

# ETUDE DE LA HOULE EN PROFONDEUR FINIE

## NOTE SUR LA "REFLEXION TOTALE"

P.-L. CARLOTTI

Ingénieur Principal des Travaux Publics des Colonies

### INTRODUCTION

L'analogie existant entre le mode de propagation de la houle et celui de la lumière est bien connue.

Cette analogie est utilisée, en première approximation, pour étudier l'évolution de la forme de la projection horizontale d'une crête de houle, initialement rectiligne, lorsqu'elle se propage par des fonds de profondeur variable.

Partant de cette application, quelques personnes ont eu l'idée qu'il serait possible de réaliser, par un approfondissement brusque, le phénomène de la réflexion totale, qui est bien connu en optique.

Ces chercheurs fondaient de grands espoirs sur l'utilisation éventuelle de ce procédé, pour protéger un port ou une rade contre une houle incidente abordant le plan d'eau à protéger par une région dépourvue de digue, par la passe, par exemple, qui doit forcément être large pour faciliter l'accès des navires.

La présente étude a pour but de montrer que le phénomène attendu se produit bien, en ce sens que la houle de période  $T$  connue, ne franchit pas l'obstacle sous-marin, mais que la surface libre de l'eau, de l'autre côté de cette barrière fictive est cependant agitée de façon notable.

La perturbation qui envahit le plan d'eau que l'on espérait protéger complètement, est sensiblement celle que produirait un certain convoi de navires, régulièrement échelonnés, naviguant le long du seuil sous-marin qui provoque la réflexion totale.

### I. - DEFINITION DE LA REFLEXION TOTALE

Considérons deux plans d'eau comportant chacun un fond horizontal, l'un ayant une profondeur  $h$  faible, l'autre une profondeur  $H$  grande, la limite entre les deux plans d'eau étant constituée par une marche d'escalier  $ax'$  dont les arêtes sont rectilignes.

Considérons une houle cylindrique (c'est-à-dire une houle à crêtes rectilignes) de période fixe  $T$  se propageant dans le milieu de profondeur  $h$ , dont deux crêtes successives occupent à un instant  $t$  les positions des droites  $AA'$  et  $BB'$  de la fig. 1, et soit  $C'$  la célérité de cette houle dans le milieu de profondeur  $h$ .

La célérité relative  $C_1$  des points  $A$  et  $B$  sur la droite  $ax'$  est :

$$C_1 = \frac{C'}{\text{Sin. } \Theta'}$$

Lorsque la célérité  $C_1$  sera supérieure à la célérité  $C''$  correspondant à la période  $T$  dans le milieu de profondeur  $H$ , une houle cylindrique réfractée de période  $T$  passera dans ce milieu et ses crêtes  $AA''$  et  $BB''$  formeront avec la droite  $ax'$  un angle  $\Theta''$  tel que :

$$C_1 = \frac{C''}{\text{Sin. } \Theta''}$$

Mais lorsque  $C_1$  est inférieur à la célérité  $C''$ , il n'y a plus de houle cylindrique de période  $T$  réfractée, car l'angle  $\Theta''$  aurait un sinus supérieur à l'unité.

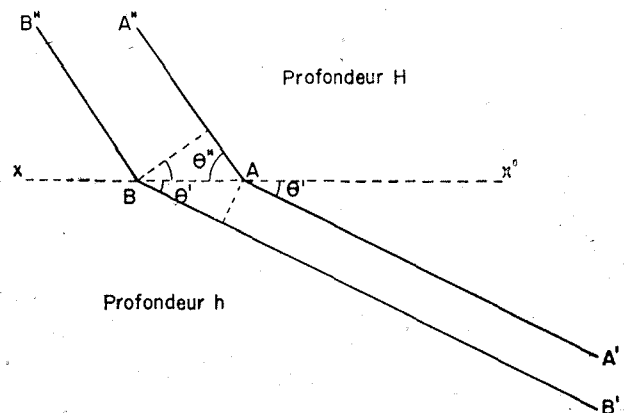


Fig. 1

Mais le fait qu'il ne puisse plus y avoir de houle cylindrique de période  $T$  réfractée, ne veut pas dire du tout qu'il n'y aura aucune espèce de houle dans le milieu de profondeur  $H$  comme le sous-entendent les personnes qui donnent à tort à ce phénomène le nom de *Réflexion totale*.

II. — ETUDE DE LA « REFLEXION TOTALE »  
DE LA HOULE

Dans tous les cas où  $C_1 < C'$ , les crêtes  $AA'$  et  $BB'$  se réfléchissent sur le miroir plan  $xx'$  avec un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Les crêtes réfléchies  $AA'_1$  et  $BB'_1$  donnent, par addition de leurs dénivellations avec celles des crêtes incidentes,  $AA'$  et  $BB'$ , une houle gaufrée rectangulaire, ainsi appelée parce que, quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence  $\Theta$  qui provoque la réflexion, les lignes nodales de cette houle, gaufrée forment un quadrillage rectangulaire, les côtés de ces rectangles étant parallèles et perpendiculaires à la droite  $xx'$ .

A l'instant  $t$ , cette houle gaufrée admettra des lignes de niveau représentées par les pointillés de la fig. 2, correspondant à l'équation :

$$\eta = \eta_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - C_1 t) \cos \frac{2\pi}{\lambda'} y$$

Le gaufrage ainsi obtenu aura la célérité  $C_1$  parallèle à  $xx'$ . On voit que ce gaufrage présentera une suite de maxima (donc de bosses) comme  $A$  et  $B$  sur la droite  $xx'$ , entre lesquels se trouveront placés (à mi-distance entre deux maxima successifs) des minima ou creux.

Tous ces creux et ces bosses suivent la droite  $xx'$  avec la célérité  $C_1$ .

Cette houle gaufrée admet un « potentiel des vitesses » :

$$\varphi(x, y, z, t) = 0$$

dont l'expression est facile à obtenir à partir de la surface libre, puisqu'on considère une solution approximative de POISSON.

Comme à l'instant  $t$  (quelconque) les composantes  $u, v, w$  de la vitesse locale en un point du fluide caractérisé par ses coordonnées  $x, y, z$  sont données par :

$$u = \frac{\delta \varphi}{\delta x} \quad v = \frac{\delta \varphi}{\delta y} \quad w = \frac{\delta \varphi}{\delta z}$$

il est aisé de tracer les enveloppes des vecteurs  $u, v$ , correspondant à tous les points d'un plan  $z = C_1 t$ , c'est-à-dire les projections sur ce plan horizontal des lignes de courant existant dans la houle à ce niveau  $z = C_1 t$ , depuis le fond  $z = 0$ , jusqu'à la surface  $z = h$ .

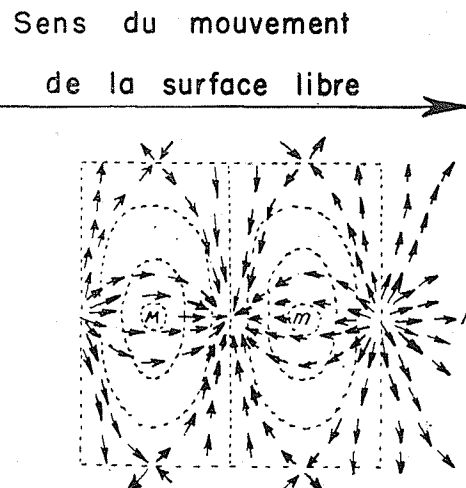


Fig. 2

Le tracé de ces lignes de courant dans l'un de ces plans horizontaux (le plan moyen de la surface libre  $z = h$  par exemple) est représenté sur la figure 2 bis ci-dessous :

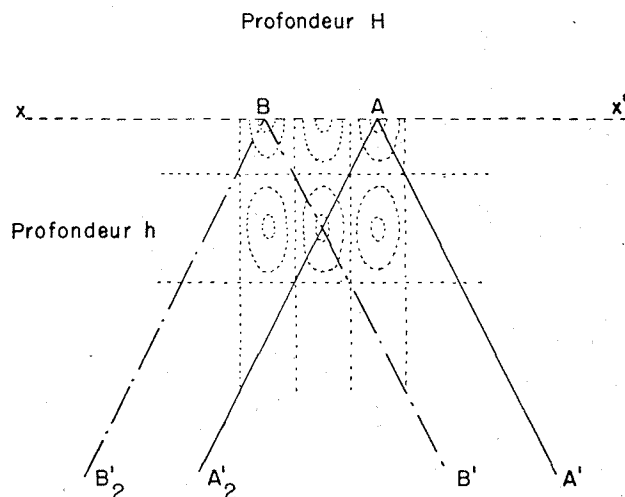


Fig. 2 bis

Sur cette figure on n'a représenté que deux rectangles consécutifs tracés par des lignes nodales sur la surface libre.

Comme sur la fig. 2, les projections sur le plan  $z = C_1 t$  des lignes de niveau de la surface libre sont représentées par des droites ou des courbes en pointillé.

$M$  désigne un maximum ou bosse  
 $m$  désigne un minimum ou creux  
de la surface libre.

Les flèches représentent les projections de quelques vecteurs vitesse à l'instant  $t$ .

On voit qu'à mi-chemin entre un maximum  $M$  et le minimum  $m$  qui le suit, se trouve une

source  $s$ , c'est-à-dire un point générateur de liquide, ou plutôt un point générateur positif.

A mi-chemin entre un minimum  $m$  et le maximum  $M$  qui le suit, se trouve un puits  $p$  ou point générateur négatif. Ces points générateurs ont une position fixe par rapport aux bosses et aux creux qu'ils encadrent et se déplacent à la même célérité  $C_1$  que la surface libre.

Les lignes de courant partant toutes des sources  $s$  pour aboutir aux puits  $p$ , on vérifie tout de suite que cette disposition des puits et des sources est conforme au bon sens car elle provoque un afflux de liquide aux puits, où le niveau monte pour former la crête qui suit ce puits, pendant qu'il y a une baisse de niveau à la source qui se vide pour former le creux qui la suit ; comme les lignes de courant (enveloppes des vecteurs vitesse) ont le même tracé dans tous les plans horizontaux,  $z = Cte$ , les surfaces réglées à génératrices verticales s'appuyant sur les lignes de courant de la figure 2 bis seront des « surfaces de courant ».

Comme les surfaces de courant peuvent être remplacées par des surfaces solides, on voit qu'on pourrait remplacer le volume d'eau compris à l'intérieur des surfaces de courant  $s e p$  et  $s f p$  par la carène à murailles verticales d'un navire admettant  $s e p$  et  $s f p$  comme bords, ayant son avant en  $p$  et son arrière en  $s$  et avançant avec la vitesse  $C$  (1).

Il résulte de cela :

1°) On aura sur la droite  $xx'$  de la figure 2 une succession de points générateurs (positifs  $s$  et négatifs  $p$ ) qui débiteront (ou aspireront) du liquide dans le plan d'eau de profondeur  $H$ .

2°) Ces points générateurs engendreront sur le plan d'eau de profondeur  $H$ , les perturbations qu'y produirait un convoi de navires régulièrement échelonnés suivant  $xx'$  ayant chacun la longueur indiquée ci-dessus et espacés entre eux d'une distance égale à leur longueur, naviguant tous à la vitesse  $C_1$ .

Pendant un intervalle de temps  $t$  la propagation des points générateurs dissipera dans

(1) Le lecteur peut paraître surpris a priori que les flèches représentant les vecteurs « vitesse instantanée » du fluide le long de la carène  $sep$  et  $sfp$  soient orientées de l'arrière  $s$  vers l'avant  $p$  de cette carène qui se déplace vers la droite de la figure 2 bis avec la vitesse  $C$ .

Il ne faut pas perdre de vue que ces flèches représentent la vitesse locale  $(u, v)$  du fluide en chacun des points considérés, vitesse qui est toute petite par rapport à la célérité  $C_1$ .

En définitive, la vitesse relative du fluide par rapport à la carène  $(s e p, s f p)$  est orientée de l'avant vers l'arrière de cette carène, mais cette vitesse relative, qui est à peu de choses près, égale à  $(C_1 - u)$  est plus faible que la vitesse de route  $C_1$  du navire. Ce phénomène bien connu des architectes navals a reçu le nom de « sillage ».

le milieu de profondeur  $H$  une énergie non négligeable, du même ordre de grandeur que la moitié de l'énergie amenée pendant le même intervalle de temps  $t$  par la houle incidente.

Les théories des houles d'accompagnement provoquées par la propagation d'un point générateur se déplaçant à une vitesse  $C_1$  suivant une ligne droite, et des interactions pouvant se produire entre les vagues d'accompagnement de plusieurs points générateurs positifs et négatifs ayant été, non seulement ébauchées, mais encore assez approfondies par différents chercheurs éminents comme : MM. BARILLON, LORD KELVIN, MICHEL et HAVELOCK, qui ont été orientés vers ce genre de recherches par l'étude des systèmes de vagues d'accompagnement des navires, on voit que nous serons suffisamment documentés sur ce qui va se passer dans le milieu de profondeur  $H$ , non seulement pour se rendre compte quantitativement des phénomènes qui vont s'y produire, mais encore pour pouvoir tracer de façon assez précise le programme des études expérimentales qu'il conviendrait d'entreprendre si on estimait un jour que ce phénomène mériterait une étude approfondie.

### III. — RAPPEL SUCCINCT DES RESULTATS CONNUS DANS L'ETUDE DES HOULES D'ACCOMPAGNEMENT D'UN POINT GENERATEUR SE PROPAGEANT SUR UN PLAN D'EAU DE PROFONDEUR CONSTANTE

L'étude générale n'a été entreprise que dans le cas simple où la profondeur est infinie. Dans ce cas, M. BARILLON a montré que les crêtes des différentes houles élémentaires constituant les houles d'accompagnement enveloppent des courbes qui sont des portions de développantes d'hypocycloïdes à quatre points de rebroussement.

La figure 3 représente les trois premières développantes formant les houles d'accompagnement du point  $P$  se déplaçant de gauche à droite.

On remarque :

1°) Que chacune de ces développantes comprend en outre théoriquement, un autre triangle curviligne qui doit être symétrique du premier, par rapport au point  $P$  ; ces houles qui se trouveraient en avant du point  $P$  n'ont jamais été observées.

2°) Que toutes les développantes obtenues sont homothétiques l'une de l'autre, le point  $P$  étant le centre d'homothétie.

3°) Les crêtes n'ont pas partout la même amplitude, seuls les arcs de développantes mar-

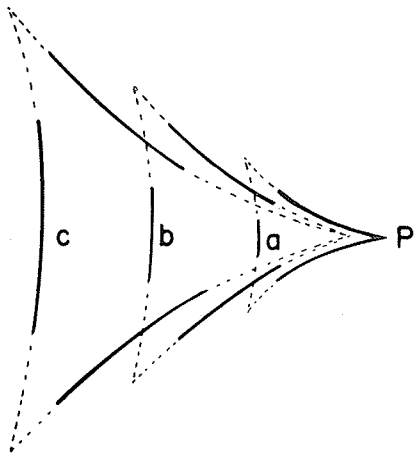


Fig. 3

qués en trait plein sur la figure 3 correspondent à des crêtes réelles.

4°) Que les distances  $ab$ ,  $bc$ , etc... existant entre des crêtes successives de la houle transversale, sont précisément égales à la longueur d'onde de la houle cylindrique dont la célérité est égale à la vitesse  $V$  du point  $P$ . Cette considération reste sûrement vraie quelle que soit la profondeur  $H$  finie lorsque

$$V \leq \sqrt{gH}.$$

Il résulte de cela que la section de la surface libre par le plan  $Pabc$  a la forme de la courbe représentée sur la figure 4 (dont les ordonnées sont considérablement amplifiées par rapport aux abscisses). (Les formes de ces courbes ont été notamment calculées par M. GUILLOTON). Les arcs de crêtes passant par  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , etc... forment ce que l'on appelle la « houle transversale d'accompagnement ».

Les arcs de crêtes issus du point  $P$  sont appelés les « houles divergentes ».

#### IV. — RAPPEL SUCCINCT DES RESULTATS CONNUS DANS L'ETUDE DES INTERFERENCES ENTRE LES HOULES D'ACCOMPAGNEMENT PRODUITES PAR DEUX POINTS GENERATEURS

Considérons deux points générateurs  $A$  et  $B$ , la distance  $\overline{AB}$  étant  $D$ , la vitesse commune étant  $\overline{V}$  parallèle à  $AB$ .

La longueur  $D$  étant distincte de la longueur d'onde  $l$  de la houle transversale d'accompagnement, on peut soit faire varier  $l$ , c'est-à-dire la vitesse  $V$ , en gardant  $D$  constant, soit faire varier  $D$  en gardant  $l$  (donc  $V$ ) constant.

On peut *grosso modo* assimiler un navire à deux points générateurs ; l'un est sensiblement à l'avant, l'autre à l'arrière.

Dans le cas où la longueur  $D$  (qui n'est pas forcément la longueur  $L$  du navire) est telle que les bosses de la houle  $l$  de l'avant coïncident avec les bosses de la houle  $l$  de l'arrière, on a une interférence défavorable avec des transversales très creuses.

Dans le cas où la longueur  $D$  est telle que les bosses de la houle  $l$  de l'avant coïncident avec les creux de la houle  $l$  de l'arrière, on a une interférence favorable avec des transversales à peine marquées.

Ces interférences favorables correspondent à des minima de la résistance à l'avancement due aux vagues, les interférences défavorables correspondent à des maxima de la résistance à l'avancement due aux vagues.

Les expériences faites en faisant varier soit  $l$  en gardant  $D$  constant, (navires à différentes allures) soit en faisant varier  $D$  en gardant  $l$  constant (essais de différents navires ayant des extrémités identiques, mais des parties cylindriques de longueurs différentes, naviguant tous à la même vitesse  $v$ ) confirment ces résultats.

#### V. — CONCLUSION

Dans le cas de « réflexion totale » d'une houle de période  $T$  sur un fossé :

1°) On aura sur la droite  $xx'$  de la figure 2 une succession de points générateurs (positifs  $s$  et négatifs  $p$ ) qui débiteront (ou aspireront) du liquide dans le plan d'eau de profondeur  $H$ .

2°) Ces points générateurs engendreront sur le plan d'eau de profondeur  $H$  les perturbations qu'y produirait un convoi de navires régulièrement échelonnés suivant  $xx'$  ayant chacun la longueur indiquée ci-dessus et espacés entre eux d'une distance égale à leur longueur, naviguant tous à la vitesse  $C_1$ .

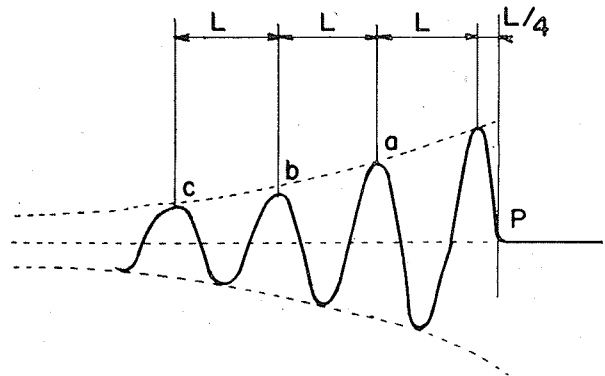


Fig. 4

3°) Les creux des houles franchissant le fossé seront très prononcés dans le cas où il y aura interférence défavorable entre la distance  $D$  séparant entre eux les bosses et les creux qui suivent le seuil  $x'x$  et la longueur d'onde  $l$  correspondant à la célérité  $C_1$  par profondeur  $H$ .

4°) Les creux des houles franchissant le fossé seront faibles dans le cas où il y aura interférence favorable entre  $l$  et  $D$ .

Lorsque  $l$  et  $D$  seront très voisins, on pourra avoir des « battements » dans l'amplitude.

5°) Les houles se produisant dans la région de profondeur  $H$  n'auront pas toutes la même direction de crêtes, ni la même période puisque

l'on a vu que chaque point générateur engendre des « divergentes » et des « transversales ».

6°) La « réflexion totale » se produisant lorsqu'on a  $C_1 < |C''$  peut être provoquée par un seuil approprié sur une onde solitaire (dont la

célérité est  $C = \sqrt{gh}$ ).

Le phénomène se produisant dans la région de profondeur  $H$  étant alors simplifié, puisqu'on n'aura qu'un seul point générateur, il y aurait intérêt, si on veut vraiment faire ces expériences, à les commencer par des photos de la surface libre, dans ce cas particulier, pour voir si on observe bien les divergentes et les transversales données par l'exposé succinct précédent.