A PROPOS DE L'UNICITÉ DE SOLUTION DANS LES PROBLÈMES DE RÉSEAUX MAILLÉS

ANGLÈS D'AURIAC

Ancien élève de l'École Polytechnique

Un problème de réseaux maillés se laisse en général schématiser de la façon suivante :

On a un ensemble de points appelés nœuds ou sommets et un ensemble de lignes appelées côtés dont chacun réunit un nœud à un nœud.

Chaque côté, qui représente une conduite, est caractérisé par une certaine loi de perte de charge en fonction du débit $\Delta H = f(Q)$.

Un certain nombre de sommets possèdent une communication avec l'extérieur ; c'est-à-dire que, par eux, du débit peut entrer dans le réseau, ou en sortir. Ces sommets sont appelés issues.

FIGURE 1

On se donne aux issues un certain nombre de conditions soit de pression, soit de débit et l'on cherche s'il existe un écoulement et un seul compatible avec ces conditions.

Nous allons démontrer que, quand il y a une solution, elle est toujours unique à la seule condition que toutes les caractéristiques des conduites soient croissantes de $-\infty$ à $+\infty$.

CONDITIONS DE DÉBIT

Supposons que tous les débits aux issues soient donnés (il faut évidemment que leur somme fasse zéro) et supposons qu'il existe un certain écoulement E_1 compatible avec ces données. Nous aurons en chaque nœud $\sum Q = 0$ en affectant par exemple du signe $+$ les débits allant vers le nœud et du signe $-$ les débits

venant du nœud. Nous aurons également pour tout contour fermé tracé dans le réseau $\sum \Delta H = 0$.

Nous voulons démontrer qu'il ne peut exister un autre écoulement E_2 satisfaisant à ces conditions et compatible avec les débits donnés aux issues.

Supposons en effet que E_2 existe. Considérons l'écoulement fictif $E' = E_1 - E_2$, c'est-à-dire tel que dans chaque conduite le débit soit la différence entre le débit dans l'écoulement E_1 et le débit dans l'écoulement E_2 . Les écoulements E_1 et E_2 sont par hypothèse des écoulements réels satisfaisant à toutes les conditions de débit et de pression tandis que l'écoulement E' ne satisfait, par sa définition même, qu'aux conditions de débit, c'est pourquoi nous l'appelons écoulement fictif. Pour le réaliser, il faudrait introduire dans le réseau tout un système de pompes et de résistances.

L'écoulement E' est un écoulement fermé c'est-à-dire que le débit aux issues est nul. Or tout écoulement fermé jouit de la propriété suivante : on peut toujours trouver un certain circuit fermé parcouru dans le même sens.

FIGURE 2

Partons en effet d'un côté AB pris au hasard parcouru de A en B . Du nœud B partira au moins une conduite telle que BC parcouru de B en C . Nous pouvons donc former une ligne de plus en plus longue et parcourue dans le

même sens. Il faut bien que cette ligne se recoupe à un moment donné, ce qui démontre l'existence d'un circuit fermé parcouru dans le même sens (nous ne disons pas bien entendu avec le même débit).

Soit γ un tel circuit fermé. Prenons comme sens positif des débits dans γ , le sens de parcours dans l'écoulement E' .

Le long du contour γ nous avons, dans l'écoulement E_1 :

$$\sum \Delta H = 0$$

En passant de E_1 à E_2 , tous les Q sont augmentés, donc tous les ΔH le seront aussi puisque toutes les caractéristiques sont croissantes. Il est donc impossible d'avoir $\sum \Delta H = 0$, le long de γ dans l'écoulement E_2 . L'écoulement E_2 ne peut donc pas exister.

CONDITIONS DE PRESSION

Supposons maintenant qu'au lieu de connaître les débits aux issues, nous connaissions les pressions. Supposons qu'il existe un écoulement réel E_1 compatible avec ces pressions aux issues et avec les caractéristiques des conduites. Nous disons qu'il ne peut exister un autre écoulement réel E_2 .

Formons en effet l'écoulement E' défini de la façon suivante : la pression en chaque nœud est la différence des pressions dans l'écoulement E_1 et l'écoulement E_2 . L'écoulement E' est un écoulement virtuel qui satisfait évidemment aux conditions de pression mais non de débit.

Dans l'écoulement E' , les pressions sont nulles aux issues. Mais elles ne peuvent pas être nulles en tous les nœuds sinon E_1 et E_2 seraient identiques. Il y a donc au moins un nœud qui dans E' a une pression positive ou négative.

Supposons-la par exemple positive, et cherchons le ou les nœuds ayant la pression maximum. Il en existe au moins un. Soit A un tel

FIGURE 3

nœud et soit H_m la pression y régnant (dans l'écoulement E').

Traçons l'étoile des conduites autour de A , les pressions en B_1, B_2, B_n sont inférieures ou au maximum égales à la pression H_m . Si elles sont toutes égales à H_m , recommençons à tracer l'étoile autour de B_1 par exemple. Ce faisant, nous élargissons de plus en plus la zone où règne la pression maximum. Mais cette zone ne peut s'étendre à tout le réseau car les pressions sont nulles aux issues.

Il y a donc forcément un certain nœud C où règne la pression H_m et duquel partent un certain nombre de conduites à pression constante H_m et d'autres conduites à pression décroissante de H_m à h_n . Plaçons-nous en un tel nœud.

FIGURE 4

Dans l'écoulement E_1 , nous avons en ce nœud $\sum Q = 0$. En passant de E_1 à E_2 certains ΔH sont inchangés, les autres varient tous dans le même sens. Les Q correspondants varieront eux aussi dans le même sens. On ne peut donc pas avoir $\sum Q = 0$ dans l'écoulement E_2 au nœud C . L'écoulement E_2 ne peut donc exister.

FIGURE 5

CAS GENERAL

Considérons un réseau maillé pour lequel certaines issues $A_1, A_2, \dots$ aient un débit connu, et d'autres issues $B_1, B_2, \dots$ une pression connue. Nous voulons démontrer que si une solution existe, elle est unique.

Réunissons par des conduites fictives, les points $B_1, B_2, \dots$, etc., à un point B où règne une pression donnée H . Les conduites fictives $B_1 B$, $B_2 B$, etc. ont des caractéristiques horizontales $\Delta H = \text{Cte}$. Le point B est une issue dont on connaît le débit. Nous retombons donc sur le cas I.

Le raisonnement que nous avons fait dans le cas 1 ne serait plus valable si toutes les conduites du contour γ avaient les caractéristiques horizontales $\Delta H = \text{Cte}$. Or, le réseau des conduites fictives $B_1 B, B_2 B$, etc. a la forme d'une étoile. C'est un réseau ramifié et

non maillé. Il est impossible d'y tracer un contour fermé γ . Le contour γ possède donc au moins une conduite qui ne fait pas partie des conduites fictives et le raisonnement que nous avons fait dans le cas 1 reste valable.

CONCLUSION

L'unicité de la solution dépend uniquement du fait que les caractéristiques des conduites sont des fonctions croissantes. Il est inutile que les courbes passent par l'origine. Nous pouvons donc intercaler dans le réseau ou aux issues un nombre quelconque de pompes, de turbines, ou de résistances même dissymétriques. Nous sommes assurés de l'unicité de la solution pourvu que les organes puissent être représentés par des conduites fictives à caractéristique croissante.

SOUDURE EN CONDUITE

(Cliché S.D.E.M.)

INSTALLATION DES CONDUITES FORCÉES DU BARRAGE DE L'AIGLE (Cliché Escher Wyss)
MONTAGE DE DEUX DES CONDUITES DE 4 M. 70 DE DIAMÈTRE - POSE DE L'ARMATURE EXTÉRIEURE.

SIPHON DU CANAL DE ROHÈRE (PYRÉNÉES-ORIENTALES) - DIAMÈTRE 0,800 - PRESSION 55 M. (Cliché Benno)