

ÉLECTRICITÉ

Un nouvel analyseur harmonique basé sur le principe du planimètre polaire⁽¹⁾

par L. BARBILLION, Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble

Au risque de paraître importun, nous croyons devoir publier ici une courte étude, du reste presque entièrement empruntée à l'inventeur du procédé, M. HARVEY, et consacrée à un nouvel analyseur harmonique, basé sur le principe du planimètre polaire.

Il fut un temps où la Science mathématique, physique et mécanique, dans ses grandes lignes et dans son architecture imposante, suffisait aux besoins de l'Ingénieur. Puis les applications se sont étonnamment amplifiées : les opérations expérimentales de contrôle et de laboratoire ont introduit une foule de facteurs et de chiffres dont l'exactitude seule, et non plus le symbole philosophique dont ils étaient la matérialisation, intéressait le technicien. En d'autres termes, il a fallu introduire dans la Technique ces procédés de recherches, de dissection, d'analyse, d'interprétation de courbes, et notamment pour toutes les courbes périodiques de mise en lumière des harmoniques, opérations d'un intérêt capital pour les progrès de l'Industrie.

Il y a peu d'années encore, seuls les électriciens se préoccupaient de l'analyse des harmoniques des courbes de tension et de courant, pour des motifs évidents d'interprétation de phénomènes souvent d'apparence anormale. C'est ainsi qu'une mesure rigoureuse d'une puissance électrique est liée à la connaissance des formes exactes et des courbes de tension et de celles d'intensité. Aujourd'hui, les mécaniciens réclament, pour ne parler que d'eux, des procédés réellement pratiques d'analyses harmoniques des courbes. Les déflagrations dues aux explosions dans les moteurs, les expansions de vapeurs dans les cylindres, les couples moteurs effectifs sur l'arbre des volants, se traduisent par des courbes périodiques, qu'on a souvent besoin de résoudre en sinusôides composantes.

Cette justification de l'étude ci-après ne sera pas inutile ; en tous cas, nous avons cru, en toute conscience, devoir la présenter.

THÉORIE DE L'INSTRUMENT.

Les formules donnant les coefficients $a_0, a_n, b_n, (n=1, 2,..)$ d'une série de Fourier d'une fonction $f(x)$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin nx$$

avec

$$0 < x < 2\pi$$

sont les suivantes

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_s^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_s^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_s^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

Le coefficient a_0 est la hauteur moyenne de la courbe entre $x=0$ et $x=2\pi$, et sa mesure revient à une mesure de surface. Comme nous l'indiquerons plus bas, l'instrument peut aussi être employé comme simple planimètre.

Nous donnerons ici la théorie qui conduit à la détermination des coefficients a_n et b_n .

Faisons déplacer (fig. 1) les extrémités P et W d'une tige de longueur constante l , le long de deux courbes fixes AA' et BB' depuis une position initiale AB jusqu'à une position finale $A'B'$. Considérons deux positions infiniment voisines PW et $P'W'$ de la tige. Appelons :

- ⊙ l'angle que forme à chaque instant la tige avec une direction fixe Δ .
- φ et φ' les angles que forment respectivement la tangente à AA' en P et celle à BB' en W , avec la tige.
- S et S' les abscisses curvilignes de P et de W .

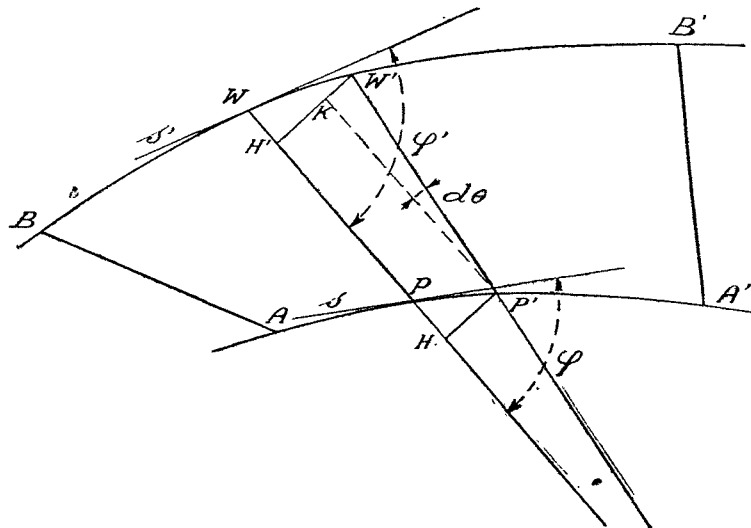


Fig. 1

(1) D'après l'étude de l'inventeur M. T. HARVEY, dans le « Génie Civil » du 15 Décembre 1934.

On a alors d'après la figure, où H et H' désignent les pieds des perpendiculaires abaissées de P' et de W' sur PW :

$$H'W' = WW' \sin \varphi' = H'K + KW' = HP' + l d \Theta \\ = PP' \sin \varphi + l d \Theta$$

Soit en confondant les arcs infiniment petits avec leur corde : $\sin \varphi' ds' = \sin \varphi ds + l d \Theta$, et en intégrant entre les positions limites AB et A'B'

$$\int_B^{B'} \sin \varphi' ds' = \int_A^{A'} \sin \varphi ds + l (\Theta - \Theta')$$

où Θ et Θ' désignent les angles que forment respectivement AB et A'B' avec Δ .

Si pendant le déplacement de la tige une roulette fixée à W et d'axe parallèle à PW peut à la fois glisser et rouler sur le papier, le développement circonférentiel ω roulé par la tranche de roulette sera précisément donné par

$$\omega = \int_{\Theta}^{\Theta'} \sin \varphi' ds' = \int_A^{A'} \sin \varphi ds + l (\Theta - \Theta')$$

DÉTERMINATION DE a_n . — Soit maintenant AA' (fig. 2) la courbe représentant $f(x)$ entre $x=0$ et $x=2\pi$, l'intervalle d'angle de 0 à 2π étant représenté par la longueur a . Faisons décrire à l'extrémité P de la tige PW le pourtour OAA'A''O et obligeons pendant ce déplacement PW à former pour toute abscisse x de P l'angle nx avec la direction positive de y , en sorte que PW fera par balayage n tours complets dans le sens des aiguilles d'une montre pendant que P décrit AA', et n tours dans le sens opposé pendant que P décrit A''O.

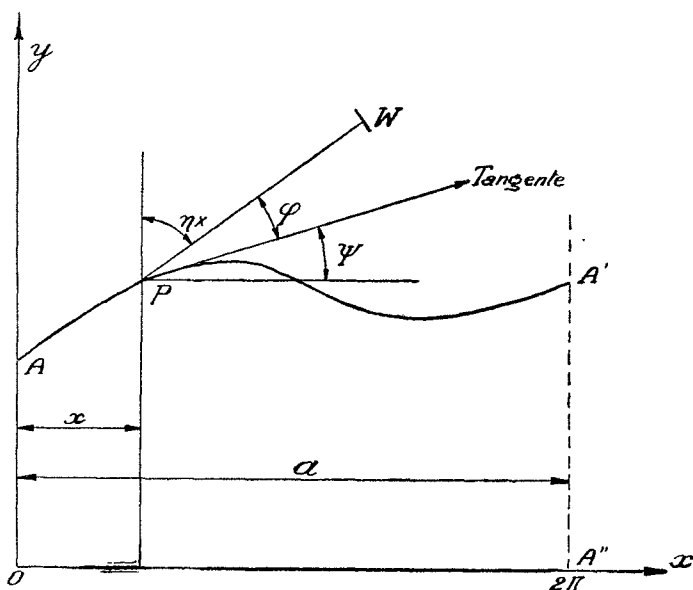


FIG. 2

Pendant le déplacement de P, le long de OA et A'A'', PW est situé sur ces lignes et la roulette glisse seulement sur le papier sans rouler.

Il reste à calculer le développement ω_1 roulé par la roulette pendant le déplacement AA'. On a pendant ce déplacement.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (nx + \psi)$$

ψ étant l'angle que forme la tangente avec l'axe des x , d'où

$$\omega_1 = \int_{x=0}^{x=2\pi} \sin \varphi ds + l 2\pi n = \int_{x=0}^{x=2\pi} \cos (nx + \psi) + l 2\pi n$$

soit en intégrant

$$\omega_1 = n \int_0^{2\pi} \cos nx dx + l 2\pi n$$

Or, comme le déplacement négatif A''O donne $\omega_2 = l 2\pi n$, on a pour le déplacement total

$$\omega_1 - \omega_2 = n \int_0^{2\pi} \cos nx dx$$

Si d est le diamètre de la roulette, et m son nombre de rotations (lu sur un compteur), on a

$$\omega_1 - \omega_2 = m \pi d$$

d'où le coefficient a_n de la série de FOURIER.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos nx dx = \frac{md}{n}$$

DÉTERMINATION DE b_n . — Faisons maintenant déplacer P le long du même contour, mais en obligeant la barre PW à former l'angle n avec la direction négative de ox .

Dans ces conditions, les longueurs roulées par ω seront

Pendant le déplacement OA	$\omega_1 = OA$
— — — A'A''	$\omega_3 = q' q''$
— — — A''O	$\omega_4 = 2\pi nl$

Enfin, pendant le déplacement AA', on a

$$\varphi = \pi - (nx + \psi)$$

La figure 3 représente le schéma de cette réalisation. Un cadre rectangulaire CDEF est mobile dans la direction des y sur trois rouleaux $R_1 R_2 R_3$. Une entretoise BB faisant partie du cadre, présente sur sa face supérieure une rainure rectangulaire taillée en creux G et sur sa face verticale postérieure une crémaillère K; rainure et crémaillère sont parallèles à l'axe des x . Un chariot L est suspendu à deux galets V_1 et V_2 à tranche en V, reposant sur les arêtes de la rainure et à un galet cylindrique V_3 roulant sur le côté antérieur CD du cadre.

Le chariot pouvant rouler librement en direction des x entre deux butées d'arrêt S_1 et S_2 , une pointe traçante T fixée au chariot peut parcourir en direction des x une distance a (environ 24 cm.) représentant la région 0 à 2π . Grâce de plus à la liberté de déplacement du cadre dans la direction des y , la pointe T pourra décrire un contour quelconque à l'intérieur de cette région.

Le chariot porte sous sa face inférieure un bras curseur H de position réglable suivant l'arc des y ; dans un trou vertical du bras H , on enfle un pivot P . Ce dernier est rendu solidaire d'une part de l'une quelconque des six roues dentées de rayon $\frac{a}{2\pi n}$ pour $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$, d'autre part d'un petit cadre portant la roulette intégrante W roulant sur le papier autour de P .

Pour mettre l'instrument au point, on ramène le chariot L à fond vers la gauche jusqu'au contact avec la butée S_1 , de telle façon que la pointe traçante T soit à l'origine des coordonnées ; puis après avoir enfilé la roue dentée d'harmonique n sur le pivot P , on déplace le bras curseur H jusqu'à faire entrer la roue en prise avec la crémaillère de façon que la direction prise par PW à l'origine soit celle des y positifs ou celle des x négatifs, selon que le coefficient cherché est a_n ou b_n .

Lorsqu'on fait décrire au traçoir T le contour limite, P décrit une courbe géométriquement égale, et PW fait avec les directions $+y$ ou $-x$, l'angle nx à toute position (x, y) de T .

En immobilisant le chariot L par rapport à l'entretoise BB , l'instrument se prête à la mesure d'une surface, d'un moment statique, ou d'un moment d'inertie, suivant le même procédé que l'intégrateur d'Amsler. Pour cela, on modifie son montage en lui adjoignant un bras traçeur et un secteur denté.

$$\omega_2 = \int_{x=0}^{x=2\pi} \sin \varphi ds + l 2\pi n = \int_{x=0}^{x=2\pi} \sin (nx + \psi) ds + l 2\pi n$$

soit en intégrant

$$\omega_2 = \left| y \cos nx + n \int y \sin nx dx \right|_{x=\sigma}^{x=2\pi} + l 2\pi n$$

$$\omega_2 = A'' A' - \sigma A + n \int_0^{2\pi} y \sin nx dx + l 2\pi n$$

La longueur roulée positive totale sera donc

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 = n \int_0^{2\pi} y \sin nx dx$$

Soit comme précédemment, si m est le nombre de rotations de la roulette

$$\frac{m d}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin nx dx = b_n$$

RÉALISATION DE L'INSTRUMENT.

d'où

L'instrument doit permettre à l'une des extrémités P d'une tige PW de décrire un contour quelconque à l'intérieur d'une région q représentant 2π radians en direction des x , en même temps qu'obliger PW à faire à chaque instant l'angle nx avec la direction positive des y ou la direction négative des x , suivant que l'on veut déterminer le coefficient a_n ou b_n . La réalisation décrite dans l'article en question permet cette opération depuis $n=1$ jusqu'à $n=6$.

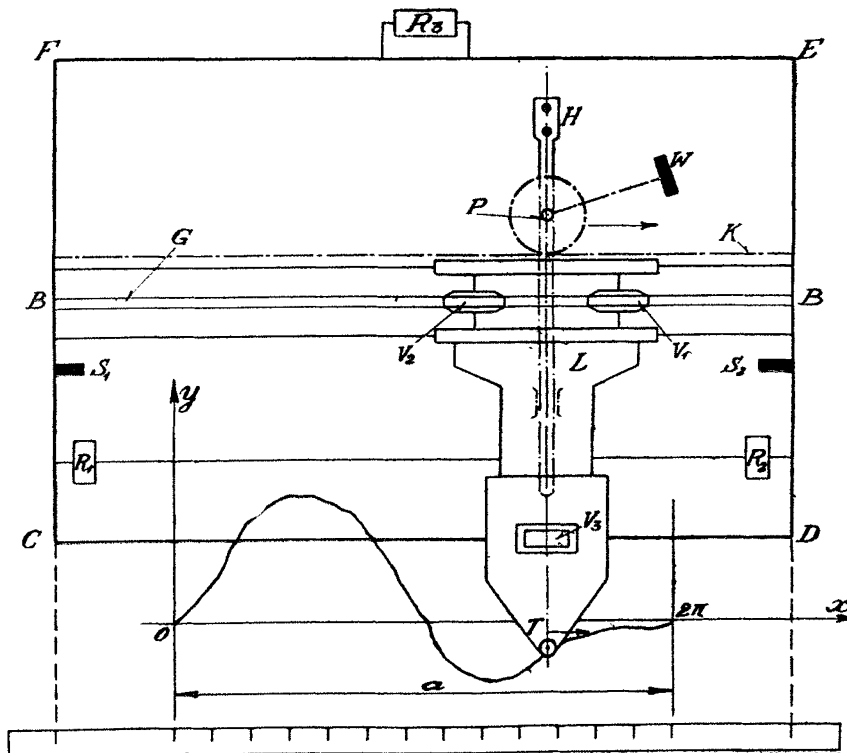


FIG. 3