

ÉLECTRICITÉ

Etude des courants de Foucault dans un disque métallique, dans un cas particulier

par M. BARBILLION, *Directeur de l'Institut Polytechnique de Grenoble*

GÉNÉRALITÉS

Le développement de courants de Foucault dans un disque soumis à l'action d'un champ magnétique alternatif constitue l'un des phénomènes les plus utilisés en électrotechnique.

Les études théoriques et pratiques relatives aux modalités de ce développement sont très nombreuses. Cependant, bien avant la guerre, notre attention avait été attirée sur ce fait qu'aucun travail à notre connaissance, n'avait alors été publié touchant le problème suivant :

Dans l'hypothèse simpliste d'un disque et d'un pôle magnétique circulaire influençant ce disque, mais n'étant pas concentrique avec lui, quelle est la répartition probable, *naturellement, envisagée sous l'angle théorique*, des courants de Foucault dans le disque ?

Ce problème intéresse, en particulier, le fonctionnement d'un grand nombre de compteurs à courants alternatifs, dans lesquels une dissymétrie magnétique existe, dissymétrie créée par des moyens divers, du reste, pastille magnétique supplémentaire calée sur le disque, petit orifice circulaire pratiqué sur celui-ci, etc.

Depuis la guerre, toujours à notre connaissance, le problème ne semble pas non plus avoir reçu de solution générale. Nous avons eu l'occasion d'en esquisser une. Nous la proposons ci-après, nous excusant par avance auprès de nos lecteurs s'il a été fait mieux par ailleurs par l'un de nos confrères et, au cas où le problème n'aurait pas été envisagé, désireux simplement de voir créer un mouvement autour de cette question éminemment curieuse au point de vue technique, autant que délicate à traiter au point de vue mathématique.

Nous rappelons donc nos hypothèses :

Disque circulaire pouvant éventuellement tourner autour d'un axe perpendiculaire à son centre; pôle magnétique P de section droite circulaire influençant ce disque, mais excentré par rapport au disque.

NOTATIONS

Nous appellerons successivement :

R le rayon du disque; R_1 le rayon du cercle projection du pôle sur le disque; a la distance des centres du disque et du cercle-projection; D_1 la plus petite distance entre les deux cercles mesurés sur un diamètre (à gauche sur la figure 1); D_2 la plus grande distance entre les deux cercles mesurés suivant un diamètre (à droite sur la figure); ρ le rayon d'un cercle ayant son centre sur la droite OO' et passant par les deux points de ce diamètre tels que les rapports λ dans lesquels les segments D_1 et D_2 sont partagés soient les mêmes, λD_1 et λD_2 étant les longueurs interceptées, x_0 l'abscisse du petit cercle fixe par rapport au centre du disque.

En outre, nous emploierons les notations habituelles, en ce qui concerne les quantités magnétiques figurant dans le problème.

Comme on le voit, les courants de Foucault développés par le pôle d'influence sur le disque pourront être considérés comme créés dans de petits éléments circulaires ayant leur centre sur le diamètre OO' , mais dont l'épaisseur élémentaire variera d'une manière continue, quand on passera du segment D_1 au segment D_2 . En d'autres termes, cette épaisseur sera fonction de l'angle décrit par un rayon vecteur issu du centre du cercle variable et prenant toutes les valeurs comprises entre 0 et π .

Ceci posé, le calcul ci-après donne la marche à suivre.

A titre de vérification, on constatera dans les formules finales que si l'on fait $a = 0$, c'est-à-dire si le disque et le pôle sont

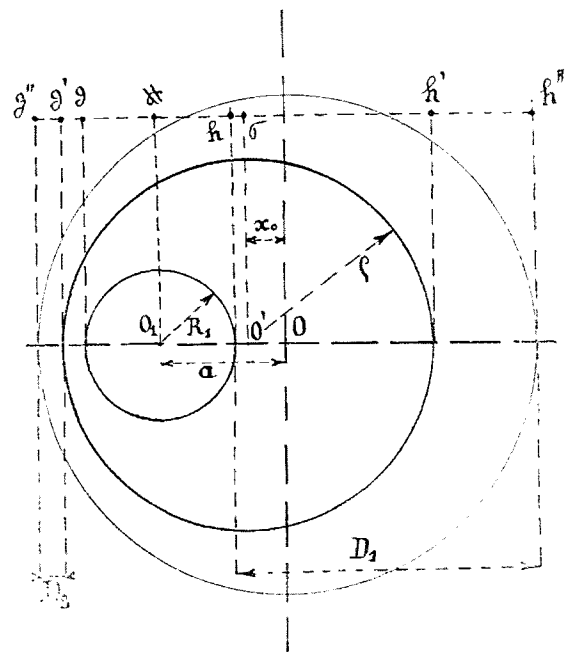


Fig. 1

co-axiaux, les mêmes formules donnant les pertes par courants de Foucault prendront les formes particulières classiques, ce qui constitue une vérification « *a posteriori* » de notre mode opératoire.

I. — EQUATION DES CERCLES DE RAYONS VARIABLES

Nous aurons successivement, λD_1 et λD_2 représentant les portions des éléments D_1 et D_2 englobés dans le cercle de rayon variable ρ (fig. 1) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = [(a - x_0) + R_1] + \lambda (R - a - R_1) \quad \text{à gauche} \\ \rho = -[(a - R_1) - x_0] + \lambda (R + a - R_1) \quad \text{à droite} \end{array} \right.$$

car :

$$\begin{cases} \rho = h h' - h \sigma \\ \rho = g g' + g \sigma \end{cases}$$

En outre, on a bien :

$$h h' = D_1 \quad \text{et} \quad g g' = D_2$$

Donc :

$$(1') \quad \begin{cases} \rho = [(a - x_0) + R_1] + \lambda [R - a - R_1] \\ \rho = -[(a - x_0) - R_1] + \lambda [R + a - R_1] \end{cases}$$

Egalons les deux valeurs de ρ , ce qui nous donne :

$$\lambda(R - a - R_1) + (a - x_0 + R_1) = \lambda(R + a - R_1) - (a - R_1 - x_0)$$

Ou, tous calculs faits :

$$(2) \quad x_0 = a(1 - \lambda)$$

On en déduit l'équation du cercle :

$$(2') \quad (x - x_0)^2 + y^2 = \rho^2$$

Or, ajoutant ces deux équations (1'), on a :

$$2\rho = \lambda(2R - 2R_1) + 2R_1$$

ou enfin :

$$(3) \quad \rho = R_1 + \lambda(R - R_1)$$

On en déduit l'expression définitive du cercle de rayon ρ :

$$(4) \quad [x - a(1 - \lambda)]^2 + y^2 = [R_1 + \lambda(R - R_1)]^2$$

λ étant toujours le périmètre fixant la position des cercles de rayon variable ρ .

Vérification :

Pour $\lambda = 0$, on a bien le cercle de rayon R_1 , soit :

$$x^2 + a^2 - 2ax + y^2 = R_1^2$$

ou

$$(4') \quad (x - a)^2 + y^2 = R_1^2$$

Pour $\lambda = 1$, on a encore le cercle de rayon R :

$$[x - a(1 - \lambda)]^2 + y^2 = [R_1 + \lambda(R - R_1)]^2$$

ou, si $\lambda = 1$

$$(4'') \quad x^2 + y^2 = [R_1 + (R - R_1)]^2 = R^2$$

II. — FLUX DANS UN ANNEAU EXCENTRÉ

En supposant que le flux dû au pôle circulaire soit émis sans dispersion, nous aurons pour ce flux :

$$(5) \quad \Phi = \alpha_0 \pi R_1^2 \cos \Omega t$$

Dans le cas, naturellement, d'une excitation alternative. Ce flux ne comprend ainsi que les lignes de force normales au disque et émanant du pôle rond situé en regard.

III. — FORCE ÉLECTROMOTRICE DÉVELOPPÉE DANS LA SPIRE ÉLÉMENTAIRE OU ANNEAU EXCENTRÉ

C'est évidemment :

$$(5') \quad e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

ou :

$$(5'') \quad e = \alpha_0 \Omega \pi R_1^2 \sin \Omega t$$

IV. — COURANT INDUIT DANS L'ANNEAU EXCENTRÉ

La résistance de la spire varie d'un point à l'autre, du fait que, à gauche, les éléments différentiels d'épaisseur sont moins importants qu'à droite, car ils sont respectivement proportionnels à D_1 et à D_2 . (Fig. 1 et 2)

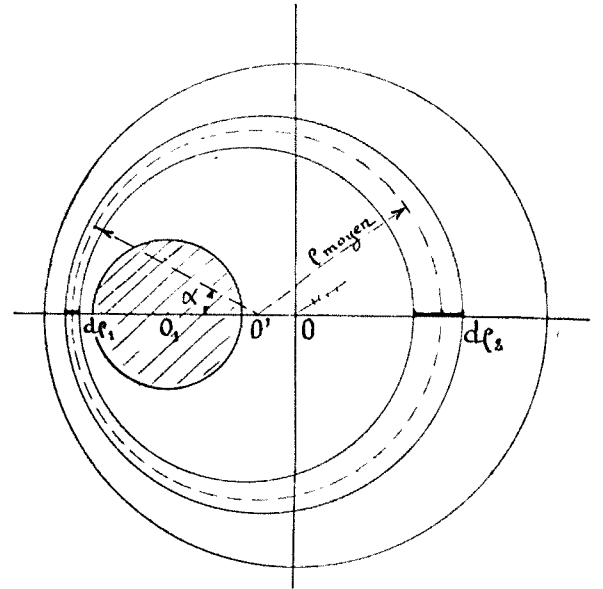


Fig. 2

Nous aurons donc successivement :

$$(5) \quad \Phi = \alpha_0 \pi R_1^2 \cos \Omega t = \Phi_0 \cos \Omega t$$

$$(5') \quad \frac{d\Phi}{dt} = \Omega \Phi_0 \sin \Omega t = \alpha_0 \pi R_1^2 \Omega \sin \Omega t$$

$$(6) \quad d\Phi = \frac{\Omega \alpha_0 \pi R_1^2 \sin \Omega t}{\frac{2\pi\rho}{l \varepsilon (d\rho)_{\text{moy}}}} = \frac{\Omega \Phi_0 \sin \Omega t}{\frac{2\pi\rho}{l \varepsilon (d\rho)_{\text{moy}}}} l \varepsilon (d\rho)_{\text{moy}}$$

en appelant ε l'épaisseur de l'anneau et l la conductance du métal, dont il est constitué.

Nous avons assigné ici pour ordre à $d\rho$ une valeur moyenne $(d\rho)_{\text{moy}}$.

En réalité, $d\rho$ varie d'une valeur minimum $d\rho_1$ vers A_1 , à une valeur maximum $d\rho_2$, vers A_2 , et est proportionnel en chaque point à la longueur du segment intercepté entre les deux cercles de rayons R_1 et ρ , (λ , paramètre, représentant le rapport des segments interceptés entre les deux cercles de rayons R et R_1).

V. — MODE DE VARIATION DE $d\rho$:

$$\text{Vers } A_1, \text{ on a } d\rho = d\rho_1$$

$$\text{Vers } A_2, \text{ on a } d\rho = d\rho_2$$

Donc évidemment :

$$(7) \quad \frac{d\rho_1}{d\rho_2} = \frac{R - a - R_1}{R + a - R_1}$$

Admettons que $d\varphi$ ait des variations proportionnelles à l'angle α décrit depuis l'origine (Fig. 2) :

$$(7') \quad d\varphi = \frac{d\varphi_1}{\pi} (\pi - \alpha) + \frac{\alpha}{\pi} d\varphi_2$$

$$(7'') \quad d\varphi = \frac{d\varphi_1}{\pi} \left[(\pi - \alpha) + \alpha \frac{R + a - R_1}{R - a - R_1} \right]$$

VI. — VALEUR EFFECTIVE DU COURANT CIRCULANT DANS LA SPIRE ÉLÉMENTAIRE OU ANNEAU EXCENTRÉ

Nous avons écrit :

$$d\Phi = \frac{\Omega \mathcal{B}_0 \pi R_1^2 \sin \Omega t \Gamma \varepsilon}{2 \pi (\varphi)_{\text{moy}}} (d\varphi)_{\text{moy}}$$

mais, nous le répétons, $(\varphi)_{\text{moy}}$ et $(d\varphi)_{\text{moy}}$ n'ont que la valeur de symboles provisoires dans une formule, qui n'a été établie que pour permettre de poser la question.

VII. — RÉSISTANCE D'UN ANNEAU EXCENTRÉ

Nous aurons d'après (7) :

$$\frac{d\varphi_1 + d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{(R + a - R_1) + (R - a - R_1)}{R - a + R_1}$$

$$\frac{d\varphi_1 + d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{2(R - R_1)}{(R - a - R_1)}$$

d'où :

$$\frac{d\varphi_1 + d\varphi_2}{2} = (d\varphi)_{\text{moy}} = \frac{R - R_1}{R - a - R_1} d\varphi_1$$

et enfin :

$$(7''') \quad d\varphi_1 = d\varphi_{\text{moy}} \left(\frac{R - a - R_1}{R - R_1} \right)$$

En adoptant le symbole [R] pour représenter la résistance de l'anneau excentré, symbole ne préjugant rien sur l'ordre infinitésimal des éléments qui figurent dans la formule, on peut écrire :

$$(8) \quad [R] = 2 \int_0^\pi \frac{\varphi dx}{\Gamma \varepsilon d\varphi}$$

car la longueur de l'élément est bien $\int \varphi dx$ et son épaisseur $d\varphi$ en chaque section normale à l'axe de symétrie passant par le centre $d\varphi = \varepsilon d\varphi$, Γ conductance du métal constituant le disque

[R] est donc de la forme :

$$(8') \quad [R] = \frac{2}{\Gamma \varepsilon} \int_0^\pi \frac{\varphi dx}{d\varphi} = \frac{2(\varphi)_{\text{moy}}}{\Gamma \varepsilon} \int_0^\pi \frac{dx}{(a + b d) d\varphi_{\text{moy}}}$$

En posant :

$$d\varphi = (a + b x) (d\varphi)_{\text{moy}},$$

a et b constantes appropriées,

Or, on a, d'après (7'') :

$$d\varphi = \frac{(d\varphi)_{\text{moy}}}{\pi} \frac{(R - a - R_1)}{R - R_1}$$

Ou, en remplaçant $d\varphi_1$ par sa valeur de fonction de $(d\varphi)_{\text{moy}}$ (d'après 7''') :

$$d\varphi = \frac{(d\varphi)_{\text{moy}}}{\pi} \left(\frac{R - a - R_1}{R - R_1} \right) \left[\pi - \alpha + \alpha \frac{R + a - R_1}{R - a - R_1} \right]$$

$$d\varphi = \frac{(d\varphi)_{\text{moy}}}{\pi} \left[\frac{(\pi - \alpha)(R - a - R_1) + \alpha(R + a - R_1)}{R - a - R_1} \right] \times \dots \times \frac{(R - a - R_1)}{R - R_1}$$

$$d\varphi = (d\varphi)_{\text{moy}} \left[\frac{\pi(R - a - R_1) + \alpha(2a)}{R - R_1} \right]$$

$$(7''') \quad d\varphi = \frac{(d\varphi)_{\text{moy}}}{\pi} \left[\pi \cdot \frac{R - a - R_1}{R - R_1} + \frac{2a \cdot \alpha}{R - R_1} \right]$$

Posons :

$$(9) \quad \begin{cases} P = \frac{R - a - R_1}{R - R_1} \\ Q = \frac{2a}{\pi(R - R_1)} \end{cases}$$

Il vient :

$$(9') \quad d\varphi = (d\varphi)_{\text{moy}} [P + Q \alpha]$$

Alors :

$$(8'') \quad [R] = \frac{(2\varphi)_{\text{moy}}}{\Gamma \varepsilon} \frac{1}{(d\varphi)_{\text{moy}}} \int_0^\pi \frac{dx}{P + Q x}$$

$$(8''') \quad [R] = \frac{(2\varphi)_{\text{moy}}}{\Gamma \varepsilon} \frac{1}{(d\varphi)_{\text{moy}}} \frac{1}{Q} [\text{Log}(P + Q x)]_0^\pi$$

Soit, tous calculs faits :

$$(8''') \quad [R] = \frac{(2\varphi)_{\text{moy}}}{\Gamma \varepsilon} \frac{1}{(d\varphi)_{\text{moy}}} \cdot \frac{\pi(R - R_1)}{2a} \text{Log} \left(\frac{R + a - R_1}{R - a - R_1} \right)$$

Soit :

$$(8''') \quad [R] = \frac{\pi(R - R_1)}{2a} \text{Log} \left(\frac{R + a - R_1}{R - a - R_1} \right) \frac{1}{\Gamma \varepsilon} \cdot \frac{(2\varphi)_{\text{moy}}}{(d\varphi)_{\text{moy}}}$$

Quand a tend vers 0, les deux cercles de rayons R et R_1 tendant à devenir concentriques. On sait que l'expression

$$\frac{\pi(R - R_1)}{2a} \text{Log} \frac{R + a - R_1}{R - a - R_1}$$

tend vers π , car on peut écrire :

$$\text{Log} \frac{R + a - R_1}{R - a - R_1} = \text{Log} \left(1 + \frac{2a}{R - a - R_1} \right)$$

qui, pour $a \sim 0$, devient :

$$\text{Log}(1 + \varepsilon)$$

ε étant très petit $\left(\varepsilon = \frac{2a}{R - R_1}\right)$

De même :

$$\frac{R - R_1}{2a} \text{Log} \left(1 + \frac{2a}{R - R_1}\right)$$

tend vers 1.

A la limite, la résistance de l'anneau excentré devient la même que celle de l'anneau concentrique de même épaisseur moyenne $(d\varphi)_{\text{moy}}$.

$$(8^{\text{vi}}) \quad [R'] = \frac{2\pi(\varphi)_{\text{moy}}}{\Gamma \varepsilon (d\varphi)_{\text{moy}}}$$

VIII. — PERTES PAR EFFET JOULE DANS LE DISQUE : HYPOTHÈSE D'UN POLE EXCENTRÉ

On a aisément :

$$(9) \quad d(RI^2)_{\text{moy}} = \frac{1}{2} (\Omega^2 \alpha_0^2 \pi^2 R_1^4) \frac{\Gamma \varepsilon (d\varphi)_{\text{moy}}}{\pi M (2\varphi)_{\text{moy}}}$$

I pris en valeur efficace,

Et en posant :

$$(9') \quad M = \frac{(R - R_1)}{2a} \text{Log} \left(\frac{R + a - R_1}{R - a - R_1} \right)$$

Cette perte s'applique à la partie superficielle comprise entre les deux cercles de rayons R et R_1 . Le rayon

$$\rho = R_1 + \lambda (R - R_1) \quad \text{variant de } \rho = R_1 \text{ à } \rho = R.$$

La perte dans la partie circulaire de rayon R_1 est toujours donnée par les formules classiques :

$$(10) \quad \begin{aligned} P_{J_1} &= \frac{1}{2} \int_0^{R_1} \Omega^2 \alpha_0^2 \pi^2 r^4 \frac{\Gamma \varepsilon dr}{2\pi r} \\ &= \frac{1}{4} \Omega^2 \alpha_0^2 \pi^2 \Gamma \varepsilon \int_0^{R_1} r^3 dr \\ &= \frac{1}{4\pi} \Omega^2 \alpha_0^2 \pi^2 \Gamma \varepsilon \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{R_1} \\ &= \frac{\Omega^2}{16} \alpha_0^2 \Gamma \varepsilon \pi R_1^4. \end{aligned}$$

Donc enfin :

$$(10') \quad P_{J_1(\text{moy})} = \frac{16\pi}{\Omega^2} \alpha_0^2 \pi^2 R_1^4 \Gamma \varepsilon = \frac{\Omega^2}{8\pi} \left(\frac{\Phi_0^2}{2} \right) \Gamma \varepsilon$$

Cette perte demeure inchangée dans les deux cas.

IX. — RAPPORT DES PERTES DANS LES PARTIES INTERMÉDIAIRES DANS LES DEUX CAS.

Pertes dans la surface intermédiaire excentrée :

$$(11) \quad \begin{aligned} \int_{R_1}^R d(RI^2)_{\text{moy}} &= \frac{1}{2} \Phi_0^2 \frac{\Gamma \varepsilon}{\pi M} \int_{R_1}^R \frac{(d\varphi)_{\text{moy}}}{(2\varphi)_{\text{moy}}} \\ &= \frac{\Phi_0^2}{2} \frac{\Gamma \varepsilon}{2\pi M} \text{Log} \frac{R}{R_1} \end{aligned}$$

Pertes dans la surface intermédiaire supposée concentrique :

$$(11') \quad \begin{aligned} \int_{R_1}^R d(RI^2)_{\text{moy}} &= \frac{1}{2} \Phi_0^2 \Gamma \varepsilon \int_{R_1}^R \frac{2\pi r}{dr} \\ &= \frac{\Phi_0^2}{2} \frac{\Gamma \varepsilon}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{R}{R_1} \right) \end{aligned}$$

Le rapport des pertes est donc :

$$\frac{P_{J_1}}{P_{J_2}} = \frac{\text{Pertes (pôle excentré)}}{\text{Pertes (non pôle excentré)}} = \frac{1}{M} = \frac{R - R_1}{2a} \text{Log} \frac{R + a - R_1}{R - a - R_1}$$

$$(11'') \quad \frac{P_{J_1}}{P_{J_2}} = \frac{R - R_1}{2a} \cdot \text{Log} \frac{R + a - R_1}{R - a - R_1}$$

Application numérique :

soit :

$$R - R_1 = 2R_1$$

$$R_1 = 3R_1$$

$$a = R_1$$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{P_{J_1}}{P_{J_2}} &= \frac{2R_1}{2R_1} \cdot \text{Log} \frac{R + R_1 - R_1}{R - R_1 - R_1} \\ &= \text{Log} \frac{R}{R - 2R_1} = \text{Log} 3 \end{aligned}$$

Donc :

$$(12) \quad \frac{P_{J_1}}{P_{J_2}} = \text{Log} 3 = 1,08$$