

# Sur une loi de l'écoulement en canal découvert

par M. MONTAGNÉ, Ingénieur, ancien élève de l'Institut Polytechnique de Grenoble

A la suite d'expériences exécutées dans deux canaux découverts, l'un à radier pierreux, l'autre à parois revêtues de ciment lissé, nous avons établi la relation (1) :

$$V = K \sqrt[3]{R} \quad (1)$$

Dans cette relation, V représente la vitesse d'une particule (vitesse dont la composante horizontale est la vitesse moyenne ordinairement considérée U, et dont la composante verticale est  $V_1$ ), et R le rayon moyen d'une section transversale.

Nous allons appliquer une loi de similitude, la loi de Reech, des carènes, à la résultante V. L'application de cette loi n'a pu, jusqu'ici, être faite, à notre connaissance, qu'à des ouvrages courts et seulement en considérant la vitesse moyenne U, c'est-à-dire, en réalité, une seule composante. On ne trouvera donc pas surprenant l'écart que l'on pourra constater, avec nos résultats, dans le cas de l'application de la loi à des ouvrages d'une certaine longueur, lorsqu'on ne prendra pas en considération la résultante V.

Rappelons la teneur de la loi de Reech, établie pour le calcul des forces à appliquer aux modèles réduits des carènes.

Elle s'écrit :

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt[3]{L}$$

$V_1$  et  $V_2$  sont les vitesses et L est le rapport des dimensions homologues.

Dans la carène de la figure I, les forces données par l'équation du mouvement sont relatives à l'extérieur. Si nous construisons une carène très longue de pente I, nous aurons à l'intérieur un

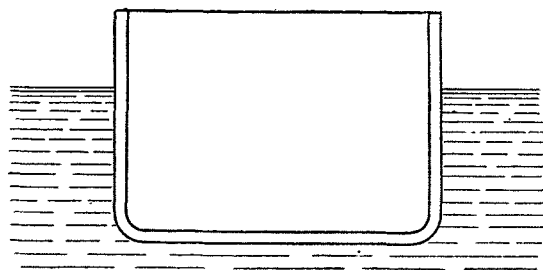


Figure. 1

canal découvert. Si, en outre, les parois sont très éloignées et si nous ne tenons pas, pour le moment, compte de la variation du coefficient C de la formule des canaux découverts :

$$R I = U^2 \quad \text{et} \quad U = C \sqrt[3]{R I}$$

nous avons, pour une pente donnée, et  $\frac{U_1}{U_2}$  étant le rapport des vitesses moyennes pour des rayons moyens  $R_1$  et  $R_2$  :

$$\frac{U_1}{U_2} = \sqrt[3]{L} = \sqrt[3]{\frac{R_1}{R_2}}$$

Mais

$$U_1 = C \sqrt[3]{R_1} \sqrt[3]{I} \quad \text{et} \quad U_2 = C \sqrt[3]{R_2} \sqrt[3]{I}$$

L'application de la loi de Reech à la composante horizontale (la seule que l'on ait l'habitude de considérer) de la vitesse moyenne donne donc :

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C \sqrt[3]{R_1}}{C \sqrt[3]{R_2}}$$

C'est-à-dire  $C = Cte$  quand le rayon varie, résultat qui est très éloigné des résultats expérimentaux.

Par contre, calculons les résultantes V par la loi de Reech

Posons :

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt[3]{\frac{R_1}{R_2}} \quad \text{pour } I = Cte$$

$$V_2 = \frac{V_1 \sqrt[3]{R_2}}{\sqrt[3]{R_1}}$$

ou

$$V_2 = K \sqrt[3]{R_2}$$

en posant

$$K = \frac{V_1}{\sqrt[3]{R_1}}$$

et en généralisant :

$$V = K \sqrt[3]{R}$$

(Dans les relations ci-dessus, V,  $V_1$  et  $V_2$  sont les résultantes des composantes).

C'est-à-dire que la relation (1) peut être obtenue en appliquant la loi de Reech à la résultante V.

## INFLUENCE DE LA PENTE I

Pour un rayon moyen R déterminé, l'application de la loi de Reech à la résultante V donne :

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt[3]{\frac{I_1}{I_2}}$$

$$V_2 = \frac{V_1 \sqrt[3]{I_2}}{\sqrt[3]{I_1}}$$

ou

$$V_2 = K \sqrt[3]{I_2}$$

en posant

$$K = \frac{V_1}{\sqrt[3]{I_1}}$$

et en généralisant :

$$V = K \sqrt[3]{I}$$

(1) Houille Blanche, mai-juin 1927, et Publications de l'Institut Polytechnique de Grenoble. « Une loi de l'écoulement en canal découvert. »

Bazin n'a pas jugé utile de faire dépendre le coefficient C de la pente. Il avait bien observé sa faible augmentation avec la

pente dans le cas de parois lisses, mais ses expériences personnelles n'ayant pas été faites dans des canaux de  $R > 0,30$  m., il n'avait pas observé une variation bien nette de C.

Donc, approximativement :

$$U = K \sqrt{I}$$

et

$$\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$$

La figure 2, par suite de la similitude des triangles, nous donne :

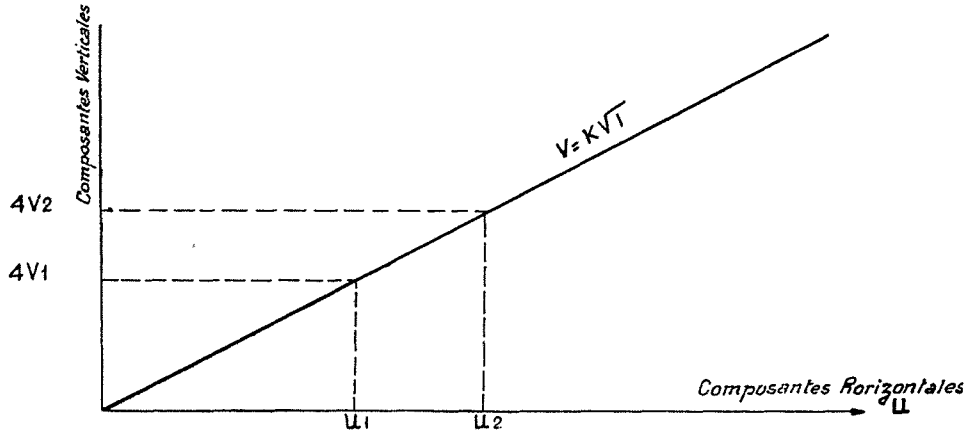


Figure 2

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$$

ou

$$V_1 = K \sqrt{I}$$

$V_1$  étant la composante verticale de la vitesse.

Par contre, les expériences de Ganguillet et Kutter avaient montré une variation assez sensible de C, positive quand la pente

dans le cas de grands canaux revêtus en ciment lissé, la formule de Bazin donnait des résultats trop forts, et qu'il convenait d'appliquer, non le coefficient  $\gamma = 0,06$  de la première catégorie mais le coefficient  $\gamma = 0,16$  relatif à la deuxième catégorie. La différence peut provenir, en partie, de l'état de la paroi. Il est très possible, en effet, qu'un ciment lissé dans les conditions ordinaires, sur un grand chantier, soit plus rugueux qu'un ciment spécialement lissé en vue d'expériences ou que du bois raboté. Nous ne pensons pas cependant que les différences observées proviennent entièrement de rugosités dissemblables.

Nous avons l'intention de rechercher, par voie expérimentale,

si les anomalies constatées ne proviendraient pas d'une variation des composantes transversales dont la conséquence serait l'inexactitude de la relation  $V = K \sqrt{I}$ . Mais il faudrait opérer dans de grands canaux de pentes diverses et, par suite dans des canaux où les vitesses seraient très variables pour des tirants d'eau sensiblement égaux. On devrait, de plus, utiliser des sections suffisamment larges, de manière à exclure partiellement l'effet

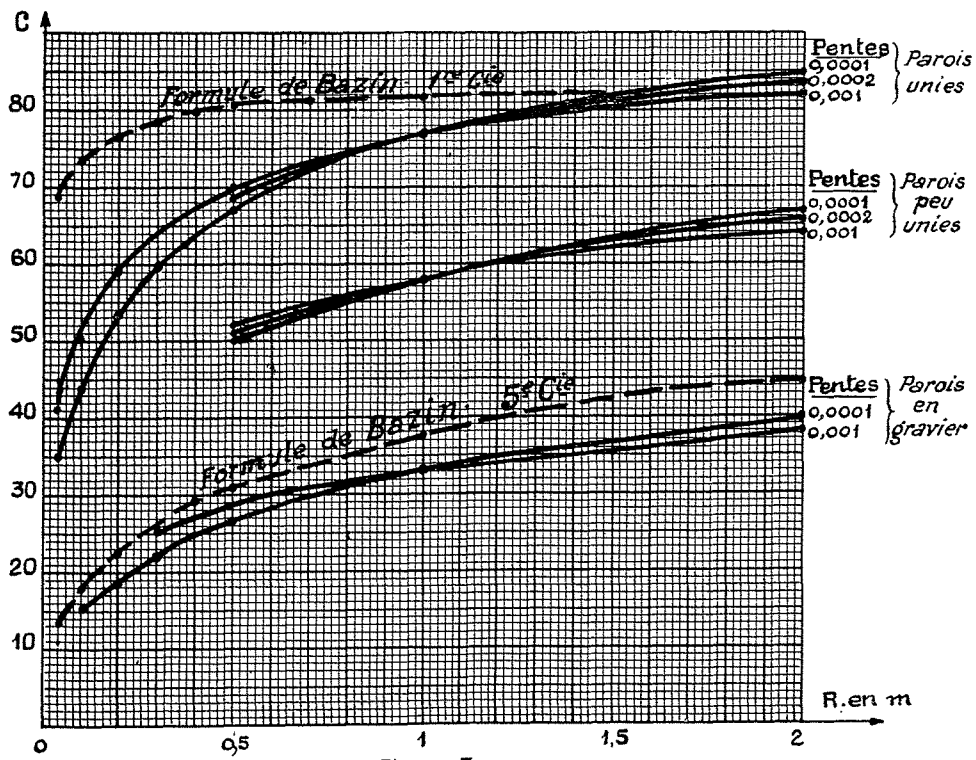


Figure 3

augmentait jusqu'à des rayons moyens de 1 m. environ et négative pour des  $R > 1$  m.

La fig. 3 montre les résultats graphiques de l'application de la formule de Ganguillet et Kutter pour des pentes variant de 0,0001 à 0,001. On a observé, après des mesures soignées, que,

des parois latérales sur la mesure des composantes transversales. Or, dans les grands canaux industriels, les vitesses ne sont pas

(1) Voir Flamand : *Hydraulique*, Ch. Béranger, éditeur, et D. Eydoux : *Hydraulique Générale et Appliquée*, J.-B. Baillière, éditeur.

très différentes. Nous n'avons obtenu que des résultats incomplets dans nos expériences exécutées dans des canaux de petits rayons moyens, mais présentant, par contre, de grandes différences dans leurs pentes. Dans l'étude publiée dans la *Houille Blanche*, de mai-juin 1927, nous avons dit que la cause principale de l'existence des composantes transversales était la différence des vitesses des filets liquides. Cependant, pour des tirants d'eau très faibles et pour de grandes pentes, la valeur de la com-

posante verticale  $V_1$  croît au lieu de rester sensiblement constante quand  $R$  augmente.

Il est très probable que, dans ce cas, à l'effet ordinaire des différences de vitesses, se superpose, en devenant prépondérant celui des mouvements tourbillonnaires ayant pour cause directe le choc des particules d'eau sur les aspérités de la paroi. L'effet des mouvements tourbillonnaires devient relativement moins important à mesure que  $R$  augmente. Cette hypothèse paraît

y a là un effet de pénétration des mouvements tourbillonnaires dans des filets animés de vitesses différentes à étudier. La figure 4 donne les courbes  $V_1 = f(R)$  pour des pentes variant de  $I = 0,00026$  à  $I = 0,041$ . Il n'a pas été possible d'arriver, dans le cas d'aussi fortes pentes, à des tirants d'eau suffisants pour que la composante verticale devienne sensiblement constante. Pour  $I = 0,00026$ ,

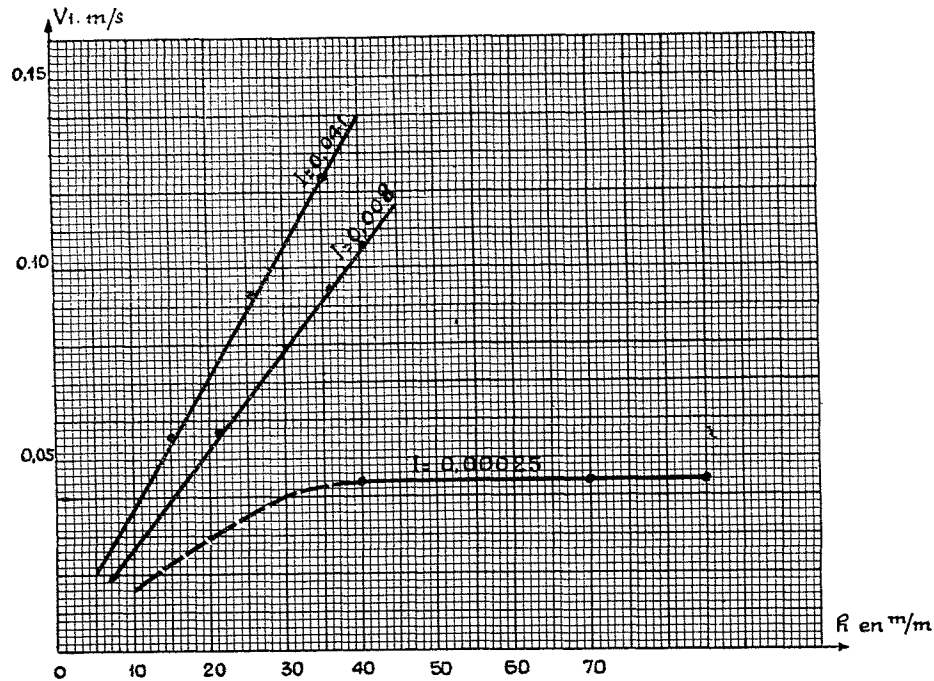


Figure : 4

$V_1 = Cte$  pour des tirants d'eau plus grands que 0,04 m. La détermination expérimentale d'un tirant d'eau critique pour  $I = 0,008$  et  $I = 0,041$  demande des canaux d'une largeur de 1 m. à 1,50 m., et de gros débits. Pour un tirant d'eau de 0 m. 30 et  $I = 0,041$ , on arriverait à une vitesse moyenne de 8 m./s. environ. Ces conditions, à moins de les réaliser spécialement, ne pourraient se trouver réunies que dans des radiers de chambres de mise en charge, de chambres de décantation ou de coursiers

expliquer, en partie, une observation de Bazin (1), qui a nettement observé, pour les petits rayons moyens, une augmentation du coefficient  $C$  avec la pente, dans des parois lisses, mais un effet inverse dans des parois rugueuses. Dans nos dernières expériences, pour de très faibles tirants d'eau, la composante  $V_1$  est très inférieure à la valeur donnée par la formule  $V_1 = K \sqrt{I}$ . II

La relation  $V_1 = K \sqrt{I}$  ne paraît devenir sensiblement exacte que lorsque les différences des vitesses sont nettement prépondérantes. On trouve cette condition, dans les canaux usuels, dès que le tirant d'eau dépasse quelques centimètres. Etudions les différences des vitesses, dans un plan vertical, dans des canaux de largeur indéfinie. Nous avons déjà dit que ces différences n'augmentaient pas, pour la même pente, lorsque le tirant d'eau devenait plus grand. Les figures 5 et 6 montrent

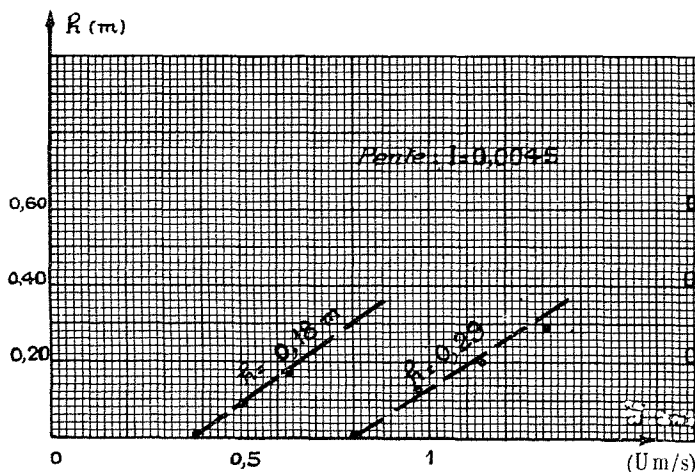


Figure : 5

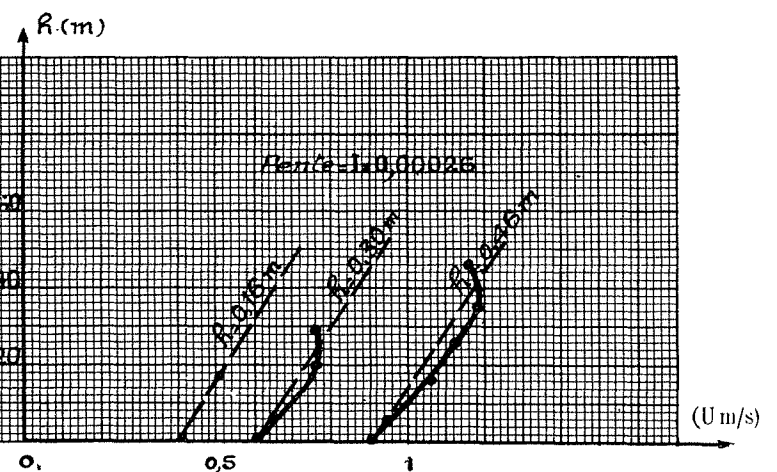


Figure : 6

La relation  $V_1 = K \sqrt{I}$  ne paraît devenir sensiblement exacte que lorsque les différences des vitesses sont nettement prépondérantes. On trouve cette condition, dans les canaux usuels, dès que le tirant d'eau dépasse quelques centimètres. Etudions les différences des vitesses, dans un plan vertical, dans des canaux de largeur indéfinie. Nous avons déjà dit que ces différences n'augmentaient pas, pour la même pente, lorsque le tirant d'eau devenait plus grand. Les figures 5 et 6 montrent

(1) Annales des Ponts et Chaussées 1897, 4<sup>e</sup> trimestre.

les différences des vitesses dans le cas, pour la figure 5, d'un canal à radier pierreux, et dans le cas, pour la figure 6, d'un canal à radier en ciment lissé. L'échelle est la même, mais le canal de la fig. 5 a une pente de 0,0045 et celui de la fig. 6 une pente de 0,00026.

On peut exprimer les différences des vitesses de la façon suivante :

La courbe de la répartition des vitesses dans un plan vertical se rapproche d'une parabole du second degré. Cette considération a permis des recherches théoriques très intéressantes dues, en particulier, à Bazin.

L'équation de la courbe est :

$$V = V_m - \theta (z - h')^2$$

ou

$$-\frac{dV}{dz} = 2\theta (z - h')$$

en appelant  $h'$  la profondeur du filet animé de la vitesse maxi-

siblement. Ce qui nous autorise à écrire, en prenant un tirant d'eau constant  $h$  et une inclinaison moyenne de la courbe des vitesses (voir fig. 5 et 6) :

$$V_m - W = K \sqrt{I}$$

ou

$$\frac{V_m - W}{h} = \frac{K \sqrt{I}}{h}$$

Soit :

$$\frac{dV}{dz} = K \sqrt{I}$$

et, par suite :

$$V_1 = K \sqrt{I}$$

en donnant à  $K$ , dans chacune des expressions ci-dessus, la valeur convenable.

Nous avons vu plus haut que des difficultés d'ordre matériel ne nous avaient pas permis de vérifier, expérimentalement, cette dernière relation, mais le raisonnement qui précède en confirme la quasi-exactitude. L'effet de la rugosité reste, aussi, à déterminer dans le cas des tirants d'eau usuels. D'après ce que montre

Diagramme N° 2

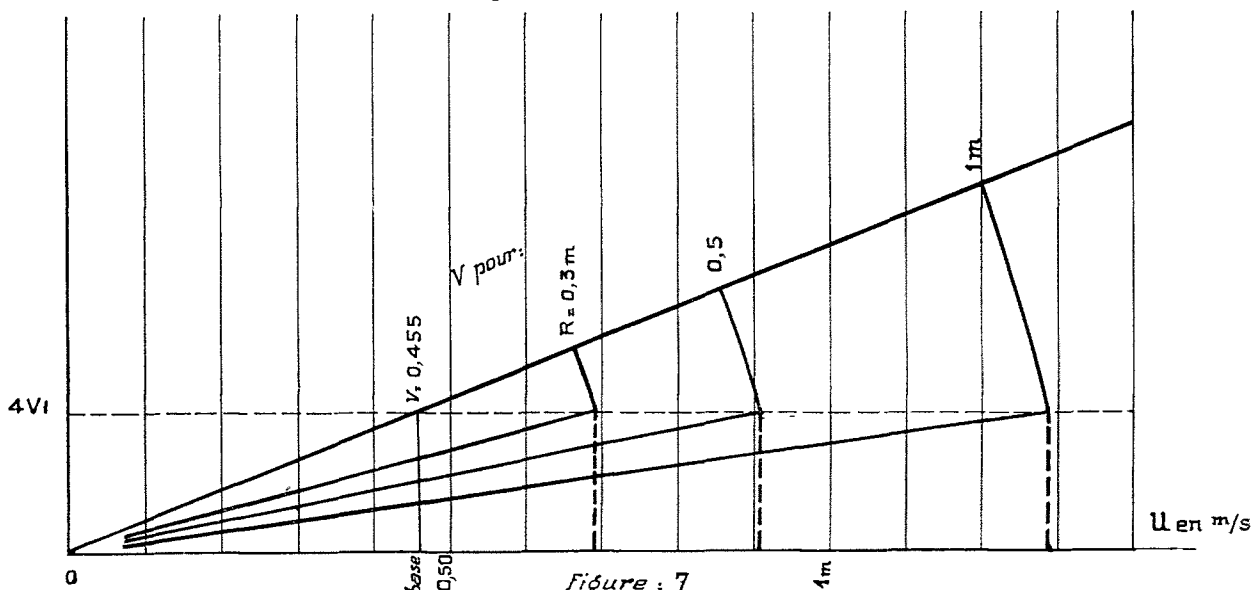


Figure : 7

mem  $V_m$  et  $z$  la profondeur à laquelle se trouve un filet donné.  $\theta$  est un coefficient numérique.

Or,  $\frac{dV}{dz}$  décroît à mesure qu'on s'éloigne du fond, et, dans les canaux à grand rayon moyen, change de sens près de la surface. On observe que les composantes verticales élémentaires diminuent également de valeur lorsqu'on s'éloigne du fond. Donc, si nous exprimons la cause des composantes verticales par  $\frac{dV}{dz}$ , nous pourrions admettre que ces dernières seront proportionnelles à la cause qui les produit et, par conséquent, à  $\frac{dV}{dz}$ . A ce sujet, voir Flamand (*Hydraulique*), page 302.

D'autre part, l'écart entre la vitesse au fond  $W$  et la vitesse maximum  $V_m$  reste aux environs de  $1/3 V_m$  (Flamand, page 203). Cependant, sur le Rhin, à Bâle et sur un fond de gros galets, cet écart s'est approché de  $1/2 V_m$ . Mais Flamand cite ce cas comme étant exceptionnel. Le rapport de la vitesse maximum  $V_m$  à la vitesse moyenne  $U$  n'est pas, lui-même, très variable.

On a finalement, pour  $U = K \sqrt{I}$ ,  $V_m = K \sqrt{I}$  et  $W = K \sqrt{I}$

son influence sur les différences des vitesses, il ne serait pas considérable. Il serait nécessaire d'avoir, pour une plus grande rugosité et une même pente, une augmentation de  $\frac{dV}{dz}$ .

Nous pouvons, d'autre part, d'après quelques expériences, dont nous ne donnons pas les résultats parce qu'ils ne sont pas d'une précision suffisante, obtenir la même indication.

APPLICATION DES RELATIONS  $V = K \sqrt{R}$  ET  $V_1 = K \sqrt{I}$  AUX PAROIS EN CIMENT LISSÉ

Le diagramme de la figure 7 donne les valeurs de  $U$  en partant d'un tirant d'eau de 0 m. 14, d'une composante horizontale  $U = 0,455$  m./s., et d'une composante verticale  $V_1 = 0,045$  m./s. pour  $I = 0,00026$ . Il est la reproduction du diagramme N° 2 de l'étude « Une loi de l'écoulement en canal découvert ».

Les valeurs de  $U$  permettent de calculer le coefficient  $C$  relatif à chaque rayon moyen, car on a :

$$C = \frac{U}{\sqrt{RI}}$$

Dans la figure 8, les valeurs de  $C$ , tirées des valeurs de  $U$ , données par un diagramme établi pour des  $R$  atteignant 5 m. sont comparées à celles que donne la formule de Bazin pour la première catégorie de parois où  $\gamma = 0,06$ .

On voit que les deux courbes se confondent pratiquement, jusqu'à  $R = 0 \text{ m. } 5$ , pour s'éloigner ensuite.

Remarquons cependant, tout de suite, que les calculs faits à

caractérisés par des pentes très faibles, de l'ordre de 0,0001. Remarquons ensuite que, à partir de  $R = 1 \text{ m.}$ , mais pour une rugosité différente, la courbe expérimentale donnée par les nombreuses mesures de l'aqueduc de New-Croton (mesures sur lesquelles Bazin a établi en partie sa formule) s'écarte aussi de la courbe donnée par la deuxième catégorie. Les expériences très soignées de R. Gordon sur l'Irrawaddi et dont Bazin fait

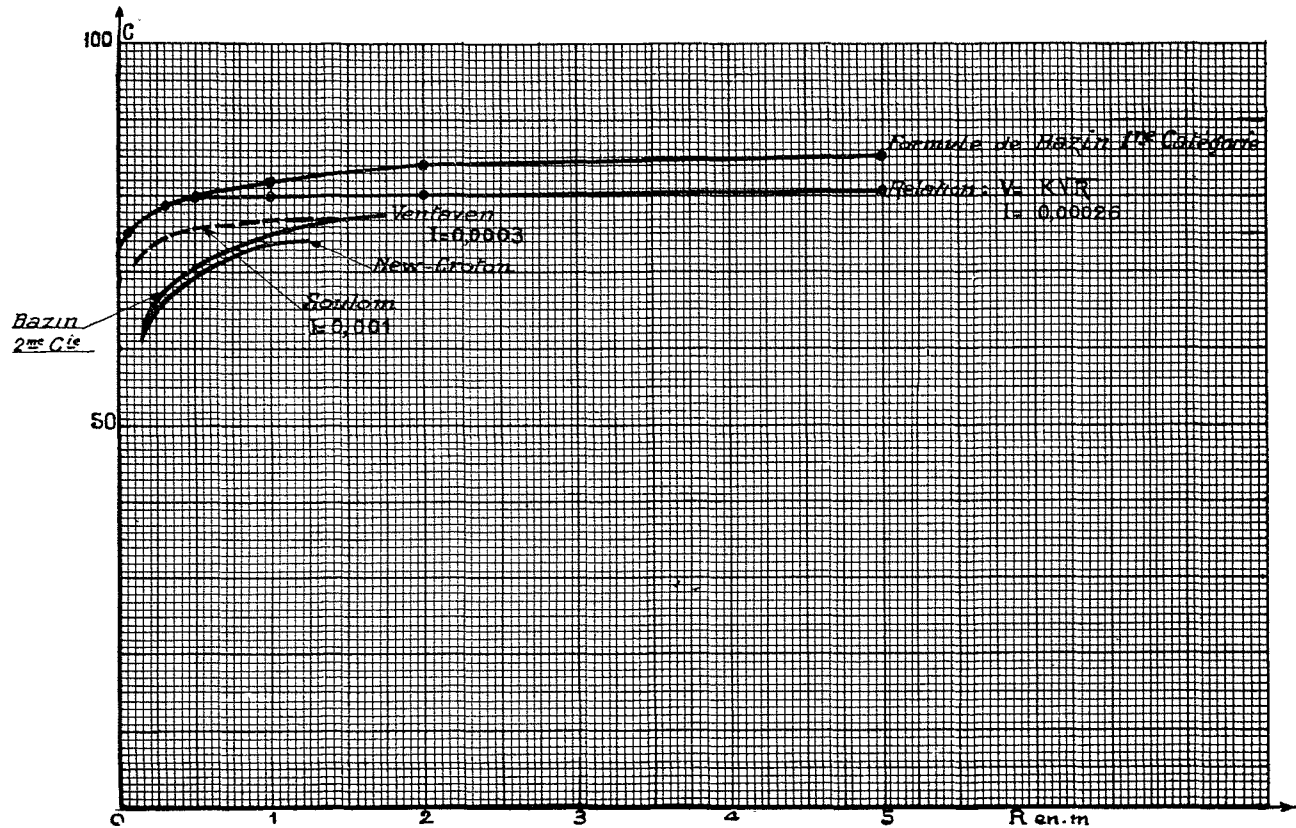


Figure 8

l'aide des données du canal de Ventavon <sup>(1)</sup> donnent un point qui se trouve sur la courbe tracée à l'aide de la relation  $V = K\sqrt{R}$ . Le canal de Soulom <sup>(2)</sup> donnerait une courbe se situant sensiblement en dessous de la précédente. Noter que la pente du canal du diagramme est 0,00026, celle du canal de Ventavon à peu près la même, 0,0003, et celle du canal de Soulom nettement plus grande, 0,001.

Or, Bazin s'est basé, pour établir le coefficient  $\gamma$  relatif aux parois lisses, sur des expériences exécutées dans de grands canaux, mais qui, tous, en particulier le canal Cavour, étaient

le plus grand cas dans ses longues et précises études sur les canaux découverts, donnent une variation régulière de  $C = 64$  pour  $R = 4 \text{ m. } 5$  et  $I = 0,00003$ , à  $C = 57$  pour  $R = 11 \text{ m. } 3$  et  $I = 0,000073$ .

Il est donc probable que, à partir d'un rayon moyen déterminé, différent pour chaque rugosité et chaque pente, il ne suffit plus de considérer la résultante des composantes pour calculer, avec une certaine précision, la vitesse moyenne horizontale. L'agitation devenant d'autant plus importante que les filets sont moins guidés, c'est-à-dire que  $R$  est plus grand, et que la pente est plus forte, on doit établir une courbe du coefficient  $C$  pour chaque pente usuelle et pour chaque rugosité.

<sup>(1)</sup> D. Eydoux. *Hydraulique générale et appliquée*, page 199.