ÉLECTRICITÉ

Nouveaux planimètres pour puissances à exposants fractionnaires ⁽¹⁾

par L. BARBILLION, *Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble*

Le problème de la Planimétrie est un des plus difficiles et aussi des plus intéressants qui soient pour l'Ingénieur. On sait que sa solution, même dans des cas très simples où la fonction sous le signe $\int$, se présente du premier degré ou d'un degré supérieur entier, apparaît sous une forme un peu empreinte d'approximation car, en effet, l'intégration repose sur des interprétations d'infiniment petits et, lorsque la fonction varie très rapidement, comme il arrive industriellement dans le cas de pointes brusques, l'intégration au moyen d'une roulette qui a à prendre brusquement une orientation nouvelle, souffre quelque difficulté. Aussi le procédé ancien, et barbare si l'on veut, mais toujours applicable, de la pesée du diagramme reprend-il alors toute sa supériorité.

Toutefois, la planimétrie est entrée dans la pratique de l'Ingénieur, ou du moins elle s'appliquait sans conteste sous les réserves indiquées, puissance non fractionnaire de la fonction sous le signe $\int$.

Il est malheureusement un très grand nombre de problèmes industriels où les intégrations sont de cette dernière nature. Aussi, doit-on savoir le plus grand gré à M. DUBOIS, inventeur d'un nouvel intégraphe-planimètre pour fonctions de toute nature, même à exposant fractionnaire.

M. DUBOIS a exposé fort congrûment le principe et les avantages de ce nouvel appareil dans le « Génie Civil » (1). De cette étude très poussée, nous extrayons les éléments essentiels suivants que nous estimons susceptibles de rendre quelque service.

I. — LES PLANIMÈTRES POUR PUISSANCES À EXPOSANTS ENTIERS.

Rappelons pour commencer, le principe des intégrateurs servant à l'évaluation mécanique d'intégrales de la forme $\int y^n dx$, où n est un nombre entier. Le cas $n = 1$ correspond à l'aire de la courbe, $n = 2$ au moment statique par rapport à l'axe des x de cette aire, $n = 3$ à son moment d'inertie et $n = 4$ à son moment du quatrième ordre par rapport au même axe, ce dernier intervenant dans des questions de construction de navires.

Ces intégrateurs font usage de la propriété que la puissance $y^n = l^n \sin^n \alpha$ (fig. 1) (l = longueur du bras traceur) est exprimable en fonction du sinus et du cosinus de l'angle α et de ses multiples, en vertu des deux formules suivantes, dans lesquelles i est le symbole $\sqrt{-1}$:

$$\sin^n \alpha = \frac{1}{2^{n-1} i^{n-1}} \times$$

$$\left[\sin n\alpha - \frac{n}{1} \sin (n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin (n-4)\alpha \mp \dots \right] \quad (1)$$

pour n entier impair.

$$\sin^n \alpha = \frac{1}{2^{n-1} i^n} \times$$

$$\left[\cos n\alpha - \frac{n}{1} \cos (n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos (n-4)\alpha \mp \dots \right] \quad (1)$$

pour n entier pair.

qui s'arrêtent d'eux-mêmes après un nombre fini de termes.

L'intégrale cherchée est évaluable mécaniquement au moyen d'un planimètre linéaire multiple, dont les diffé-

FIG. 1

rentes roulettes intégrales reçoivent, des mouvements par l'intermédiaire d'engrenages égaux aux multiples $1, 2 - n$ de l'angle α du bras traceur avec l'axe des x .

En prenant, par exemple, $n = 3$, on a :

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4(-1)} (\sin 3\alpha - 3 \sin \alpha)$$

ce qui montre que l'intégrale $\int y^3 dx$ sera évaluable par un planimètre linéaire double, dont les deux roulettes intégrantes recevront des déplacements angulaires α et 3α au moyen d'engrenages à rapport de multiplication $1:1$ et $3:1$.

(1) Génie Civil, 8 juin 1935 — p. 555-558.

II. — LES PLANIMETRES POUR PUISSANCES

A EXPOSANTS $\frac{m}{2}$.

Depuis un certain nombre d'années, l'évaluation d'intégrales de la forme $\int y^{\frac{m}{2}} dx$ a pris une importance industrielle. On sait, en effet, que la vitesse d'écoulement d'un fluide à la sortie d'un orifice est de la forme $v = \sqrt{2g\Delta h}$, en désignant par Δh la perte de charge (chute de pression) exprimée en colonne de fluide. Le débit par seconde de la veine fluide sera lui-même de la forme $k(\Delta h)^{\frac{m}{2}}$, avec $m=1$ pour un étranglement, un ajutage, $m=3$ pour un déversoir rectangulaire, $m=5$ pour un déversoir triangulaire.

La totalisation graphique d'un débit variable enregistré en fonction du temps pose donc le problème industriel de l'évaluation d'intégrales de la forme $\int y^{\frac{m}{2}} dt$ où t = le temps et $m=1, 3, 5$ etc., du fait que la plupart des débitmètres connus enregistrent, non le débit lui-même, mais la chute de pression, le papier à diagramme étant gradué en débits.

L'évaluation mécanique de semblables intégrales est basée sur la propriété bien connue qu'il est possible d'exprimer la racine carrée de l'expression $1 - \cos \alpha$ en fonction de lignes trigonométriques de l'angle $\frac{\alpha}{2}$.

$$\sqrt{1 - \cos \alpha} = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Il a suffi ainsi de donner à y la forme (fig. 2)

$$y = l(1 - \cos \alpha)$$

pour ramener l'intégrale cherchée à celle

$$\int \sqrt{y} dx = \sqrt{2l} \int \sin \frac{\alpha}{2} dx \quad (2)$$

FIG. 2

qu'il est possible d'évaluer par des moyens déjà connus. Le planimètre à racine carrée Adler-Ott applique déjà ce principe, en utilisant pour la bi-partition de l'angle α un triangle isocèle (Fig. 3), construction déjà indiquée par le professeur Amsler en 1855.

Les planimètres que nous allons décrire résultent de l'extension systématique du principe des intégrateurs à engrenages Amsler aux intégrales à exposant fractionnaire $\frac{m}{2}$. En vertu de la relation

FIG. 3

$$\int y^{\frac{m}{2}} dx = \int l [1 - \cos \alpha]^{\frac{m}{2}} dx = (2l)^{\frac{m}{2}} \int \sin^{\frac{m}{2}} \frac{\alpha}{2} dx$$

on est ramené au même problème que dans le cas des planimètres pour puissance à exposants entiers.

III. — PLANIMÈTRE SIMPLE A RACINE CARRÉE.

Dans le cas des débitmètres les plus courants (ajutage, tube de Venturi, tube de Pitot, diaphragme en mince paroi, etc...) le débit est simplement proportionnel à la racine carrée de la chute de pression et, pour déterminer la quantité de fluide écoulée pendant un temps déterminé, il faut évaluer l'intégrale $\int \sqrt{y} dx$, l'enregistrement étant supposé effectué en coordonnées rectangulaires.

Le planimètre est réalisé sous forme de planimètre linéaire avec chariot roulant sur un rail de guidage (fig. 4) parallèle à l'axe des x . Dans ses positions de départ et d'arrivée, le bras traceur OT (1) est dans le prolongement du bras du chariot, donc perpendiculaire à l'axe des x (des temps). En appelant α l'angle du bras traceur avec l'axe des y , l'ordonnée y est réalisée mécaniquement sous la forme $y = l(1 - \cos \alpha)$ et l'intégrale cherchée se transforme trigonométriquement, comme nous l'avons vu, en

$$\sqrt{2l} \int \sin \frac{\alpha}{2} dx$$

Le prolongement postérieur du bras traceur entraîne un système de roues planétaires de rapport $1:2$; la grande roue de diamètre $2d$ porte la roulette intégrante R et elle est concentrique à l'extrémité P du bras traceur. Elle engrène intérieurement avec le pignon central de diamètre d et est concentrique à l'articulation O du bras traceur. Dans la position de départ ($\alpha = 0$) le pivot de la roulette intégrante est parallèle à x . Lorsque l'on écarte le bras traceur d'un angle α , son prolongement OP fait tourner le système de roues planétaires en bloc, donc la roulette intégrante, du même angle α , en même temps qu'il imprime au pignon cette même rotation autour de son axe O ; de là une rotation $\frac{\alpha}{2}$ en sens rétrograde de

la roue satellite et de la roulette intégrante, et comme résultante, une rotation $\alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ pour ces derniers organes.

Le développement de la roulette intégrante est donc, d'après la théorie des planimètres à roulettes, égal à

$$\int \sin \frac{\alpha}{2} dx,$$

FIG. 4

c'est-à-dire à une constante numérique près l'intégrale cherchée. Il y a en réalité, comme dans le cas du planimètre linéaire simple, une intégrale « parasite », mais qui s'annule aux limites.

Pour obtenir l'intégrale radiale relative à un segment de courbe compris entre une ordonnée initiale et une ordonnée finale (fig. 4), on suit le contour du diagramme dans le sens des aiguilles d'une montre, la pointe traçante montant au départ (T_0) et redescendant à l'arrivée (T_1). Il n'est pas nécessaire, après parcours du contour, de revenir avec le traçoir au point de départ en suivant la ligne de zéro (T_0T_1), cette dernière course ne produisant aucune rotation de la roulette.

Par adjonction au bras traceur d'une roulette intégrante ordinaire, l'instrument se prête à l'évaluation des aires de la manière habituelle.

IV. — PLANIMÈTRE RADIAL A RACINE CARRÉE.

Ce planimètre s'applique aux diagrammes inscrits sur un disque rond en coordonnées polaires, le disque faisant habituellement un tour en 24 heures. Il y a lieu de distinguer deux cas, suivant que les ordonnées radiales croissent de l'extérieur vers le centre (cercle zéro extérieur), ou inversement du centre vers l'extérieur du disque (cercle zéro intérieur).

$$\int_0^{\varphi_1} \sqrt{(r_0 - r)} d\varphi \quad \text{ou} \quad \int_0^{\varphi_1} \sqrt{(r - r_0)} d\varphi$$

$$\varphi_1 \leq 2\pi \left\{ \begin{array}{l} r_0 = \text{rayon du cercle zéro,} \\ r = \text{rayon courant,} \\ \varphi = \text{angle polaire.} \end{array} \right.$$

a) Cercle zéro extérieur

On est donc conduit à l'évaluation de l'une des deux intégrales polaires.

Le planimètre est réalisé (fig. 5) sous forme d'un levier à genouillère à branches égales, de longueur l , articulé à l'une de ses extrémités au pôle du diagramme et portant à son extrémité libre la pointe traçante. La genouillère est à l'extension lorsque la pointe traçante est sur le cercle zéro, de façon que l'on ait

$$r_0 = 2l \quad \text{et}$$

$$y = r_0 - r = 2l (1 - \cos \alpha)$$

et l'intégrale à évaluer peut s'écrire :

$$\sqrt{r_0 - r} d\varphi = \sqrt{4l} \int_0^{\varphi_1} \sin \frac{\alpha}{2} d\varphi \quad (1)$$

où α est l'angle dont les branches l de la genouillère sont également écartées sur le rayon vecteur.

Celui des bras de la genouillère qui pivote autour du pôle du diagramme porte un disque denté de diamètre $4d$ qui porte lui-même la roulette intégrante R , de plan disposé radialement par rapport à l'axe de rotation du disque. Le plan de la roulette peut tourner ainsi autour d'un axe vertical A situé à distance fixe a du centre du diagramme. Le disque en question engrène avec un pignon de diamètre d , concentrique à la charnière C du levier à genouillère et solidaire du bras extérieur de celui-ci.

Dans la position de départ ($r = r_0$, $\alpha = 0$) la roulette intégrante est orientée diamétralement vers le centre du diagramme. Une rotation des bras de la genouillère par rapport au rayon vecteur, imprime une rotation 2α au pignon, qui fait tourner à son tour le disque denté et par là, le plan de la roulette intégrante.

Dans ces conditions, une rotation élémentaire $d\varphi$ du planimètre autour du pôle, sans déformation du système ($\alpha = \text{cte}$), provoque un développement circonférentiel

FIG. 5

$dc = \rho d\varphi \sin \beta = a \sin \frac{\alpha}{2} d\varphi$ (fig. 6) de la roulette, et par suite :

$$C = \int_0^{\varphi_1} dc = \int_0^{\varphi_1} a \sin \frac{\alpha}{2} d\varphi.$$

donc à une constante près, l'intégrale cherchée.

En réalité une rotation élémentaire $d\varphi$ s'accompagne, en général, d'une déformation $d\alpha$ de la genouillère par

FIG. 6

suite d'une variation dr du rayon vecteur, mais il est facile de voir encore que l'intégrale parasite correspondante s'annule entre les limites de l'intégration

b) Cercle zéro intérieur.

Il est facile de transformer le planimètre précédent, de façon à pouvoir évaluer un diagramme avec cercle zéro à l'intérieur. Il suffit, en effet, de fixer le traçoir T (fig. 7) non plus à l'extrémité T_1 du bras extérieur de la genouillère, mais à une tige radiale droite passant à travers un guide par le centre du diagramme et articulée, elle en T . On voit que l'ordonnée radiale $r - r_0$ croissant ici de l'intérieur vers l'extérieur, est encore donnée par $2l(1 - \cos \alpha)$, et l'on est en somme ramené au cas précédent.

Il est aisé, par une combinaison toute naturelle des deux constructions à zéro intérieur et extérieur, de rendre le planimètre universel. Il suffit simplement que la pointe traçante soit déplaçable le long de la tige de guidage de part et d'autre du pôle avec blocage à volonté à un endroit quelconque de la tige, de façon à pouvoir évaluer avec le même instrument des diagrammes de dimensions arbitraires, du moins entre certaines limites.

V. PLANIMÈTRE À PUISSANCE $\frac{3}{2}$

Ce planimètre est utile pour l'évaluation de la quantité d'eau écoulée pendant un temps déterminé à travers un déversoir rectangulaire à veine libre, dont le débit est très sensiblement proportionnel à la puissance $\frac{3}{2}$ de la hauteur de déversement sur crête du déversoir, hauteur enregistrée en fonction du temps par un limnigraphe.

Par la réalisation mécanique de l'ordonnée de nouveau sous la forme $l(1 - \cos \alpha)$ (fig. 2), l'intégrale

$$\int y^{\frac{3}{2}} dx = \int l^{\frac{3}{2}} (1 - \cos \alpha)^{\frac{3}{2}} dx$$

se transforme à l'aide des formules (1) ci-dessus mentionnées :

$$\int y^{\frac{3}{2}} dx = l^{\frac{3}{2}} \frac{2}{4} \left[-\int \sin 3\frac{\alpha}{2} dx + 3 \int \sin \frac{\alpha}{2} dx \right]$$

et elle devient évaluable par deux roulettes intégrantes effectuant respectivement une rotation $\frac{\alpha}{2}$ et une $\frac{3\alpha}{2}$, par rapport à leur position de départ parallèle à l'axe des y , à chaque écart α du bras traceur à partir de l'axe des y .

Une des formes de réalisation les plus simples est représentée par la fig. 8 : le bras traceur entraîne dans sa rotation un pignon de diamètre d , qui est concentrique à son articulation A . Ce pignon entraîne à son tour deux autres roues dentées d'axes fixes par rapport au chariot, de diamètres respectifs $2d$ et $\frac{2}{3}d$, et portant chacune une roulette intégrante. A tout écart α du bras traceur à partir de l'axe des y , correspondront des rotations $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{3\alpha}{2}$ des plans des deux roulettes par rapport à leurs positions initiales, également parallèles à l'axe des y .

A un déplacement dx du système avec α constant correspondront deux développements circonférentiels élémentaires :

$$dc_2 = dx \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad dc_1 = dx \sin 3\frac{\alpha}{2}$$

FIG. 7

de façon que les deux lectures

$$c_1 = \int \sin \frac{\alpha}{2} dx \quad \text{et} \quad c_2 = \int \sin 3\frac{\alpha}{2} dx$$

convenablement totalisées fourniront l'intégrale cherchée.

Signalons encore que dans le cas actuel, il y aura, comme on pouvait le penser, non pas une, mais deux intégrales parasites qui s'annulent aux limites.

La roulette solidaire de la roue à rotation $\frac{\alpha}{2}$ peut aussi bien être utilisée pour l'évaluation de l'intégrale de la racine carrée de l'ordonnée ; en outre, le planimètre peut être complété par une roulette intégrante des surfaces, directement rapportée au bras traceur. Le planimètre linéaire ainsi réalisé permet donc à la fois d'évaluer les intégrales :

$$\int y dx \quad \int y^{\frac{1}{2}} dx \quad \int y^{\frac{3}{2}} dx$$

VI. PLANIMÈTRE A PUISSANCE $\frac{5}{2}$

Il serait également possible de réaliser le planimètre à puissance $\frac{5}{2}$ nécessité par le déversoir triangulaire à veine libre.

On serait conduit alors à la transformation

$$\int y^{\frac{5}{2}} dx = \int \left[l \left(1 - \cos \alpha \right)^{\frac{5}{2}} \right] dx =$$

$$\frac{l^{\frac{5}{2}}}{16} \left[\int \sin \frac{5\alpha}{2} d\alpha - 5 \int \sin \frac{3\alpha}{2} d\alpha + 16 \int \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha \right]$$

expression que l'on pourrait évaluer mécaniquement au moyen d'un planimètre linéaire comportant trois roulettes intégrantes. Cet instrument aurait une importance industrielle moindre que les précédents.

FIG. 8