}{m_p} \right)^2} = 1$$

d'où :

$$\sin^2 h \frac{d}{m_p} \left(4 \frac{T^2}{H^2} - 4 H \frac{T}{\Pi^p} \right) - H^2 \left(\cos h \frac{d}{m_p} - \sin^2 h \frac{d}{m_p} \right) = \left(2 m_p \cos h \frac{d}{m_p} \sin h \frac{d}{m_p} \right)^2$$

c'est-à-dire, en posant :

$$Z = \sin^2 h \frac{d}{m_p}$$

$$(11) \quad 4 m_p^2 Z^2 + \left(4 m_p^2 - 4 \frac{T^2}{H^2} - 4 H \frac{T}{\Pi^p} \right) Z - H^2 = 0$$

Au moyen d'une table hyperbolique, cette équation permettrait de calculer m_p par approximations successives.

Mais comme il n'est pas nécessaire que la tension au point le plus haut ait exactement la valeur T , le taux de sécurité permettant un petit écart, il sera inutile d'avoir recours à cette équation, m_p pouvant être déterminé par une construction graphique très simple (1) basée sur la similitude de toutes les

chaînettes. On appréciera la différence qui en résultera pour le taux de sécurité, en calculant, comme il a été indiqué au paragraphe 5, la tension réelle au point le plus haut.

Ayant obtenu ainsi les valeurs $m, m', \dots, m_p, \dots, m_n$ correspondant à des taux de sécurité très voisins de celui imposé, on en déduira, au moyen des équations (7), (9), (10), les longueurs qui en résulteraient pour le câble libre à une seule température de comparaison Θ .

La longueur qu'il convient d'adopter pour ne jamais dépasser le taux de sécurité, est évidemment la plus grande des valeurs ainsi calculées.

Appelons L_0 cette longueur, π_0 le poids unitaire du câble à la température Θ et P_0 le poids total de L_0 , on a :

$$P_0 = \Pi \cdot L_0$$

Remarque. — Le poids par unité de longueur du câble en équilibre, sans surcharge, est légèrement différent de π_0 . (Voir la remarque du début de ce chapitre sur le π moyen). Quand la température est θ et la tension moyenne T_m , la longueur est, en effet, devenue :

$$l = L_0 \frac{1 + \alpha \theta}{1 + \alpha \Theta} \cdot (1 + \lambda T_m)$$

le poids moyen unitaire est donc devenu :

$$\pi = \frac{P_0}{l}$$

On a l'habitude de prendre pour π la même valeur que celle de π_0 ; en toute rigueur, il faudra vérifier, à posteriori, que la vraie valeur de π résultant de θ et T_m redonne bien, pour chaque température de pose, le T_0 calculé au moyen de L_0 comme il a été indiqué au paragraphe 4.

7. Possibilité de déterminer un tableau de pose mathématiquement exact. — L_0 et π étant connus, on essaiera une série de valeurs de l'_0 . Pour chacune : l'équation (9) donne T_m , l est donnée par l'équation (3), de l'équation (7) on tire l'_0 qui portée dans (10) donne θ' de pose correspondant à ce l'_0 . On a vu au paragraphe 5 comment on déduira T' de l'_0 .

On a donc, finalement, T' en fonction de la température de pose.

Remarque. — Le seul paramètre exigeant un calcul assez long est T_m (équation (9)). Mais cette grandeur étant multipliée par λ qui est de l'ordre de 10^{-4} , on peut tolérer, sur sa valeur réelle, une certaine erreur. La formule ci-après, est suffisamment approchée.

$$(1) \text{ bis} \quad T_m = \frac{T_0}{2 L_0} \left[2 d + l_2 d \left(1 + \frac{H^2}{2 (l_d)^2} \right) \right]$$

D'autre part :

$$l_2 d = 2 d + \varepsilon_2 d$$

$$l_d = d + \varepsilon_d$$

Les quantités $\varepsilon_2 d$ et ε_d sont des différences premières dont la valeur est assez faible; on pourra donc les regarder comme constantes tant que l'_0 ne sortira pas d'une certaine zone, en considérant, comme précédemment, que l'erreur commise est multipliée par 10^{-4} .

Je montrerai d'ailleurs, ultérieurement, comment, par la méthode de similitude, on peut obtenir une table de valeurs proportionnelles à $\varepsilon_d, \varepsilon_2 d$; il suffit alors de puiser dans cette table, et de multiplier par le rapport de similitude.

(1) Voir *La Houille Blanche* de Novembre-Décembre 1925, p. 176.