Calcul mécanique des lignes électriques dans le cas de longues portées en forte pente

(SUITE ET FIN) (1)

Dans la première partie de cette étude, l'auteur avait établi les formules mathématiques permettant de déterminer, dans tous les cas, d'une manière rigoureuse, les conditions de pose d'un câble. Dans le présent article, il examine d'abord les solutions pratiques qui ont fait l'objet de publications dans d'autres périodiques, puis il expose la méthode de similitude employée par lui ; des exemples numériques permettent de comparer ces divers procédés.

II. — MÉTHODES PRATIQUES DE CALCUL

1. La méthode de la Verband deutsche El. (2), est basée sur les propriétés ci-après de la chaînette, approximatives mais suffisamment exactes dans le cas des portées inclinées habituelles :

a) Le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction fixe est une droite verticale passant par le point de contact de la tangente parallèle à cette direction.

b) Dans les formules (1) et (2) (1) donnant Y et l en fonction de x , on peut négliger $\left(\frac{x}{m}\right)^p$ à partir de la puissance trois.

Fig. 1

c) La tension moyenne T_m de la portée inclinée AB est la tension au point de contact de la tangente parallèle à AB.

Il en résulte alors, pour la flèche la valeur :

$$f = \frac{y_1 + y_2}{2} - y_m$$

(1) Voir la Houille Blanche de mai-juin 1926.

(2) Voir la R. G. E. du 10 mai 1924.

expression dans laquelle y_m est l'ordonnée du point de contact dont l'abscisse est considérée comme égale à

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

L'équation (1) (1) permet d'exprimer $y_1 y_2$ en fonction de $x_1 x_2$ et donne aussi :

$$y_m = m \cos h \left(\frac{1}{m} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} \right) - m$$

Fig. 2

Par des transformations successives et en négligeant les puissances de $\frac{d}{m}$ supérieures à quatre, on trouve, en portant ces expressions de $y_1 y_2 y_m$ dans celle de f :

$$f = \frac{(2d)^2}{8m} \cos h \left(\frac{1}{m} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$

La formule (8) (1), devient, d'autre part, en négligeant les puissances de $\frac{d}{m}$ supérieures à trois :

$$H = 2d \sin h \left(\frac{1}{m} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$

(1) Voir la Houille Blanche de mai-juin 1926.

ERRATUM

N° 117-118, Septembre-Octobre 1926 : *Compensateurs de phase pour Moteurs asynchrones.*

Page 153, 2^e formule, lire :

$$\frac{\omega' l}{120} \text{ au lieu de } \frac{\omega' i}{120}$$

Page 153, colonne de droite, 4^e ligne après la figure, lire :

$B_3 B_1$ au lieu de $B_1 B_2$

Page 153, colonne de droite, 17^e ligne après la figure, lire :

$e'_1 e''_2$ au lieu de $e'_3 e''_2$

Page 154, colonne de gauche, dans les formules, $P = \dots$, $Q = \dots$, lire :

φ au lieu de φ

En élevant au carré ces deux équations et les retranchant ensuite membre à membre :

$$f^2 = \frac{(2d)^2}{64m^2} \cdot \left(1 + \frac{H^2}{(2d)^2}\right)$$

On se rappelle que le module m représente $\frac{T_0}{\Pi}$, T_0 étant la tension au point S et Π la force externe appliquée au câble par unité de longueur.

De l'hypothèse (a) résulte :

$$T_0 = T_m \cos \varphi = T_m \cdot \frac{2d}{AB}$$

et, par suite :

$$(12) \quad f = \frac{\Pi \cdot \overline{AB}^2}{8 T_m}$$

Enfin, de l'équation (2), par des transformations analogues aux précédentes et avec les mêmes approximations, on tire, pour la longueur « l » de l'arc de la chaînette A B :

$$(13) \quad l = AB + \frac{1}{24} \cdot \frac{\Pi^2 \overline{AB}^3}{T_m^2}$$

Les formules (12) et (13) étant de la même forme que celles ci-après relatives aux chaînettes horizontales

$$f_0 = \frac{\pi \cdot (2d)^2}{8 T_0} \quad l_0 = 2d + \frac{1}{24} \cdot \frac{\pi^2 (2d)^3}{T_0^2}$$

représentées par les abaques de M. Blondel, le calcul de f et

Fig. 3

de T_m pourra être effectué au moyen de ces abaques dans lesquels on entrera avec AB et T_m au lieu de $2d$ et T_0 .

On sait que, en plus des approximations précédemment énumérées, l'emploi de ces abaques implique une quatrième qui consiste à négliger le produit

$$\alpha (l - AB)$$

Le calcul de la tension au point le plus haut est ici très simple puisque, par suite des approximations admises :

$$T = T_m + \Pi f + \Pi \frac{H}{2}$$

2. M. Bachet ⁽¹⁾ préconise un procédé de calcul, applicable à toutes les portées inclinées, qui aboutit aussi à l'utilisation des abaques de M. Blondel. Les approximations admises sont les suivantes :

a) Pour une portée fixe et un même câble on peut négliger le carré de la variation de longueur de l'arc AB résultant des variations de T_0 .

b) Les termes $\left(\frac{d}{m}\right)^p$ peuvent être remplacés par des coefficients fixes égaux à leur valeur moyenne si « p » est plus grand que

quatre, tant que l'amplitude des variations du module se maintient entre certaines limites.

c) La variation de la longueur l' d'un câble sans tension, provoquée par une variation $\Delta \theta$ de la température, peut être considérée comme égale à $\alpha l' \Delta \theta$.

Cette approximation revient à négliger le produit $\Delta l_0 \cdot \Delta \theta$ (en appelant l_0 la longueur sans tension à 0°).

d) La variation de la longueur « l » d'un câble sous tension peut être considérée comme la somme algébrique des variations qui résulteraient, séparément, d'une part de ΔT_0 , d'autre part de $\Delta \theta$ (cela est d'ailleurs mathématiquement vrai pour des variations infiniment petites); de sorte que :

$$\Delta l = l (\alpha \Delta \theta + \lambda \Delta T_0)$$

e) La longueur infiniment petite dl_0 d'un élément de câble au repos peut être considérée comme égale, à un infiniment près d'un ordre supérieur et négligeable, à la longueur dl de l'arc élémentaire formé par ce même élément sous tension.

Des approximations ci-dessus résultent : la formule :

$$(14) \quad \Delta l = \varepsilon_1 \left(\frac{2d}{l_1}\right)^2 \left[\frac{\pi^2 (2d)^2}{24 T_0^2} - \frac{\Pi^2 (2d)^2}{24 T_1^2} \right]$$

dans laquelle ε_1 est un paramètre, fixe tant que $\frac{\Pi}{T_0}$ ne sort pas de certaines limites, « l_1 » la longueur initiale, T_1 la tension horizontale initiale, T_0 la tension horizontale finale, et la formule :

$$(15) \quad \Delta l = \alpha l_1 \Delta \theta + \gamma \left[\int_{x_1}^{x_2} t (dl_0) - \int_{x_1}^{x_2} t_i (dl_0) \right]$$

dans laquelle « t » est la tension finale en un point quelconque, t_i la tension initiale en ce même point.

Comme, par suite des propriétés connues de la chaînette :

$$t = T_0 \frac{dl}{dx}, \quad t_i = T_i \frac{dl_i}{dx}, \quad dl = \cos h \left(\frac{x}{m} \right)$$

on tire des équations (14) et (15), après une série de transformations :

$$(16) \quad A \cdot \Delta \theta = \frac{1}{\alpha} \left[\Delta \left(\frac{B^2 \pi^2 (2d)^2}{24 T_0^2} \right) - \Delta \left(\frac{T_0}{E} \right) \right]$$

où A et B sont des constantes à déterminer pour chaque cas particulier.

Cette équation ayant la même forme que celle traduite par les abaques de M. Blondel, la détermination de T_0 pourra être effectuée au moyen de ces abaques dans lesquels on entrera, non pas avec θ et $2d$, mais avec $A \theta$ et $B (2d)$.

Ayant ainsi déterminé le module $m = \frac{T_0}{\Pi}$ c'est-à-dire la chaînette dont fait partie l'arc correspondant à l'équilibre final, on pourra facilement calculer, soit la tension appelée moyenne dans la méthode précédente, soit la tension au point le plus haut.

3. Le calcul par la *méthode de similitude* est basé sur la considération suivante connue :

« Deux chaînettes quelconques de module m et m' sont semblables et le rapport de similitude est $\frac{m}{m'}$. »

(1) Voir R. G. E. des 15 et 29 mai 1926.

Donc si on fait coïncider en S les sommets de toutes les chaînettes et si on appelle $m, m', m'', \dots$ leurs modules, chaque rayon vecteur donne les relations :

$$x' = \frac{m'}{m} x \quad x'' = \frac{m''}{m} x \quad \dots \dots \dots \text{etc}$$

$$y' = \frac{m'}{m} y \quad y'' = \frac{m''}{m} y \quad \dots \dots \dots \text{e.c.}$$

On sait, d'autre part, que, en appelant $Y, Y', Y'', \dots$, les longueurs

Fig. 4

$y + m, y' + m', y'' + m'', \dots$, les tensions aux points B, B', B'', ... sont $11, Y, 11', Y', 11'', Y'', \dots$:

Comme les deuxièmes relations ci-dessus donnent :

$$y' + m' = \frac{m'}{m} (y + m), \quad y'' + m'' = \frac{m''}{m} (y + m) \dots \text{etc.}$$

On a aussi :

$$Y' = \frac{m'}{m} Y \quad Y'' = \frac{m''}{m} Y \quad \dots \dots \dots \text{etc.}$$

De même en appelant $l_1, l'_1, l''_1, \dots$ les longueurs des arcs de chaînette S B, S B', S B'', ... :

$$l'_1 = \frac{m'}{m} l_1 \quad l''_1 = \frac{m''}{m} l_1 \quad \dots \dots \dots \text{etc.}$$

Ces mêmes relations subsistent pour les longueurs des arcs SA, SA', SA'', ... de sorte que, les longueurs $l, l', l'', \dots$ des arcs AB, A' B', A'' B'', ... sont aussi reliées par :

$$l' = \frac{m'}{m} l \quad l'' = \frac{m''}{m} l \quad \dots \dots \dots \text{etc.}$$

Enfin on sait qu'un câble suspendu entre P et Q est un segment

Fig. 5

d'une chaînette Q Q' de sommet o, de sorte qu'en transportant par la pensée le point o en S, le câble vient prendre la place d'une des courbes de la figure 4, et par suite les relations précédentes permettent d'exprimer les tensions en P et Q ainsi

que la longueur de l'arc PQ en fonction des éléments semblables de la chaînette AB dès que l'on connaît le rapport de similitude.

Il suffira dès lors de calculer très exactement tous les éléments géométriques d'une chaînette unique de « référence » de module « r » ; ces calculs seront d'ailleurs assez rapides si on utilise des tables hyperboliques d'un emploi courant maintenant. On établira ainsi, au moyen des formules (1) et (2), pour un module $m = r$:

1° Une table $y = f(x)$ pour des intervalles Δx suffisamment petits par rapport à x .

2° Une table des valeurs des arcs « l_x » correspondants

3° Une table des différences premières : $\varepsilon_x = l - x$.

4° Une table des rapports $\frac{l_x}{x}$.

Dans la table « l_x », intercaler les arcs l_{2x} , soit en les calculant directement ce qui est assez rapide puisque

$$\sin h \frac{2x}{r} = 2 \sin h \frac{x}{r} \cos h \frac{x}{r}$$

c'est-à-dire

$$r \cdot l_{2x} = 2 l_x (y + r)$$

soit en les déduisant des valeurs de « l_x » voisines au moyen des différences premières et secondes (formule de Newton).

5° de la table l_x ainsi complétée on déduit la table de :

$$\varepsilon_{2x} = l_{2x} - 2x$$

On a ainsi tous les éléments nécessaires pour suivre les variations de la tension du câble PQ quand les conditions atmosphériques varient ; il suffit, en effet, d'utiliser les formules (9), (9bis), (10), (10 bis), dans lesquelles les longueurs $l_d, l_{2d}, \varepsilon_d, \varepsilon_{2d}$ sont obtenues en multipliant $l_x, l_{2x}, \varepsilon_x, \varepsilon_{2x}$, par le rapport de similitude $\frac{m}{r}$.

Soit, par exemple, un câble de poids unitaire π , de portée $2d$, dont les points d'appui sont dénivelés de H et dont on connaît la tension horizontale T_i . Il s'agit de déterminer la tension horizontale T_0 à laquelle sera soumis ce câble, à la même température, quand une surcharge provenant du vent ou du givre donnera lieu, par unité de longueur, à un effort extérieur résultant II.

La longueur initiale du câble sous tension est (voir formule 3) :

$$L_i^2 = H^2 + (2 l_d)^2$$

$2 l_d$ est la longueur d'une chaînette horizontale de module $m_i = \frac{T_i}{\pi}$ et de portée $2d$; celle-ci est semblable à la chaînette de référence « r » ; l'arc de « r », semblable au segment $2 l_d$, a comme portée

$$(17) \quad 2x_i = 2d \cdot \frac{r}{m_i}$$

Connaissant ainsi x_i , les tables précédentes permettent, au moyen de la formule de Newsten, de calculer l_x et l_{2x} . Comme

$$(17 \text{ bis}) \quad l_d = l_x \frac{m_i}{r} \quad \text{et} \quad l_{2d} = l_{2x} \frac{m_i}{r}$$

on obtient :

$$(18) \quad L_i = \sqrt{H^2 + \left(2 l_x \frac{m_i}{r}\right)^2}$$

La formule (9) donne alors, pour la tension moyenne initiale :

$$(19) \quad T_m = \frac{T_i}{2 L_i} \left[2 d + l_{2d} \left(1 + \frac{H^2}{2 (l_d)^2} \right) \right]$$

La longueur du câble au repos à la même température résulte de la formule (7) :

$$(20) \quad L_0 = \frac{L_i}{1 + \lambda T_m}$$

Lorsque π sera devenu Π , le câble sera un segment de chaînette de tension horizontale T_0 et de partie $2d$. J'appelle $2x$ la projection horizontale du segment semblable de la chaînette de référence, L la longueur du câble ainsi surchargé ; on a :

$$L = \sqrt{H^2 + (2 l_d)^2}$$

où $2 l_d$ est l'arc d'une chaînette horizontale $p q$ de modules $m = \frac{T_0}{\Pi}$, de portée $2 d$. Le rapport de similitude entre cette chaînette et celle de référence est : $\frac{m}{r}$; c'est aussi le rapport de similitude entre le segment incliné de la chaînette dont fait partie

Fig. 6.

le câble et le segment semblable de la chaînette de référence ; comme, d'autre part, ce dernier rapport est aussi $\frac{2 d}{2 x}$, on a :

$$(17') \quad \frac{p q}{a b} = \frac{m}{r} = \frac{2 d}{2 x}$$

comme $p q$ est égal à $2 d$, il en résulte :

$$a b = 2 x$$

d'où la construction représentée fig. 6. La longueur « $2 l_d$ » est celle de l'arc $p s q$ de la chaînette de module m et de portée $2 d$; $2 l_x$ est la longueur de l'arc $a s b$ de la chaînette de module r . On a :

$$2 l_d = 2 l_x \cdot \frac{2 d}{2 x}$$

donc :

$$(18') \quad L = \sqrt{H^2 + \left(2 l_x \frac{2 d}{2 x} \right)^2}$$

La tension moyenne du nouvel équilibre est (voir formule 9^{bis}) :

$$T_m = \frac{T_0}{2 L_0} \left[2 d + l_{2d} \left(1 + \frac{H^2}{2 \left(l_x \frac{2 d}{2 x} \right)^2} \right) \right]$$

l_{2d} est la demie longueur d'un arc de chaînette horizontale de portée $2.2 d$ et de module m ; la portée semblable de la chaînette de référence est $2.2 d \cdot \frac{r}{m}$ c'est-à-dire $2.2 d \cdot \frac{2 x}{2 d}$ c'est-à-dire $2.2 x$. Donc :

$$l_{2d} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot l_{2x} \frac{2 d}{2 x} = l_{2x} \frac{2 d}{2 x}$$

comme, d'autre part :

$$(21) \quad \frac{T_0}{\Pi} = \frac{2 d}{2 x} \quad \text{c'est-à-dire} \quad T_0 = \Pi \cdot r \cdot \frac{2 d}{2 x}$$

la formule précédente devient :

$$(22) \quad T_m = \frac{\Pi \cdot r \cdot \frac{2 d}{2 x}}{2 L_0} \left[2 d + l_{2x} \cdot \frac{2 d}{2 x} \left(1 + \frac{H^2}{2 \left(l_x \frac{2 d}{2 x} \right)^2} \right) \right]$$

La formule (7) donne alors :

$$(23) \quad \sqrt{H^2 + \left(2 l_x \frac{2 d}{2 x} \right)^2} = L_0 \left[1 + \lambda \frac{\Pi r \frac{2 d}{2 x}}{2 L_0} \left[2 d + l_{2x} \frac{2 d}{2 x} \left(1 + \frac{H^2}{2 \left(l_x \frac{2 d}{2 x} \right)^2} \right) \right] \right]$$

Pour chaque valeur de x , les tables de la chaînette de référence donnent l_x , l_{2x} , d'où, pour le premier membre, une valeur z , et, pour le deuxième membre, une valeur z' . Par approximations successives et par la méthode graphique habituelle en pareil cas, on détermine la valeur x_0 de x pour laquelle $z = z'$. L'équation (21) donne alors la tension cherchée :

$$T_0 = \Pi \cdot r \cdot \frac{2 d}{2 x}$$

Remarque. — Malgré la grande facilité qu'apporte aux calculs de (23) l'établissement préalable des tables l_x , l_{2x} , il est incontestable que l'élégance et la rapidité des deux méthodes résumées aux paragraphes précédents condamneraient celle-ci si on l'employait dans les cas où l'une des deux autres suffit. Aussi est-elle à envisager seulement pour les très grandes portées car, alors, on ne doit pas reculer devant la nécessité des calculs.

Néanmoins, afin de pouvoir comparer ses résultats à ceux donnés par les deux premières, je l'appliquerai à un des exemples traités par M. Brachet.

Exemple :

$$2 d = 150 \text{ m.} \quad H = 150 \text{ m.} \quad T_i = 8 \text{ kg} \quad \pi = 0,0094$$

$$\Pi = 1,71 \cdot \pi$$

Je prends comme chaînette de référence $r = 281,69$, pour la seule raison que j'ai antérieurement (1) établi ces tables.

Remplaçant les lettres de l'exemple général ci-dessus par ces valeurs, on obtient :

par la formule (17) : $2 x_1 = 24,8239$

Dans les tables de $r = 281,69$ on trouve :

pour $x = 24$ $\varepsilon_x = 0,029$

pour $x = 26$ $\varepsilon_x = 0,0369$

Au moyen de ces différences premières, on calcule par la formule de Newton :

$$\varepsilon_x^i = 0,0321$$

donc :

$$l_x^i = 24,8239 + 0,0321 = 24,855$$

Par application de (17_{bis}) :

$$l_d = 24,855 \cdot \frac{8}{281,69} = 75,094$$

et par application de (18) :

$$L_1 = \sqrt{150^2 + L \cdot (75,094)^2} = 212, m 265$$

Dans les tables de « r » on trouve ensuite : (2)

pour $2x = 50$ $\varepsilon_{2x} = 0,2618$

pour $2x = 52$ $\varepsilon_{2x} = 0,2793$

qui permettent de déterminer :

$$\varepsilon_{2x}^i = 0,2569$$

donc :

$$l_{2x}^i = 49,9048$$

et par suite :

$$l_{2x}^i = 49,9048 \cdot \frac{8}{281,69}$$

Par application de (19) :

$$T_m = \frac{8}{2 \cdot 212,265} \left[150 + 49,9048 \cdot \frac{8}{2,64788} \cdot \left(1 + \frac{150^2}{2(75,094)^2} \right) \right] = 11^k,328$$

(20) donne alors :

$$L_0 = \frac{212,265}{1 + 97 \cdot 10^{-6} \cdot 11,328} = 212^m,032$$

L'équation (23) permet maintenant d'écrire directement :

$$\sqrt{150^2 + \left(2 l_x \frac{150}{2x} \right)^2} = 212,032$$

$$\dots \left[1 + \lambda \cdot \frac{1,71 \cdot 0,0094 \cdot 281,69 \cdot \frac{150}{2x}}{2 \cdot 212,032} \left[150 + l_{2x} \frac{150}{2x} \cdot \dots \left(1 + \frac{150^2}{2 \left(l_x \frac{150}{2x} \right)^2} \right) \right] \right]$$

c'est-à-dire après calcul des coefficients et simplifications :

$$150 \sqrt{1 + \left(\frac{l_x}{x} \right)^2} - 212,032 = 2,47 \left[\frac{1}{x} + \frac{l_{2x}}{l_x^2} \dots \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{l_x}{x} \right)^2 \right) \right]$$

Appelons z le premier membre et z' le second.

Pour $n = 25$ les tables de r donnent $\left\{ \begin{array}{l} l_x = 25,0329 \\ l_{2x} = 50,2628 \end{array} \right.$

d'où :

$$z = 0,233 \quad z' = 0,396$$

Pour $x = 26$ les tables de r donnent $\left\{ \begin{array}{l} l_x = 26,0369 \\ l_{2x} = 52,2958 \end{array} \right.$

d'où :

$$z = 0,248 \quad z' = 0,3807$$

Nous voyons que $z' - z$ est passé seulement de 0,163 à 0,1327. En admettant une certaine proportionnalité entre $\Delta(z' - z)$ et Δx , on voit que z sera égal à z' pour x voisin de 30.

J'essaye alors $x = 35$

Les tables de r donnent : $l_x = 35,090$ $l_{2x} = 70,7226$

d'où :

$$z = 0,374 \quad z' = 0,2837$$

$z' - z$ étant devenu négatif, je reviens en arrière :

$$x = 27,5 \text{ donne } z = 0,263 \quad z' = 0,36037$$

Enfin $x = 30$ donne : $z = 0,299$ $z' = 0,3304$.

Le graphique $z' - z = f(x)$ construit à grande échelle et compensé au moyen des différences troisièmes de l'ordonnée, est une ligne presque droite, légèrement incurvée vers le haut, dont l'intersection avec l'axe des x est :

$$x_0 = 31,3$$

La valeur des T_0 se déduit de (21) :

$$T_0 = 1,71 \cdot 0,0094 \cdot 281,69 \cdot \frac{150}{2 \cdot 31,3} = 10^k,85$$

La valeur de la tension moyenne se déduirait de (22) mais elle n'a pas grand intérêt numérique.

La tension au point de contact de la tangente parallèle à PQ est :

$$T = \frac{T_0}{\cos \alpha} = T_0 \sqrt{2} = 15^k,3$$

Comparons maintenant ces résultats à ceux obtenus par application des deux premières méthodes exposées précédemment.

Celle du § 1 serait conduite ainsi :

Tension initiale du point de contact de la tangente parallèle à P Q :

$$\frac{8}{\cos \alpha} = 11,3$$

En entrant dans l'abaque Blondel avec :

$$\text{portée} = \sqrt{150^2 + 150^2} = 212,13 \text{ et tension} = 11,3$$

on obtient un point sur l'horizontale 81.

Pour en déduire les conditions d'équilibre en surcharge II, il faut y entrer avec :

$$\text{portée} = 212,13 + 1,71 = 362,74$$

(1) Voir *Houille Blanche* de novembre-décembre 1925.

(2) Le calcul de ε_x n'avait pas été fait par $2x = 48$.

Les formules du chapitre I permettant de déterminer les divers éléments de cette chaînette, on peut, en particulier, vérifier par le calcul qu'aucun point du terrain ne s'en approche à un intervalle trop faible.

Se donner ensuite un métal et une section du câble (c'est-à-dire π), ainsi que la température maximum Θ .

Puis déterminer, au moyen des formules déduites par le procédé de similitude, comme on l'a fait précédemment, de celles du chapitre I, la tension maxima du câble ainsi calculé, et dans le cas le plus défavorable. Si cette tension est supérieure à celle résultant de la limite de sécurité imposée, modifier soit l'emplacement du point d'attache soit le métal, soit la section.

Dans le 2^e cas. — Pour un diamètre donné D, on connaît la surcharge maxima Π produite à une certaine température θ par la résultante du poids et du vent ou du givre; d'autre part pour le diamètre D et pour chaque métal, on connaît la tension maxima T admissible. Il s'agit maintenant de savoir si un câble du métal choisi, de diamètre D, tendu entre P et Q de manière à ce que la tension en P soit T pour une charge Π réalisée à la température θ , satisfera au profil du terrain pour toutes les conditions atmosphériques et si la tension maxima T ne sera jamais dépassée.

En d'autres termes la chaînette initiale étant déterminée par :

$$Y_i = \frac{T}{\Pi}$$

au point Q, ainsi que par la pente, la portée P Q, le coefficient de dilatation α , le coefficient d'allongement $\pm \lambda$, il faut voir ce qu'elle devient quand la température passe de θ à Θ et la charge de Π à π . Cela fait, il ne restera plus qu'à la poser sur la coupe du terrain par le procédé graphique exposé au premier cas, avec, cependant, cette simplification, que, le module de la chaînette finale ayant été calculé, et le rapport de similitude graphique Γ étant par conséquent connu, on pourra placer directement P' Q' sur le dessin sans avoir à se servir de l'appareil à agrandissement.

La question est donc entièrement résolue théoriquement par les formules déduites, au moyen du principe de similitude, comme on l'a fait précédemment, de celles des paragraphes 6 et 7 du chapitre I. Mais j'ai annoncé dans ce chapitre la possibilité de simplifier les calculs par des constructions graphiques. Un exemple numérique va me donner l'occasion d'exposer ces constructions.

Bien que cet exemple eût dû être choisi parmi les portées exceptionnelles, j'ai pris à dessein une portée moyenne à pente ordinaire afin de rester dans des limites permettant des comparaisons avec les résultats que donneraient les méthodes utilisant les abaques de M. Blondel.

2. Données initiales :

Câbles aluminium de 37 brins de $\frac{382}{100}$

Tension maxima admise par mm^2 : 11 kg

Projection horizontale de la portée : $2d = 170 \text{ m}$.

Différence de niveau des points d'attache : $H = 14 \text{ m. 45}$

Hypothèse qui semble la plus défavorable (1) : vent de 72 kg. à 10° .

Poids unitaire apparent correspondant à cette hypothèse, par mm^2 de section utile : $\Pi = 0,00385 \times 1,61$

(1) Voir plus loin remarque faite à ce sujet, à propos de la longueur initiale.

Dessiner d'abord très exactement à une échelle convenable une chaînette auxiliaire calculée au moyen des tables de la chaînette de référence r ; cette chaînette auxiliaire de module R devra être choisie de manière à être utilisable pour tous les câbles et toutes les portées d'une même catégorie afin de n'avoir pas à recommencer pour chaque projet ce dessin préliminaire. Dans le but de tirer partie de la remarque faite au chapitre I formule 7 ter, il sera avantageux de dessiner aussi la chaînette de module $\frac{R}{2}$.

Si on a à étudier des portées peu inclinées, il sera préférable de prendre l'échelle des y plus grande que celle des x . Après quelques tâtonnements, on arrive à se formuler des règles pratiques qu'il serait trop long d'exposer ici et que chacun peut d'ailleurs déterminer à sa manière, desquelles on déduit certains repères permettant de faire un choix judicieux de R et des échelles.

Dans le cas des câbles aluminium acier à 37 brins et des portées du genre de celle choisie ici, j'ai pu utiliser une chaînette auxiliaire de module quadruple de la chaînette de référence utilisée dans l'exemple traité au chapitre précédent.

$$R = 4.r = 4.281,69.$$

Les échelles de l'épure sont $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } x : 1 \text{ m/m par mètre.} \\ \text{pour } y : 10 \text{ m/m par mètre.} \end{array} \right.$

a) Construction graphique initiale

Il s'agit de placer sur cette courbe une corde P' Q' de pente

$$\frac{14,45}{170} \cdot \frac{10}{1}$$

telle que (fig. 8) :

$$\frac{y + 10 \cdot R}{Y_i} = \frac{P' Q'}{P Q}$$

Fig. 8

étant entendu que :

$$Y_i = 10 \cdot \frac{11 \text{ kg}}{0,00385 \cdot 1,61}$$

Pour faciliter l'explication de la construction adoptée (fig. 9), je suppose que l'inclinaison donnée est AB. Soit ab , sur la chaînette auxiliaire, la corde parallèle à AB, à déterminer de telle façon que :

$$\frac{ab}{AB} = \frac{y + 10 \cdot R}{Y_i}$$

Soit $AK = Y_i$ et $ak = y + 10 \cdot R$. Les triangles bda' , BDA sont semblables, de même ade , ADE . On a donc :

$$\frac{AD}{ED} = \frac{ad}{de} = \frac{f}{ge}$$

D'où :

$$f g = g e \cdot \frac{A D}{E D} = 10 \cdot R \cdot \frac{A D}{Y_1}$$

Dans le cas actuel :

$$A D = 170 \text{ m/m} \quad Y_1 = \frac{11}{0,0035 \cdot 1,61} \cdot 10 \text{ m/m} \quad R = 4 \cdot 281,69$$

Fig. 9

et on trouve :

$$f g = 107 \text{ m/m} \cdot 9 = 26,975 \times 4$$

D'autre part, puisque $K E = 170 \text{ m/m}$ et $A K = Y_1$, la direction $A E$, c'est-à-dire la direction de $a f$, peut être construite graphiquement.

Pour déterminer la position de ab sur la chaînette auxiliaire $O R$ on opérera alors ainsi (fig. 10) :

Prendre un point quelconque a' sur $O R$, mener la droite $a' f'$ de direction connue (celle de $a f$) ; porter $f' g'$ égal à $107 \text{ m/m} \cdot 9$; mener la verticale $g' b'$ et, par a' , une droite parallèle à $A B$; elle coupe $g' b'$ en un point b_1 .

Recommencer pour un autre point a' jusqu'à ce que $b' b_1$, soit nul.

Cette construction donne toute satisfaction quand g' est voisin de o , car alors l'intersection b' est très franche.

S'il n'en est pas ainsi, on peut, de la figure 9, déduire d'autres constructions géométriques permettant de vérifier les résultats de la première. Pour ne pas allonger outre mesure cet article, je m'en tiendrai à celle-ci.

On trouve, par cette construction :

$$x'_1 = 40 \text{ m/m} \quad y'_1 = 6 \text{ m/m} \cdot 8$$

$$x'_2 = 151 \text{ m/m} \quad y'_2 = 102 \text{ m/m}$$

Ces coordonnées rapportées à la chaînette de référence $r = \frac{R}{4}$, et exprimées en mètres, deviennent :

$$x_1 = 10 \text{ m.} \quad y''_1 = 0 \text{ m } 170.$$

$$x''_2 = 37 \text{ m } 85 \quad y''_2 = 2 \text{ m } 55.$$

Mais les calculs qui vont suivre exigeant une très grande précision, ces coordonnées graphiques ne peuvent être adoptées sans corrections.

En calculant, au moyen des tables de r , l' y correspondant à $x_1 = 10$, on trouve : $y_1 = 0 \text{ m } 177$. D'autre part (fig. 9), les triangles semblables $o B E$, $o b e$, donnent :

$$\frac{b e}{B E} = \frac{o b}{o B}$$

c'est-à-dire :

$$(24) \quad \frac{y_1 + r}{Y_1 - 14,45} = \frac{o b}{o B}$$

et comme :

$$(25) \quad \frac{o b}{o B} = \frac{o a}{o A} = \frac{a d}{A D} = \frac{x_2 - x_1}{170}$$

on a donc :

$$\frac{y_1 + r}{Y_1 - 14,45} = \frac{x''_2 - x_1}{170}$$

d'où on tire :

$$x''_2 = x_1 + 170 \cdot \frac{y_1 + r}{Y_1 - 14,45}$$

qui donne :

$$\begin{aligned} x''_2 &= x_1 + 170 \cdot \frac{(0,177 + 281,69) 0,00385 \cdot 1,61}{11 - 14,45 \cdot 0,00385 \cdot 1,61} \\ &= 10 + 27,224 = 37,224 \end{aligned}$$

au lieu de 37,85 trouvé graphiquement.

Mais si on détermine x_2 par l'intersection de la chaînette « r » avec une droite parallèle à $A B$ passant par le point $x_1 y_1$ c'est-à-dire par l'équation :

$$(26) \quad \frac{14,45}{170} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{r \left(\cos h \frac{x_2}{r} - \cos h \frac{x_1}{r} \right)}{x_2 - x_1}$$

qu'on résout soit en employant une table hyperbolique soit

Fig. 10

au moyen des tables de « r », par approximations successives, on trouve :

$$x_2 = 37,822 \text{ d'où } y_2 = 2,5429$$

b) Faut-il prendre 37,224 ou 37,822 ?

Pour le décider, cherchons l'explication de cette divergence.

Le point b devrait être l'intervention exacte de $o B$ avec la chaînette $o R$; le point obtenu graphiquement en diffère légère-

ment de sorte que l'abscisse lue $x_1 = 40$ correspond à un point b_1 de oR dont l'ordonnée est $y_1 = 0,177 \times 4$. Les égalités (24) et (25) étant basées sur le parallélisme de la droite BA et de celle à obtenir ainsi que sur la proportionnalité de leurs longueurs, amèneront à un point a_1 tel que $a_1 a b_1$ soit un parallélogramme de sorte que ce point a_1 d'abscisse $37,224 \times 4$ n'est nullement sur la chaînette oR et que, par suite, il ne peut servir à déterminer le rapport de similitude cherché. — Au contraire l'équation (26) exprime que le point $4x_2, 4y_2$ est à l'intersection de la chaînette oR et de la ligne droite $b_1 a_1$; ce point est a_2 . Il n'y a donc aucun doute, il faut adopter $x_2 = 37,812$ et non pas $37,224$.

Mais il est bon de se rendre compte des conséquences de ce choix. Ce point a_2 devra correspondre à un point A_2 tel que $A_2 B_1$

Fig. 11

ait la longueur et l'inclinaison AB c'est-à-dire que $A_2 A B B_1$ est un parallélogramme. La chaînette cherchée étant semblable à la chaînette « r » et le rapport de similitude étant

$$\frac{\frac{a_2 b_1}{4}}{\frac{A_2 B_1}{4}} \text{ c'est-à-dire } \frac{\frac{a'_2 b'_1}{4}}{170} \text{ c'est-à-dire } \frac{\frac{(37,822 - 10) \cdot 4}{4}}{170},$$

son module m satisfait à la relation :

$$\frac{m}{r} = \frac{170}{37,822 - 10}$$

c'est-à-dire :

$$m = 281,69 \cdot \frac{170}{27,822} = 1721,20$$

La tension horizontale de cette chaînette est :

$$T_0^i = 1721,2 \times 11 = 10 \text{ k. } 668$$

Quel est l' Y de cette chaînette au point $x_2 y_2$, c'est-à-dire quelle est la tension maxima initiale ?

Il satisfait à :

$$\frac{Y_i}{y_2 + r} = \frac{m}{r} = \frac{170}{27,822}$$

Donc :

$$T_i = 11 \cdot (y_2 + r) \frac{170}{27,822} = 19 \text{ k. } 759$$

L'erreur graphique initiale équivaut donc à une légère modification du taux de sécurité imposé; cette erreur peut d'ailleurs être d'un sens quelconque.

Si on voulait tomber exactement sur 11k., il faudrait augmenter m , c'est-à-dire, puisque

$$\frac{m}{r} = \frac{170}{x_2 - x_1},$$

diminuer $x_2 - x_1$; comme ab resterait parallèle à la même direction, x_2 et y_2 devraient être pris plus petits. On essayerait, par exemple, $x_2 = 37,820$: pour cela, on calculerait l' y_2 correspondant, puis $x_1 y_1$ intersection de la chaînette de référence r avec une droite passant par $x_2 y_2$ et parallèle à AB ; $\frac{170}{x_2 - x_1}$ donnerait un nouveau rapport de similitude duquel on déduirait, comme ci-dessus, Y_i puis la tension. Par approximations successives on pourrait ainsi trouver un point a donnant exactement $T_i = 11$.

Mais il est bien évident que cette recherche minutieuse est généralement inutile, car de deux choses l'une : ou bien on dispose d'un métal déterminé et alors il vaut mieux adopter un taux de sécurité légèrement plus fort que celui imposé ce qui s'obtient en modifiant dans le sens voulu $x_2 y_2$ résultant de la construction graphique, ou bien le fournisseur du métal dispose de toute une gamme de métaux et alors il y a avantage pour le constructeur de la ligne à adopter le T_i le plus fort; dans ce cas, une différence de l'ordre de l'erreur résultant de la construction graphique n'aura aucune importance car $T_i = 11 \text{ kg}$ aura été choisie un peu au hasard et légèrement au-dessous du maximum réalisable par le fournisseur.

J'adopte donc : $T_i = 10 \text{ kg. } 759$

vu la formule (18) :

$$L_i = \sqrt{14,45^2 + \left(2 l_x \frac{170}{27,822}\right)^2}$$

Comme vérification, appliquons la formule (17) :

$$2 x_i = 170 \cdot \frac{27,822}{170} = 27,822$$

on retrouve donc bien pour $2 x_i$ la valeur de $x_2 - x_1$, comme il fallait s'y attendre.

Donc : $x_i = 13,911$

On pourrait déduire l_x des tables de « r » par interpolation mais l'erreur commise ainsi serait multipliée par $2 \cdot \frac{170}{27,8}$ c'est-à-dire environ par 12; il est donc préférable de calculer l_x par la formule (2) on trouve :

$$l_x = 13,9167$$

donc :

$$L_i = \sqrt{208,8025 + \left(2 \frac{170}{27,822} 13,9167\right)^2} = 170,82$$

La tension moyenne peut être évaluée graphiquement au moyen de la formule (7 ter) :

$$T_m = \frac{T_0^i}{2 L_i} \left[170 + \frac{1}{2} (L'_{x_2} - L'_{x_1}) \right]$$

la 2^e parenthèse est la longueur du segment de la chaînette de module $\frac{m}{2}$ compris entre les verticales X_1 et X_2 limitant le segment AB de la chaînette de module m . Si on considère les verticales x_1 x_2 de la chaînette référence r et la longueur $l'_{x_2} - l'_{x_1}$ du segment de la chaînette $\frac{r}{2}$ compris entre ces verticales, on voit que ce segment est semblable au premier et que le rapport de similitude est :

$$\frac{\frac{m}{2}}{\frac{r}{2}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{m}{2}$$

donc :

$$T_m^i = \frac{T_0^i}{2 L_i} \left[170 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{r} (l'_{x_2} - l'_{x_1}) \right]$$

ou bien, (fig. 12) :

$$T_m^i = \frac{T_0^i}{2 L_i} \left[170 + \frac{1}{2} \frac{m}{r} \sqrt{b'^2 \beta^2 + \left[2 \frac{r}{2} \cdot \sin h \left(\frac{x_i}{r} \right) \right]^2} \right]$$

c'est-à-dire :

$$T_m^i = \frac{T_0^i}{2 L_i} \left[170 + \frac{1}{2} \frac{m}{r} \sqrt{b'^2 \beta^2 + \left[2 \sin h \left(\frac{2 x_i}{r} \right) \right]^2} \right]$$

Fig. 12

ou

$$T_m^i = \frac{T_0^i}{2 L_i} \left[170 + \frac{m}{2r} \sqrt{b'^2 \beta^2 + (l_{x_2})^2} \right]$$

Sur l'épure des deux chaînettes auxiliaires R et $\frac{R}{2}$ on peut mesurer la longueur $b' \beta$; par suite de l'échelle des ordonnées choisie ici, il faudra diviser par 40 la valeur trouvée avant de la porter dans la formule ci-dessus. — Quand à l_{x_2} , elle est donnée par les tables de « r ». On obtient ainsi :

$$T_m^i = \frac{10,688}{2 \cdot 170,682} \left[170 + \frac{170}{55,644} 56,25 \right]$$

Comme on l'a fait précédemment, il est prudent de connaître l'ordre de grandeur de l'erreur commise en opérant ainsi. A cet effet, calculons T_m^i algébriquement par la formule 7 bis.

$$T_m^i = \frac{T_0^i}{2 L_i} \left[170 + \frac{1}{2} (L_{2 x_2} - L_{2 x_1}) \right]$$

La 2^e parenthèse est la longueur du segment de la chaînette de module « m » compris entre deux verticales situées à des distances de σ doubles de celles passant par A et B. Ce segment est semblable à celui de la chaînette de référence compris entre les verticales $2 x_1$ et $2 x_2$; donc :

$$L_{2 x_2} - L_{2 x_1} = \frac{m}{r} \cdot (l_{2 x_2} - l_{2 x_1})$$

égalité dans laquelle :

$$2 x_2 = 75,644 \quad 2 x_1 = 20$$

Les tables de « r » donnent :

$$l_{2 x_2} = 76,553 \quad l_{2 x_1} = 20,0167$$

Donc :

$$T_m^i = \frac{10,668}{2 \cdot 170,682} \left[170 + \frac{170}{55,644} 56,516 \right]$$

La différence entre cette valeur exacte de T_m^i et la valeur approchée précédente est :

$$\frac{10,668}{2 \cdot 170,682} \cdot \frac{170}{55,644} (56,516 - 56,25)$$

c'est-à-dire environ 0 k. 032 soit 0,3 %. Comme T_m^i sera multipliée ultérieurement par λ , la première manière semble être d'une exactitude suffisante pour les portées moyennes à forte tension.

J'adopte le T_m^i calculé entièrement algébriquement : 10 k 7056
La longueur du câble sans tension à 10° résulte de l'équation (20) :

$$L_0^i = \frac{170,682}{1 + \lambda \cdot 10,7056}$$

avec $\lambda = 1,15 \cdot 10^{-4}$; expression qui donne $L_0^i = 170,472$
à 0°, la longueur sans tension sera :

$$L_0^0 = \frac{170,472}{1 + 10 \cdot \alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = 17,25 \cdot 10^{-6}$$

Remarque. — Il faudrait maintenant refaire des calculs analogues pour chacune des conditions initiales qui peuvent être les plus défavorables, et adopter pour L_0^0 la plus grande des longueurs ainsi calculées.

Pour ne pas allonger outre mesure, j'admets que l'hypothèse initiale choisie ici est la plus défavorable.

d) Il s'agit maintenant de voir si le câble ainsi calculé conviendra au profil du terrain quand le vent sera nul et la température 40°.

La longueur au repos à 40° est :

$$L_0 = 170,472 \frac{1 + 40 \cdot \alpha}{1 + 10 \cdot \alpha} = 170,567$$

Sous la charge $\pi = 0,00385$, cette longueur devient en appelant $2x$ la projection du segment semblable de la chaînette « r » et

$2l_x$ la longueur de la portée horizontale $2x$ dans la chaînette « r » (formule 18') :

$$L = \sqrt{14,45^2 + \left(2 l_x \frac{170}{2x}\right)^2}$$

la tension horizontale est devenue maintenant T_0 , et on a :

$$T_0 = \pi \cdot r \cdot \frac{170}{2x} = 1,0845 \cdot \frac{170}{2x} = \frac{184,365}{2x}$$

la tension moyenne est devenue (formule 9 et 22) :

$$T_m = \frac{\frac{184,365}{2x}}{2 \sqrt{14,45^2 + \left(2 l_x \frac{170}{2x}\right)^2}} \dots \left[170 + l_{2x} \frac{170}{2x} \left[1 + \frac{14,45^2}{2 \left(l_x \frac{170}{2x} \right)^2} \right] \right]$$

et, comme, formule (7) :

$$L = L_0 (1 + \lambda T_m)$$

il vient :

$$\sqrt{14,45^2 + \left(2 l_x \frac{170}{2x}\right)^2} = 170,567$$

$$\dots \left[1 + 115 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{184,365}{4x \sqrt{14,45^2 + \left(2 l_x \frac{170}{2x}\right)^2}} \dots \left[170 + l_{2x} \frac{170}{2x} \left(1 + \frac{14,45^2}{2 \left(l_x \frac{170}{2x} \right)^2} \right) \right] \right]$$

c'est-à-dire :

$$x \left[835,25 + 115600 \left(\frac{l_x}{x} \right)^2 - 682,268 \sqrt{208,8 + 28900 \left(\frac{l_x}{x} \right)^2} \right]$$

$$\dots = 614,78 + \frac{l_{2x}}{2x} \left[614,78 + 8,88 \left(\frac{x}{l_x} \right)^2 \right]$$

Comme T_0 est certainement inférieur à T_0^i , c'est-à-dire à 10,66 et comme

$$2x = \frac{184,365}{T_0},$$

il en résulte : $x > 9$.

Mais on peut, de plus, au moyen de cette expression de x , se faire une idée de sa valeur approximative.

Pour $x = 40$	on aurait $T_0 = 2,3$
— $x = 30$	— $T_0 = 3,4$
— $x = 20$	— $T_0 = 4,6$
— $x = 10$	— $T_0 = 9,2$

Par analogie avec les cas usuels il est probable que T_0 est compris entre 3 kg. et 5 kg.

J'essaye donc $x = 30$.

Dans les tables de la chaînette « r » on trouve :

$$l_x = 30,0567 \quad L_{2x} = 60,454$$

d'où

$$\left(\frac{l_x}{x} \right)^2 = 1,0038 \quad \left(\frac{x}{l_x} \right)^2 = 0,9968 \quad \frac{l_{2x}}{2x} = 1,00757$$

Les valeurs correspondantes des deux membres de l'équation finale ci-dessus sont :

$$30 [835 + 116037 - 116627] \quad \text{et} \quad 614,78 + 628,35$$

La différence entre le 1^{er} et le 2^e nombre est : 6125.

Le 2^e membre varie très peu, $\frac{l_{2x}}{2x}$ et $\left(\frac{x}{l_x} \right)^2$ restant voisins de 1 ; dans le 1^{er} membre $\left(\frac{l_x}{x} \right)^2$ varie plus vite que

$$\sqrt{208 + \left(\frac{l_x}{x} \right)^2} \cdot 28,900,$$

d'ailleurs le premier est multiplié par un facteur fixe plus fort que le second. Comme $\frac{l_x}{x}$ diminue avec x , il résulte des remarques ci-dessus qu'il faut essayer un x plus petit.

$$x = 20 \quad l_x = 20,0167 \quad l_{2x} = 40,1345$$

d'où :

$$\left(\frac{l_x}{x} \right)^2 = 1,00177 \quad \left(\frac{x}{l_x} \right)^2 = 0,99832 \quad \frac{l_{2x}}{2x} = 1,00336$$

Portant dans les deux membres, on trouve :

$$20 [835 + 115793 - 116497] \quad \text{et} \quad 614,78 + 625,735$$

La différence entre le premier et le deuxième est : 1380.

Comme, par suite des remarques ci-dessus, il faut encore diminuer x , j'essaye :

$$x = 14 \quad l_x = 14,0058 \quad l_{2x} = 28,0461$$

d'où :

$$\left(\frac{l_x}{x} \right)^2 = 1,00052 \quad \left(\frac{x}{l_x} \right)^2 = 0,99916 \quad \frac{l_{2x}}{2x} = 1,001646$$

Portant ces valeurs dans les deux membres :

$$14 [835,25 + 115695,716 - 116,449] \quad \text{et} \quad 614,78 + 614,679$$

Le premier membre a comme valeur : 1140,54 ; le second : 1239,46 la différence entre le premier et le deuxième est donc négative ; elle est :

$$- 98,93$$

Ces trois essais suffisent pour le tracé dont il a déjà été question dans l'exemple du chapitre précédent ; il donne comme solution :

$$x_0 = 14,7$$

d'où :

$$T_0 = \frac{184,365}{29,4} = 6,27$$

donc :

$$m = \frac{T_0}{\pi} = 1628 \text{ m}$$

alors que le module de la chaînette initiale était 1721 mètres. Par suite de la faible différence entre ces deux modules et vu la petitesse de la portée, la question du terrain ne se pose pas ici.

e) Pour avoir la tension de pose à une température quelconque θ , il faudrait écrire :

$$L_0 = 170,472 \frac{1 + \alpha \theta}{1 + 10 \alpha}$$

$$L = L_0 (1 + \lambda T_m)$$

c'est-à-dire :

$$170,472 \cdot \frac{1 + x_0}{1 + 10x} =$$

$$\dots = \frac{\sqrt{144,5^2 + \left(2 l_x \frac{170}{2x}\right)^2}}{1 + \lambda \frac{184,365}{4x \sqrt{14,45^2 + \left(2 l_x \frac{170}{2x}\right)^2}} \left[170 + l_{2x} \cdot \frac{170}{2x} \right]}$$

$$\dots \left(1 + \frac{14,45^2}{2 \left(l_x \frac{170}{2x} \right)^2} \right)$$

c'est-à-dire une équation de la forme :

$$\frac{\sqrt{p + q \left(\frac{l_x}{x} \right)^2} + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{l_{2x}}{2x} \left[1 + v \left(\frac{x}{l_x} \right)^2 \right] \right]}{p + q \left(\frac{l_x}{x} \right)^2} = \frac{A}{B + c \theta}$$

Le premier membre est une fonction $z = f(x)$, le deuxième $z' = f(\theta)$. On construira séparément ces deux courbes (fig. 13).

Fig. 13

Chaque horizontale donnera l' x correspondant au θ de pose. On en déduira la tension horizontale de pose puisque :

$$T_0 = \frac{184,365}{x}$$

Le rapport de similitude avec la chaînette auxiliaire R étant

$$\frac{T_0}{\pi} = \frac{1}{2},$$

la longueur de la corde du segment semblable de cette dernière est :

$$\lambda \sqrt{14,45^2 + 170^2} = a b$$

On pourra facilement placer ab sur le graphique R puisqu'on connaît sa direction et sa longueur. L'ordonnée supérieure y_m donne la tension de pose au point d'attache :

$$T = (y_m + R) \frac{1}{\lambda} \cdot \pi$$

Si on veut connaître cette tension avec une exactitude parfaite, on la calculera au moyen de l'équation (11) où

$$2d = 170 \quad m_p = \frac{T_0}{\pi} \quad H = 14,45 \quad \pi_p = \pi$$

f) Il faut aussi vérifier que la tension au point le plus bas n'a pas une composante opposée au sens de la pesanteur, c'est-à-dire que le point le plus bas de la chaînette, dont fait partie le câble reste toujours entre les deux verticales des points d'attache. Si cette condition est réalisée pour le câble, elle le sera aussi pour ab sur la chaînette graphique R ; le contrôle en est donc facile graphiquement. Si on veut le vérifier algébriquement on opérera ainsi :

Pour chaque x , et par suite chaque T_0 , l'équation (11) donne T ; le rapport de similitude étant $\frac{170}{2x}$, l' y du point de la chaînette « r » correspondant au point d'attache supérieur résulte de :

$$\frac{y_2 + r}{\frac{T}{\pi}} = \frac{2x}{170}$$

les tables de « r » donnent l' x_2 correspondant à cet y_2 .

Comme :

$$x_2 - x = x_1$$

on voit immédiatement si le point de la chaînette « r » correspondant au point d'attache le plus bas est à droite ou à gauche de son axe de symétrie ce qui résout la question.

Remarque. — Les modules d'équilibre des câbles aluminium-acier étant compris entre 1.000 et 2.000, il sera préférable de calculer les tables de base « lx » .. etc..., pour une chaînette de référence $r = 1.000$ mètres. De cette manière, le rapport de similitude sera compris entre 1 et $\frac{1}{2}$, et, les erreurs des tables, au lieu d'être multipliées, comme dans les calculs précédents, par un coefficient voisin de 5, le serait par un coefficient beaucoup plus faible.

N. DEWULF