HYDRAULIQUE

Etude analytique du fonctionnement, au cours d'une pertubation, d'un Groupe électrogène pourvu d'un Régulateur à pression d'huile

par M. Barbillion, *Directeur de l'Institut Polytechnique de Grenoble*

Dans cette même revue, nous avons exposé, à plusieurs reprises et d'une manière, croyons-nous, très complète, les principaux éléments de constitution et de fonctionnement des régulateurs de groupes électrogènes.

Dans les quelques pages qui suivent, nous nous sommes efforcés d'étudier, sous une forme très générale, sinon la plus générale, le fonctionnement d'un régulateur tachymétrique à pression d'huile.

Ce travail est déjà ancien et a été publié sous forme fragmentaire dans divers organes scientifiques (1). C'est à une étude d'ensemble qu'est consacré le présent article.

Presque dans le même temps où s'achevait notre travail, paraissait, dans *La Houille Blanche*, numéro de septembre 1923, un article de M. Julliard, fort intéressant, consacré à la recherche d'une méthode générale d'étude du fonctionnement des régulateurs automatiques à action électromagnétique.

Pour rendre plus aisé l'examen de notre texte, nous avons modifié, à dessein, notre mode primitif d'exposition et nos hypothèses, de manière à adopter le plus rigoureusement possible la même base de départ que M. Julliard.

Théorie générale du fonctionnement du régulateur d'étude.— Le régulateur est du type intuitif figuré ci-contre (fig. 1 et 2)

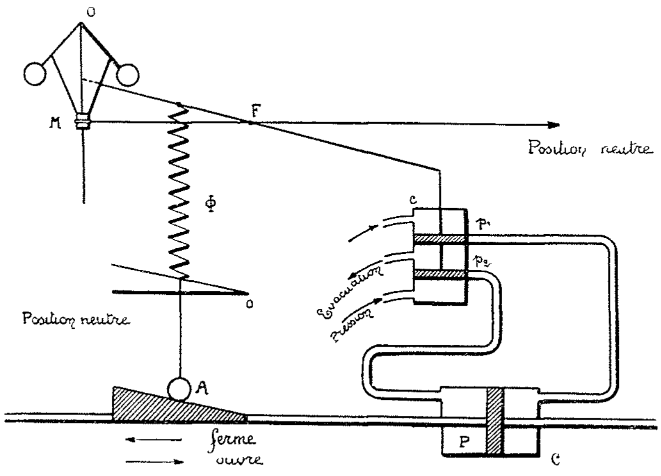

Fig. 1. — Une des formes classiques de régulateur indirect et asservi.

La pompe à huile est pourvue d'une circulation d'huile dont la vitesse est proportionnelle à y (quantité mesurée au tiroir) dont se déplace celui-ci. Le piston P du moteur de vannage établit l'admission nécessaire. Le fond du piston p de la cataracte à huile K est soulevé de x (mesuré à ce fond). La tige d'asservissement AA' est relevée de la quantité u ; le ressort BB' (B' jouant le rôle du point F de la théorie générale) s'allonge de $u + y$. Les quantités x, y et u sont supposées mesurées en des points déterminés. Quant aux quantités qui leur sont liées par des relations quasi linéaires, les facteurs de proportionnalité sont faciles à établir, et dépendent du type de régulateur envisagé.

La circulation d'huile s'effectue sous une pression constante et le débit d'huile est proportionnel à y, de même que la vitesse de P dans C, et que celle du fond c de la cataracte. Nous avons donc l'équation (1) intuitive :

$$\theta \frac{dx}{dt} = y \tag{1}$$

θ étant une constante ou, plus exactement, un facteur de proportionnalité qui dépend uniquement de la pression de la pompe et des dimensions des canaux.

En outre, la vitesse relative de p et de c est donnée par l'expression :

$$w = \frac{dx}{dt} - \frac{du}{dt} \tag{\alpha}$$

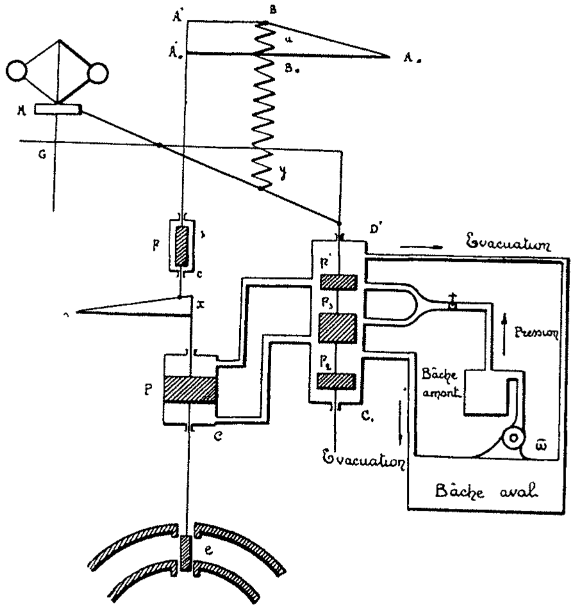

Fig. 2. — Régulateur schématique à pression d'huile.

L'effort exercé par p dans son mouvement, est équilibré par l'effort antagoniste dû au déplacement de la tige d'asservissement AB, de constante t_a. L'effort est nul quand la tringle est horizontale suivant AB_0. A'B est toujours supposé très petit ou horizontal par construction.

Nous avons donc l'équation (2) :

$$b_a u = A \left(\frac{dx}{dt} - \frac{du}{dt}\right) \tag{2}$$

(1) Notamment dans la Revue de l'*Industrie Minérale de Saint-Etienne* et dans les *Annales de l'Université de Grenoble.*

A étant une constante qui entre dans la constitution de la « constante de temps » de l'asservissement.

$\frac{A}{b_a}$ a les dimensions d'un temps. C'est la constante de temps t_a de l'asservissement. S'il n'y a pas d'asservissement :

$$b_a = o \quad \text{et} \quad t_a = \infty$$

Enfin, le tachymètre, soumis à une variation de vitesse $\omega - \omega_0$, se déforme et le ressort compensant les effets de la force centrifuge, on a les relations suivantes dans lesquelles F_0 représente la tension au départ, b la constante du ressort du tachymètre en supposant que les efforts mis en jeu dans le tachymètre détecteur soient proportionnels au carré de la force centrifuge.

$$\begin{cases} F_0 + b\,(u+y) = B\,\omega^2 \\ F_0 + b\,(o) = B\,\omega_0^2 \end{cases} \tag{3}$$

— B constante appropriée.
— ω_0 vitesse de départ à pleine charge.
— ω vitesse correspondant à la charge liée à l'élongation $u + y$.
$\omega - \omega_0$ variation de vitesse à partir de la vitesse de départ.

En retranchant, membre à membre, les équations précédentes, on a donc :

$$\begin{cases} F_0 + b\,(u+y) = B\,\omega^2 \\ F_0 + b\,(o) = B\,\omega_0^2 \end{cases}$$

avec $$\Delta\,\omega = \omega - \omega_0$$

et si nous posons toujours :

$$z = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\Delta\,\omega}{\omega_0} \tag{β}$$

il vient :

$$b\,(u+y) = 2\,B\,\omega_0^2\,z \tag{3'}$$

B est bien une constante, ou une pseudo-constante, établissant un lien entre la valeur de l'énergie cinétique du groupe $\left(\frac{1}{2}\,K\,\omega^2\right)$ et la force centrifuge agissant sur le tachymètre.

Remarque. — On pourrait, en effet, s'étonner, les forces centrifuges mises en jeu dans le tachymètre supposé libre étant généralement de la forme : $A\,\omega^2\,r$, A constante convenable, r rayon d'écartement des boules par rapport à l'axe de la figure, de ne pas voir ici r apparaître explicitement dans l'équation (3').

Or, il y a proportionnalité entre les écartements $r - r_0$, et les valeurs de y, étant donné les faibles déformations du système, à cause des dimensions générales de celui-ci.

On aura donc, en général, les triangles Mgy et $B'DD'$ étant semblables et g étant une constante de proportionnalité :

$$\begin{aligned} b\,(u+y) &= A\,\omega^2\,(v_0 + g\,y) - A\,\omega_0^2\,r_0 \\ b\,(u+y) &= A\,(\omega^2 - \omega_0^2)\,r_0 + A\,\omega^2\,gy \end{aligned} \tag{3''}$$

mais :

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + z\,\omega_0 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\,\omega_0^2\,z + \omega_0^2\,z^2 \end{cases}$$

Or, z étant toujours relativement faible devant ω_0, on peut écrire, y étant également petit :

$$b\,(u+y) - A\,\omega_0^2\,gy = A\,r_0\,(\omega^2 - \omega_0^2)$$

d'où, comme

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\,\omega_0^2\,z$$

on aura finalement :

$$b\,(u+y) - A\,\omega_0^2\,gy = A\,r_0\,2\,\omega_0^2\,z \tag{3$^{\text{IV}}$}$$

Ainsi, si l'on veut tenir compte du facteur $A\,\omega_0^2\,g\,y$, on pourra poser :

$$b' = b - A\,\omega_0^2\,g \tag{γ}$$

ou encore :

$$y' = y\left(1 - \frac{A\,\omega_0^2\,g}{b}\right) \tag{δ}$$

avec : $y' = \alpha\,y$ α pseudo constante appropriée.

On pourra écrire, par conséquent :

$$b\,u + b\,y' = 2\,A\,r_0\,\omega_0^2\,z \tag{3$^{\text{V}}$}$$

ou bien :

$$b\,u + b'\,y = 2\,A\,r_0\,\omega_0^2\,z \tag{3$^{\text{VI}}$}$$

Pour simplifier, supposons le terme

$$\frac{A\,\omega^2\,gy}{b}$$

négligeable devant l'unité.

On aura donc alors bien le droit d'écrire, avec un choix de constantes convenables, la formule :

$$2\,A\,r_0\,\omega_0^2\,z = b\,(u+y) = 2\,B\,\omega_0^2\,z \tag{3'}$$

Equation où figure la variable z, soit :

$$z = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0},$$

écart relatif de vitesse, en supposant toujours les écarts relatifs de vitesses faibles devant ω_0.

Rappelons nos équations précédentes :

$$\theta\,\frac{dx}{dt} = y \tag{1}$$

$$u = t_a\left(\frac{dx}{dt} - \frac{du}{dt}\right) \tag{2}$$

$$b\,(u+y) = 2\,\omega_0\,z \tag{3}$$

Eliminons u et y entre les équations (1), (2) et (3). Nous aurons l'équation définitive (4) en posant :

$$2\,\tilde{\omega}_0 = 2\,\beta\,\omega_0^2$$

$$o = \frac{z}{t_a} + \frac{dz}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{b\,\theta}{2\,\tilde{\omega}_0} - \frac{dx}{dt}\left(1 + \frac{\theta}{t_a}\right)\frac{b}{2\,\tilde{\omega}_0} = y \tag{4}$$

Précisons la signification de θ. On a évidemment :

$$\theta = \frac{Y \text{ course totale}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)\text{maximum}} \tag{ε}$$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)$ max. représentant la vitesse maximum possible du servo-moteur de vannage. Posons :

$$\frac{dx}{dt} = \Psi \tag{η}$$

et $$\frac{dx}{dt}_{\max} = \Psi_{\max} \tag{η'}$$

Nous aurons l'équation (4) transformée en (4') :

$$\frac{z}{t_a} + \frac{dz}{dt} - \frac{d\,\Psi}{dt}\,\frac{b}{2\,\tilde{\omega}_0} - \Psi\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{t_a}\right)\frac{b\,\theta}{2\,\tilde{\omega}_0} = o \tag{4'}$$

ou encore :

$$\frac{z}{t_a} + \frac{dz}{dt} - \frac{d\,\Psi}{dt}\,\frac{b\,\theta}{2\,\tilde{\omega}_0} - \frac{\Psi\,b\,\theta}{t_a\,2\,\tilde{\omega}_0} - \Psi\,\frac{b}{2\,\tilde{\omega}_0} = o \tag{4''}$$

b : constante du ressort.
t_a : constante de temps de l'asservissement.
Ψ : vitesse du servo-moteur de vannage.

$$o = \frac{z}{t_a} + \frac{dz}{dt} - \Psi\left(\frac{b}{2\,\tilde{\omega}_0}\right)\left(1 + \frac{\theta}{t_a}\right) - \frac{d\,\Psi}{dt}\,\frac{b\,\theta}{2\,\tilde{\omega}_0} \tag{4'''}$$

Remarquons, à titre subsidiaire, que $\bar{\omega}_0$ est proportionnel à W_0, énergie cinétique du système. On a, en effet, pour la vitesse ω_0 :

$$F_c = B\,\omega_0^2$$

force centrifuge $= 2\,m\,\omega_0^2\,r_0$
m, masse d'une boule,
c'est-à-dire pour la vitesse ω_0 :

$$2\,B = 2\,m\,\omega_0^2\,r_0$$

De même :

$$W_0 = \frac{1}{2}\,K\,\omega_0^2,$$

énergie cinétique du groupe, d'où :

$$\frac{F_{co}}{W_0} = \frac{B\,\omega_0^2}{\frac{1}{2}\,K\,\omega_0^2} = \frac{2\,m\,\omega_0^2\,r_0}{\frac{K\,\omega_0^2}{2}}$$

$$F_{co} = W_0\,\frac{2\,m\,r_0}{\frac{K}{2}} = \frac{4\,m\,r_0}{K}\,W_0 \tag{ι}$$

pour une vitesse $\omega \neq \omega_0$:

$$F_c = \frac{4\,m\,r\,W}{K} \tag{ι'}$$

Mais si $r - r_0$ est faible devant r_0 (nos hypothèses), on peut admettre la proportionnalité de F_c à W, ou de $B\,\omega^2$ à $\frac{1}{2}K\omega^2$ (1), au moins en première approximation, au cours d'un réglage et non d'un emballement.

On peut, du reste, poser, si l'on veut introduire W_0, l'énergie cinétique du groupe à ω_0 :

$$\frac{b'_\prime}{2\,W_0} = \frac{b}{2\,\bar{\omega}_0} \tag{κ}$$

si b' est une constante appropriée,

W_0 énergie cinétique du groupe au régime ω_0 (faibles variations des valeurs F_c et W),

θ étant toujours le quotient de la course totale de P par la vitesse maximum de manœuvre du piston du moteur de vannage.

Appelons θ' le temps de fermeture complète du régulateur à vitesse maximum Ψ_{max}. On peut donc poser comme d'usage :

$$\frac{W_0}{P_{max}} = \mathcal{T} \tag{λ}$$

Les quantités θ, θ' et $\mathcal{T}$ sont particulièrement intéressantes à considérer.

On a évidemment :

$$\theta'\left(\frac{dx}{dt}\right)_{max} = E \tag{μ}$$

Pour plus de facilité, rassemblons ci-après les quelques définitions nécessaires dans la suite du calcul :

$$\left\{\begin{array}{lll} Y & \text{valeur maximum de} & y \\ X & \text{—} & x \\ E & \text{—} & \theta \end{array}\right.$$

$$\theta = \frac{Y}{\Psi_{max}} = \frac{Y}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{max}}$$

$$\theta' = \frac{E}{\Psi_{max}} \qquad \mathcal{T} = \frac{W_0}{\theta_{max}}$$

Nous avons posé :

$$\theta\left(\frac{dx}{dt}\text{ max.}\right) = Y \tag{ε}$$

$$\theta'\left(\frac{dx}{dt}\text{ max.}\right) = E \tag{μ}$$

donc :

$$\frac{\theta}{\theta'} = \frac{Y}{E} \tag{ν}$$

enfin :

$$\theta = \theta'\,\frac{Y}{E} \tag{ν'}$$

θ' durée de fermeture totale du régulateur à vitesse maximum, définition que nous aurons à utiliser dans la suite de notre étude.

L'équation (4) à 3 inconnues est naturellement irrésoluble, sauf hypothèses simplificatrices et particulières. Mais adjoignons lui l'équation caractéristique du fonctionnement de la machine en régime troublé (équilibre dynamique) :

$$K\,\frac{d\omega}{dt} = C_m - C_r = C_{max}\left(\frac{e_0 - \int \frac{de}{dt}\,dt}{E}\right) - C_{ro} + \Gamma \tag{5}$$

Notations habituelles :

Couples résistants supposés variant brusquement, c'est-à-dire indépendamment de la vitesse.

On peut écrire encore, puisque

$$C_{max}\,\frac{e_0}{E} = C_{ro} :$$

$$K\,\omega_0\,\frac{d\,(\omega - \omega_0)}{dt} = K\,\omega_0\,\frac{dz}{dt} = +\,\frac{C_{max}}{E}\int de + \Gamma \tag{5'}$$

or, soit :

$$\frac{de}{dt} = -\,a\,\frac{dx}{dt} \qquad de = -\,a\,dx$$

ici, a constante positive, car θ décroît quand x croît.

La constante sans dimensions est définie par la relation :

$$\frac{de}{dt} = -\,a\,\frac{dx}{dt}$$

d'où, évidemment, en valeurs absolues :

$$E = \alpha\,X \tag{σ}$$

ou, en différentiant :

$$K\,\omega_0\,\frac{d^2 z}{dt^2} = -\,C_{max}\,\frac{a}{E}\,\frac{dx}{dt} = -\,C_{max}\,\frac{a}{E}\,\Psi$$

$$\Psi = \frac{E}{a}\,K\,\frac{\omega_0}{C_{max}}\,\frac{d^2 z}{dt^2} = -\,\frac{2\,W_0}{P_{max}}\left(\frac{E}{a}\right)\frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$\Psi = -\,2\,\mathcal{T}\,\frac{E}{a}\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = -\,2\,\mathcal{T}\,\frac{d^2 z}{dt^2}\,X \quad \text{car} \quad \frac{E}{a} = X$$

X course totale du piston conduisant le vannage.

Donc :

$$\frac{dx}{dt} = \Psi = 2\,\mathcal{T}\,\frac{d^2 z}{dt}\,X \tag{7}$$

C'est, sous une forme un peu modifiée, l'équation classique de l'équilibre dynamique de la machine.

Nous aurons donc l'équation combinée (8) en $z\,(t)$ par élimination de Ψ entre (4) et (7).

$$\begin{aligned} o = \frac{z}{t_a} + \frac{dz}{dt} + 2\,\mathcal{T} \times \frac{b\,\theta}{2\,\bar{\omega}_0}\,\frac{d^3 z}{dt^3} + \\ + \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{t_a}\right)\frac{b\,\theta}{2\,\bar{\omega}_0}\,2\,\mathcal{T} \times \frac{d^2 z}{dt^2} = o \end{aligned} \tag{8}$$

Equation caractéristique de fonctionnement du régulateur à pression d'huile. — Ainsi, l'élimination de Ψ entre (4) et (7) donne l'équation :

$$\frac{z}{t_a} + \frac{dz}{dt} + \frac{d^3 z}{dt^3} \Lambda + \Lambda \frac{d^2 z}{dt^2} \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{t_a}\right) = o \qquad (8')$$

qui, ordonnée autrement, devient :

$$\left(z + \Lambda \frac{d^2 z}{dt^2}\right)\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{t_a}\right) - \frac{z}{\theta} + \left(\frac{dz}{dt} + \Lambda \frac{d^3 z}{dt^3}\right) = o \qquad (8'')$$

en posant

$$\Lambda = 2\,\mathcal{T} \times \frac{b\,\theta}{2\,\tilde{\omega}_0} \qquad (\alpha)$$

L'équation (8) peut s'écrire encore, en posant encore :

$$\frac{1}{\theta} + \frac{1}{t_a} = \Lambda' \qquad (\beta)$$

$$\left(\frac{z}{\theta}\right) \text{moy.} = \mathrm{M} \qquad (\gamma)$$

$$z + \Lambda \frac{d^2 z}{dt^2} = u \qquad (\delta)$$

Evidemment z est une fonction du temps, mais nous allons procéder, pour simplifier les calculs, par approximations sucessives. Nous prendrons d'abord pour z une valeur moyenne. Elle sera logiquement comprise entre les deux vitesses de départ et d'aboutissement, en remarquant encore que ce ne seront pas des valeurs de *régime*, mais des valeurs acquises au cours d'une perturbation et *non maintenues*.

Nous entendons par là que le $\left(\frac{z}{\theta}\right)$ moyen pourra être défini ainsi en première approximation dans le cas d'une perturbation correspondant à une décharge complète comme la valeur $\frac{1}{2}\left(\frac{z\ max}{\theta}\right)$, $z\ max$ étant acquis au cours d'une perturbation, mais que l'on ne connaît précisément pas, et qu'il s'agit de déterminer puisqu'on cherche la fonction $z\,(t)$. On peut cependant se baser, puisqu'il s'agit d'une méthode d'approximations nécessaires, sur cette remarque que les *statismes* des régulateurs de cette classe générale correspondent ordinairement à des valeurs de $\pm$ 20 %, à partir de la vitesse de régime moyenne.

Nous admettrons, en première approximation, que, au moins pour le groupe et le régulateur étudiés, z max, entre la pleine charge et la marche à vide (décharge brusque), est de 2 × 20 %, et que, par conséquent :

$$\frac{1}{2}\frac{z_{\max}}{\theta} = \frac{0{,}20}{\theta}$$

Remarque : On pourrait aussi admettre en première approximation que z, dans l'expression $\frac{z}{\theta}$, varie proportionnellement au temps, et qu'en conséquence :

$$z = \mathrm{A}'\, t \qquad (\gamma')$$

A' étant une constante appropriée,

θ' étant la vitesse de manœuvre maximum du vannage, on aurait toujours en première approximation :

$$z_{\max} = \mathrm{A}'\ \theta'$$

A' étant facile à déterminer, quand on s'est donné $z_{\max}$.

Nous aurons donc, en conservant pour simplifier la forme

$$\left(\frac{z}{\theta}\right) = \frac{1}{2}\frac{z_{\max}}{\theta}$$

bien que la forme linéaire $z = \mathrm{A}\,t$ ne complique guère les calculs, l'équation (8') :

$$\frac{du}{dt} + \Lambda' u = \mathrm{M} \qquad (8')$$

avec :

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}\frac{z_{\max}}{\theta}$$

Signalons que l'équation (8') a pour solution intégrale :

$$u = \frac{\mathrm{M}}{\Lambda'} - \frac{e}{\Lambda'}^{-\Lambda'(t-a)} \qquad (8'')$$

or,

$$u = \Lambda \frac{d^2 z}{dt} + z \qquad (\delta)$$

Nous avons l'équation du second ordre :

$$\Lambda \frac{d^2 z}{dt^2} + z = \frac{\mathrm{M}}{\Lambda'} - \frac{e}{\Lambda'} e^{-\Lambda'(t-a)} \qquad (9)$$

Cette équation admet une solution générale et une solution particulière.

Solution particulière :

Elle est de la forme :

$$z_1 = \mathrm{G}\, e^{-\Lambda'(t-a)} + \frac{\mathrm{M}}{\Lambda'} \qquad (10)$$

G constante à déterminer.

Nous avons, à cet effet :

$$e^{-\Lambda'(t-a)}[\Lambda\,\mathrm{G}\,\Lambda'^2 + \mathrm{G}] = -\frac{e}{\Lambda'}^{-\Lambda'(t-a)}$$

d'où :

$$\mathrm{G}\,(\Lambda\,\Lambda'^2 + 1) = -\frac{1}{\Lambda'} \qquad (10')$$

et la valeur de z_1, intégrale particulière, devient :

$$z_1 = \frac{\mathrm{M}}{\Lambda'} - \frac{1}{\Lambda'}\frac{1}{1 + \Lambda\,\Lambda'^2} e^{-\Lambda'(t-a)]} \qquad (10'')$$

Nous avons laissé au temps t une origine à déterminer (a), cette détermination devant être faite, évidemment, en liaison avec celle des constantes de la solution générale.

Solution générale. — L'équation sans second membre a pour intégrale générale :

$$\Lambda \frac{d^2 z}{dt^2} + z = o \qquad (9')$$

$$z_2 = \alpha \cos \Lambda\, t + \beta \sin \Lambda\, t = \chi \cos \sqrt{\frac{1}{\Lambda}}\,(t-a) \qquad (11)$$

χ et a constantes à déterminer, (a) ayant naturellement la même valeur que pour l'intégrale particulière, car l'origine du temps est unique.

L'intégrale complète est donc :

$$z = z_1 + z_2 = \frac{\mathrm{M}}{\Lambda'} - \frac{1}{\Lambda'}\frac{1}{1 + \Lambda\,\Lambda'^2} e^{-\Lambda'(t-a)} + \\ + \chi \cos \sqrt{\frac{1}{\Lambda}}\,(t-a) \qquad (12)$$

Fixation des constantes a et χ :

Pour $t = o$ on a $z = o$, donc :

$$o = -\frac{1}{\Lambda_1}\left(\frac{1}{1 + \Lambda\,\Lambda'^2}\right) e^{\Lambda' a} + \chi \cos \sqrt{\frac{1}{\Lambda}}\,a + \frac{\mathrm{M}}{\Lambda'} \qquad (12')$$

On aura, de même, pour la valeur générale de $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = + \frac{\Lambda'}{\Lambda'} \frac{1}{1 + \Lambda \Lambda'^2} e^{-\Lambda' (t - a)} - \chi \sin \sqrt{\frac{1}{\Lambda}} (t - a) \quad (13)$$

Soit pour $t = o$

$$\frac{\varepsilon}{2b} = \frac{1}{1 + \Lambda \Lambda'^2} e^{\Lambda' a} + \frac{X}{\sqrt{\chi}} \sin \frac{a}{\sqrt{\Lambda}} \quad (13')$$

d'où les deux équations de définition pour χ et a :

$$\left\{ \begin{aligned} \chi \cos \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} a &= - \frac{M}{\Lambda'} + \frac{e^{\Lambda' a}}{\Lambda' (1 + \Lambda \Lambda'^2)} \\ \chi \sin \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} a &= \sqrt{\Lambda} \left[\frac{\varepsilon}{2b} - \frac{e^{\Lambda' a}}{1 + \Lambda \Lambda'^2} \right] \end{aligned} \right. \quad (14)$$

ou encore :

$$\left\{ \begin{aligned} \chi \cos \frac{a}{\sqrt{\Lambda}} &= \left(- M + \frac{e^{\Lambda' a}}{1 + \Lambda \Lambda'^2} \right) \frac{1}{\Lambda'} \\ \chi \sin \frac{a}{\sqrt{\Lambda}} &= \left(\frac{\varepsilon}{2b} - \frac{e^{\Lambda' a}}{1 + \Lambda \Lambda'^2} \right) \sqrt{\Lambda} \end{aligned} \right. \quad (14')$$

On peut donc obtenir les valeurs de χ et de a par les deux équations ci-dessus, dont l'une est transcendante, mais peut se résoudre facilement par des développements en série.

$$\left\{ \begin{aligned} tg \frac{a}{\sqrt{\Lambda}} &= \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2b} - \frac{e^{\Lambda' a}}{1 + \Lambda \Lambda'^2} \right) \sqrt{\Lambda}}{\left(- M + \frac{e^{\Lambda' a}}{1 + \Lambda \Lambda'^2} \right) \frac{1}{\Lambda'}} \\ \chi^2 &= \left(\frac{\varepsilon}{2b} - \frac{e^{\Lambda' a}}{1 + \Lambda \Lambda'^2} \right)^2 \Lambda + \left(- M + \frac{e^{\Lambda' a}}{1 + \Lambda \Lambda'^2} \right) \frac{1}{\Lambda'^2} \end{aligned} \right. \quad (14'')$$

La première donne, en effet, a, et la deuxième χ.

Cette méthode, rigoureuse au point de vue analytique, est cependant fort compliquée. On peut adopter cette deuxième beaucoup plus simple, bien que moins correcte.

Autre procédé de détermination des constantes. — Soit P une constante à déterminer dans l'équation donnant z. Il vient :

$$z_1 = \frac{M}{\Lambda'} - \frac{P}{1 + \Lambda \Lambda'^2} \frac{e^{-\Lambda' t}}{\Lambda'} \quad (10')$$

pour $\left\{ \begin{aligned} t &= o \\ z &= o \end{aligned} \right.$, il vient en particulier :

$$\frac{P}{1 + \Lambda \Lambda'^2} \frac{1}{\Lambda'} + \frac{M}{\Lambda'}$$

d'où :

$$z_1 = \frac{M}{\Lambda'} (1 - e^{-\Lambda' t}) \quad (10'')$$

De même, dans z_2 (11) dont la forme est :

$$z_2 = \alpha \cos t \sqrt{\frac{1}{\Lambda}} + \beta \sin t \sqrt{\frac{1}{\Lambda}}$$

α et β constantes à déterminer,

Annulons également :

z_2 pour $t = o$

Soit $\alpha = o$. Il ne reste ainsi que β à déterminer.

On a donc bien :

$$z_1 + z_2 = z = \frac{M}{\Lambda'} (1 - e^{-\Lambda' t}) + \beta \sin t \sqrt{\frac{1}{\Lambda}} = o \quad (12)$$

Détermination de β. — Formons : $\frac{dz}{dt}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{M}{\Lambda'} (- e^{-\Lambda' t}) (- \Lambda') + \frac{\beta}{\sqrt{\Lambda}} \cos t \sqrt{\frac{1}{\Lambda}} \quad (15)$$

pour $t = o$, il vient :

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)_0 = \frac{\varepsilon}{2\mathfrak{T}} = \left[M e^{-\Lambda' t} + \frac{\beta}{\sqrt{\Lambda}} \cos t \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right]_t \quad (15')$$

Ainsi :

$$\frac{\varepsilon}{2b} = M + \frac{\beta}{\sqrt{\Lambda}} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\beta}{\sqrt{\Lambda}} = \frac{\varepsilon}{2b} - M$$

Forme définitive de z. — Nous aurons ainsi :

$$z = \frac{M}{\Lambda'} (1 - e^{-\Lambda' t}) + \sqrt{\Lambda} \left(\frac{\varepsilon}{2b} - M \right) \sin \sqrt{\frac{1}{\Lambda}} \quad (12')$$

Pour $t = o$, on a bien $z = o$ et

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\mathfrak{T}}$$

Construction de z (fig. 3 et 4).

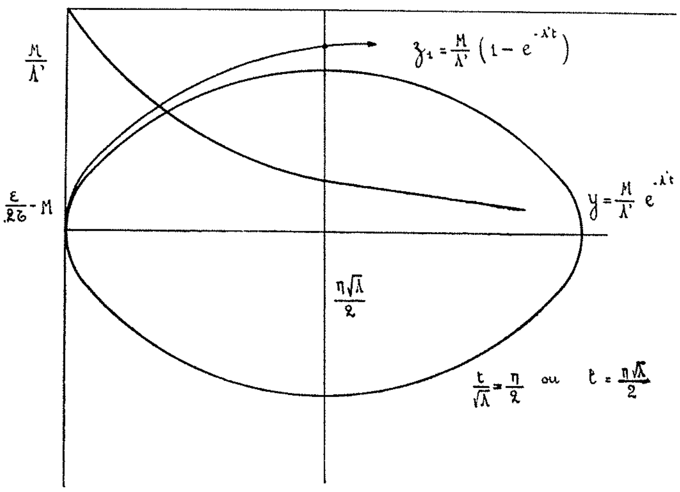

Fig. 3.— Construction de z

La forme de z dépend évidemment du signe de $\frac{\varepsilon}{2\mathfrak{T}} - M$, valeur liée aux éléments numériques du problème.

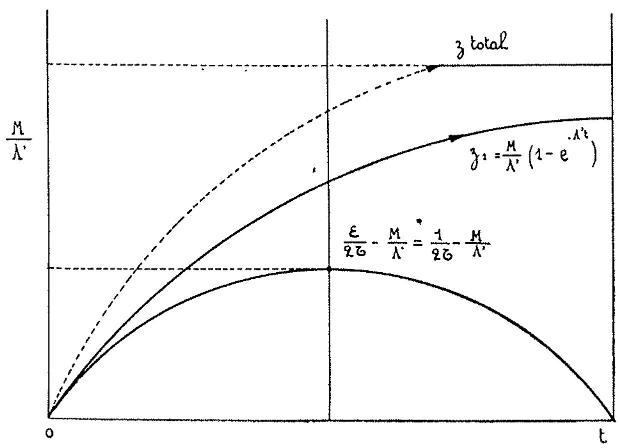

Fig. 4.— Construction de z

Remarque : le sinus peut être pourvu d'un coefficient négatif, alors les deux ordonnées partielles se déduisent l'une de l'autre;

Application numérique.— Recherche des valeurs de Λ, Λ′ et M.— Rappelons les définitions de ces trois quantités :

$$\Lambda = 2\,\mathfrak{T} \times \frac{b\,\theta}{2\,\bar\omega_0} \qquad (\alpha)$$

$$\Lambda' = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{t_a} \qquad (\beta)$$

$$M = \frac{z_{max}}{2\,\theta} \qquad (\gamma)$$

Soit $\mathfrak{T} = 10$ secondes (valeur fréquemment rencontrée).

$x = 5$ %, course du fond de la cataracte.

Valeur de

$$\frac{b}{2\,\bar\omega_0} \qquad b\,(u+y)_{max} \quad \begin{cases} = Q\,m\,\omega_0^2\,r_0\,z_{max} \\ = B\,\omega_0^2\,z_{max} \end{cases}$$

z_{max} : variation de vitesse maximum en régime : 0,20 × 2.

Soit N = 2 t/sec.

$$\begin{cases} \omega_0 = 2\,\pi\,N = 4\,\pi \\ \omega_0^2 = 16\,\pi^2 = 160 \\ m \text{ (masse d'une boule)} = \dfrac{P}{g} = \dfrac{10\ 000}{981} \\ r = 30 \text{ cn} \end{cases}$$

$$b\,(u+y)_{max} = 2 \times 10 \times \overline{4\,\pi^2\,N^2}\,r_0 \times z_{max}$$

$$b\,(u+y)_{max} = |\,0.10\,| \times 2 \times 10 \times \overline{12{,}36}^2 \times 10$$

$$= 160 \times 300 \times z_{max}$$

$$b\,(u+y)_{max} = 48.000 \times z_{max}$$

$$= 13\,\omega_0^2\,z_{max}$$

$$= 2\,\omega_0\,z_{max} \qquad z_{max} = 0{,}20$$

donc

$$\frac{b}{2\,\bar\omega_0} = \frac{z_{max}}{(u+y)_{max}} = \frac{0{,}20}{10}$$

$$(u+y)_{max} = 10$$

$$b = \frac{48\,000}{100} = 480$$

$$b = 480 \times 2$$

Ainsi :

$$\frac{b}{2\,\bar\omega_0} = \frac{b}{B\,\bar\omega_0^2} = \frac{2}{100}$$

Valeur de Λ :

$$\Lambda = 2\,\mathfrak{T} \times \frac{2\,\theta}{2\,\bar\omega_0} = 2 \times 10 \times 5\,\frac{2}{100}\,\theta$$

avec $\theta = 0{,}5$

si $\theta' = 5$ et $\dfrac{\theta}{\theta'} = \dfrac{1}{10} = \dfrac{E}{y}$

donc :

$$\boxed{\Lambda = 1} \qquad (15)$$

Valeur de Λ′ :

On a :

$$\Lambda' = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{t_a}\ ; \quad \text{et si} \quad t_a = \sim 0 = \frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{0.5} = 4$$

$$\boxed{\Lambda' = 4} \qquad (16)$$

Valeur de M :

$$M = \frac{z_{max}}{2\,\theta} = \frac{0.40}{2 \times 0{,}50} = 0{,}4$$

$$\boxed{M = 0.4} \qquad (17)$$

Valeur de $\dfrac{\varepsilon}{2\,\mathfrak{T}}$ *pour une décharge complète :*

On a :

$$\varepsilon = 1 \qquad \mathfrak{T} = 10$$

$$\frac{\varepsilon}{2\,\mathfrak{T}} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \qquad (18)$$

Expression dans ce cas de la fonction z *(fig. 5) :*

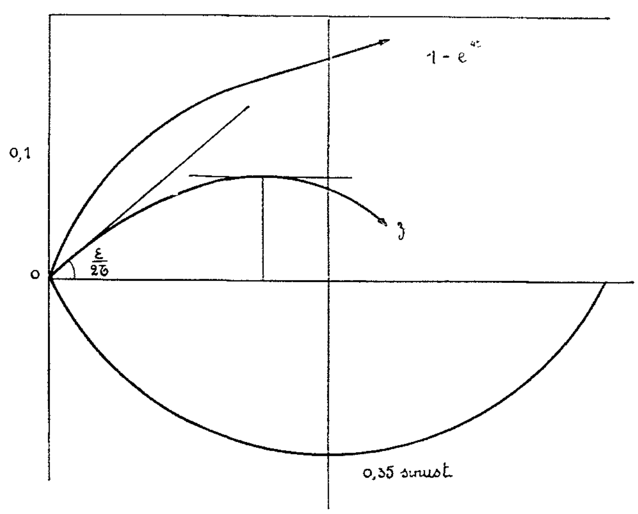

Fig. 5.— Construction de z

$$z = \frac{0{,}4}{4}\,(1 - e^{-4t}) + \sqrt{1}\,(0{,}05 - 0{,}4)\sin t$$

ou encore :

$$z = \frac{0{,}4}{4}\,(1 - e^{-4t}) + (0{,}05 - 0{,}4)\sin t$$

De même :

$$z = 0{,}1\,(1 - e^{-4t}) - 0{,}35\sin t$$

$$\frac{dz}{dt} = 4\,e^{-4t}\,(0{,}1) - 0{,}35\cos t$$

soit pour $t = o$, la valeur attendue :

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 + \frac{1}{2\,\mathfrak{T}} = \underline{0{,}05}$$