LE CALCUL DES RÉSEAUX MAILLÉS

Contribution à l'application pratique de la Méthode "HARDY-CROSS"

par Ch. DUBIN

Ingénieur des Arts et Manufactures

Le calcul des réseaux maillés est long et fastidieux dès que ceux-ci atteignent un certain degré de complexité.

La méthode « HARDY-CROSS » permet d'abrégier, considérablement, les calculs car elle donne un système convergent d'approximations successives conduisant à l'état d'équilibre du réseau.

Elle est basée sur l'application des lois de KIRCHOFF à un réseau maillé.

1°) En tout nœud, la somme des débits entrants et sortants est nulle.

2°) Le long d'un parcours fermé quelconque, la somme algébrique des pertes de charge est nulle.

Un réseau dans lequel la première condition est réalisée est dit « à débit équilibré ».

La méthode « HARDY-CROSS » dite « d'égalisation des charges » consiste à prendre successivement chaque maille de ce réseau et à réaliser la deuxième condition, en ajoutant dans un sens convenable un même débit tout au long de cette maille (ce qui ne modifie pas l'équilibre des débits).

La nouvelle répartition des débits ainsi obtenue est également équilibrée et, si la deuxième condition d'équilibrage des charges n'est pas absolument réalisée, les erreurs sont moins importantes que dans la première répartition. Il suffira donc, à partir de cette nouvelle répartition, de recommencer la série des calculs pour obtenir une nouvelle et meilleure approximation.

Le calcul de la quantité dQ à ajouter tout au long d'une maille pour réaliser la deuxième condition est le suivant :

On adopte sur la périphérie de la maille un

sens de parcours et on note comme positives les pertes de charge créées par des courants circulant dans le sens choisi et comme négatives les pertes de charge créées par des courants circulant en sens inverse.

On calcule, dans chaque branche, la perte de charge créée par le débit fixé à priori ainsi que la dérivée de cette perte de charge par rapport au débit.

Si, par exemple, on admet que la perte de charge dans une conduite de résistance R parcourue par un débit Q est égale à $R Q^2$, on calculera donc pour chaque branche, les quantités :

$$R Q^2 \text{ et } 2 R Q$$

Ceci posé, si on ajoute, algébriquement, les diverses quantités $R Q^2$ et, arithmétiquement, les quantités $2 R Q$, considérées comme positives, on aura la relation (1) :

$$\sum R Q^2 + dQ \sum 2 R Q = 0$$

Telle est, dans ses grandes lignes, la méthode « HARDY-CROSS » pour le calcul des réseaux maillés.

Nous avons été conduits à appliquer cette méthode pour des réseaux complexes comportant jusqu'à soixante branches différentes réunissant une trentaine de nœuds. De plus, l'étude de ces réseaux nous amène à rechercher leur équilibre dans différentes hypothèses d'alimentation et de débits en route.

(1) Relation qui n'est pas rigoureusement exacte mais se rapproche d'autant plus de la vérité que dQ devient de plus en plus petit. Le terme correctif qui permettrait d'avoir une relation exacte serait : $+ dQ^2 \sum R$ mais son introduction exigerait la résolution d'une équation du second degré.

Cette application pratique de la méthode « HARDY-CROSS » nous a conduits à certaines réflexions que nous exposons ci-après.

I. — RAPIDITE DES CALCULS

Les approximations successives entraînent des calculs nombreux.

Il s'agit, pour chaque branche considérée, de calculer les quantités $R Q^2$ et $2 R Q$.

Ces calculs s'effectuent normalement à la règle, avec les inconvénients suivants :

a) Nécessité de consulter un tableau des résistances des différentes branches du réseau pour donner à la règle la position convenable.

b) Détermination successive des quantités $R Q^2$ et $2 R Q$; la règle ne donnant que les chiffres caractéristiques de ces deux quantités, nécessite un effort intellectuel supplémentaire pour la détermination de leur ordre de grandeur.

La répétition de ces opérations entraîne, à la longue :

- 1 - des erreurs de calcul possibles,
- 2 - une migraine probable de l'opérateur.

De plus, si au lieu de nous baser, pour la perte de charge, sur une formule en $R Q^2$, nous prenons une formule en $R Q^x$ (Williams Hazen $x = 1,85$; Flamant $x = 1,75$), nous pouvons affirmer que la possibilité du 2° devient une certitude, même si l'on dispose d'une règle permettant le calcul des puissances fractionnaires, car les règles existant dans le commerce ne permettent le calcul de Q^x que pour $Q > 1$; si $Q < 1$ le calcul nécessite un double passage par les inverses.

En vue de parer à ces divers inconvénients, nous avons construit un calculateur basé sur les principes suivants :

1°) Les conduites du réseau ayant été classées une fois pour toutes par ordre de résistances ascendantes (ou descendantes) reçoivent un numéro d'ordre qui est reporté d'un côté sur le réseau, d'un autre côté sur le calculateur en face du repère correspondant à la résistance. De la sorte, on n'aura plus, par la suite, à chercher sur un tableau la résistance de la conduite, mais simplement à amener un des éléments mobiles du calculateur en face du repère correspondant à la conduite considérée.

2°) Le calculateur comporte des échelles d'une longueur suffisante pour que les quantités lues Q , $2 R Q$, $R Q^2$ soient lues avec leur ordre de grandeur exact.

3°) La construction du calculateur est telle

que les quantités $2 R Q$ et $R Q^2$ sont déterminées en une seule opération.

Pratiquement, ce calculateur n'est autre chose qu'un grand abaque à alignement de la fonction $y = R Q^2$ (fig. 1).

FIGURE 1

Considérons trois droites parallèles et équidistantes.

$$\begin{aligned} \text{Si nous portons } O_1 H_1 &= -\log R \\ O_2 H_2 &= \log Q \end{aligned}$$

nous voyons que :

$$O_3 H_3 = \log R Q^2$$

D'autre part, si nous abaissons la perpendiculaire $H_3 K$, nous avons :

$$K H_2 = O_3 H_3 - O_2 H_2 = \log R Q$$

mais :

$$K H_2 = K H_3 \operatorname{tg} \alpha$$

donc :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\log R Q}{K H_3}$$

Donc, si nous mesurons avec un rapporteur convenablement gradué l'angle α , nous déterminons la quantité $2 R Q$ dérivée de $R Q^2$.

On verrait, sans peine, qu'un calculateur peut être construit pour toute autre formule $R Q^x$ où x est différent de 2, la seule différence est que les échelles ne sont plus équidistantes, mais

$$\text{dans le rapport } \frac{O_1 O_3}{O_1 O_2} = x$$

Le premier appareil que nous avons constitué sur ce principe était ainsi construit :

L'équidistance des échelles était 0 m. 50 environ.

L'échelle des pertes de charge allait de 2 cm.

à 20 m. (longueur totale 1 m. 50 pour une unité d'échelle logarithmique de 50 cm.).

L'échelle des débits allait de 2 lit./sec à 2 m³/sec.

Sur la règle des résistances, une pointe était plantée sur chaque repère et servait de pivot à un fil élastique.

Il suffisait donc d'amener ce fil élastique à passer par la graduation correspondant au débit pour lire sur l'échelle des pertes de charge la valeur de la quantité $R Q^2$.

Les trois règles des résistances, des débits et des pertes de charge étant en relief, un rapporteur mobile pouvait coulisser sous les fils et permettre la lecture directe de $2 R Q$.

Chaque canalisation avait donc son fil d'alignement qui, après avoir matérialisé un alignement donné, restait fixé à proximité de cet alignement, le fil se terminant par un anneau susceptible d'être accroché momentanément à un clou planté à la base de l'appareil (fig. 2).

Nous pensions ainsi faciliter le calcul des approximations successives puisque chaque fil se serait trouvé ainsi à proximité de l'alignement à réaliser.

En réalité, comme on pourra s'en convaincre par l'examen de la figure 2, le gain appréciable était négatif, car la planche était recouverte d'un tel enchevêtrement de fils qu'il devenait difficile de s'y reconnaître.

Après quelques modifications de détails, nous avons très notablement changé la construction de l'appareil et avons abouti à l'appareil (fig. 3 et 4) qui nous donne entière satisfaction, tant au point de vue de la rapidité que de la lisibilité.

Son idée directrice est la suivante :

Si dans l'abaque à alignement qui a servi de base à l'appareil précédent, nous matérialisons les perpendiculaires $H_1 K$ et $H_1 K'$ (fig. 1), autrement dit si sur une échelle unique

$O_2 K' H_2 K$

nous faisons déplacer deux perpendiculaires de longueur constante $H_1 K$ et $H_1 K'$ et si nous

FIGURE 2

FIGURE 3

tendons un fil $H_1 H_3$, nous avons sur l'échelle unique : en K' le repère résistance, en H_2 le débit et en K la perte de charge.

De plus, le rapporteur des dérivées est rendu solidaire de la perpendiculaire $K H_3$.

L'avantage de ce dispositif est :

1°) de ramener les deux graduations débits - pertes de charge à une seule.

2°) de rassembler les lectures à une même hauteur (il n'y a que 33 cm. d'écart entre la graduation du rapporteur et la graduation commune débits - pertes de charge contre 1 m. entre les graduations extrêmes de l'appareil précédent).

D'autre part, pour des raisons pratiques, nous avons abandonné le fil élastique ; celui-ci sous l'effet de nombreuses extensions, se détendait à la longue et devait être remplacé assez souvent. Nous l'avons remplacé par un fil en nylon qu'un

enrouleur à ressort maintient constamment tendu.

Dans la figure 4, on reconnaît la réalisation de l'appareil dont le principe a été décrit ci-dessus.

Pour la commodité des lectures, l'échelle des résistances a été séparée de l'échelle débits-pertes de charge. De plus, l'échelle des résistances est portée par une règle amovible afin de permettre l'étude de réseaux différents, chaque réseau ayant sa propre règle.

L'équerre $A B H_1$ matérialise la perpendiculaire $H_1 K'$ du schéma théorique.

Le fil passe sur un enrouleur à ressort solidaire du bâti de l'équerre, puis par un œillette matérialisant le point H_1 . La base $A B$ de l'équerre porte en K' un repère qu'on amène en face du repère correspondant à la conduite étudiée.

FIGURE 4

L'équerre C D E F H₃ matérialise la perpendiculaire H₃ K. De plus, sur sa branche EF, elle porte une graduation déterminant la dérivée. Sur sa base CD un repère porté par un transparent permet de matérialiser le point K indiquant la perte de charge.

Entre la base C D et l'échelle des débits, se trouve une échelle des diamètres permettant la mise en place sans calcul des différents repères de résistance à partir des données : diamètre, longueur et rugosité de la conduite. Une fois l'échelle des résistances établie pour le réseau étudié, cette échelle des diamètres n'a plus d'utilité.

Outre le calcul courant des pertes de charge dans une canalisation donnée, l'appareil décrit

permet de résoudre simplement les problèmes de conduites uniques équivalant à des systèmes de conduites parallèles ou en série.

Tel est l'appareil qui nous a permis une application facile de la méthode « HARDY-CROSS ». Nous l'avons expérimenté dans l'étude du réseau principal de la banlieue Est de Paris, réseau dont nous donnons le plan (fig. 5) et le schéma théorique (fig. 6).

Un tel réseau comporte 20 mailles et 51 branches. Nous ne pensons pas qu'une autre méthode que la méthode « HARDY-CROSS » puisse permettre d'en calculer l'équilibre. Le calcul à la règle serait toutefois infiniment plus long et laborieux que le calcul à l'aide de notre appareil.

Le seul reproche que l'on puisse faire à cet appareil est son encombrement évidemment beaucoup plus important que celui d'une règle. Mais comme son emploi ne s'impose que pour l'étude des réseaux d'une certaine envergure, on peut supposer que les bureaux d'études intéressés sont assez importants pour avoir la place de loger un tel appareil.

Néanmoins, nous avons actuellement en cours de construction un appareil d'encombrement beaucoup moins important (fig. 6) et cependant d'une précision très supérieure. Ses dimensions seront de 0 m. 50 $\times$ 0 m. 30 $\times$ 0 m. 30 environ.

II. — COMMODITE DES CALCULS

L'appareil que nous venons de décrire permet donc de diminuer le temps nécessaire au calcul des quantités élémentaires $2 R Q$ et $R Q^2$. La méthode « HARDY-CROSS » comporte ensuite

pour chaque maille le calcul de $\Sigma R Q^2$ et $\Sigma 2 R Q$.

Si l'on veut ne pas se perdre dans un dédale inextricable de calculs, il importe de présenter ceux-ci méthodiquement.

Après plusieurs essais, nous avons été conduits à adopter un modèle de feuilles de calcul dont nous donnons une reproduction ci-jointe.

Ce tableau correspond à l'étude de trois mailles du réseau schématique (fig. 7).

Dans une première colonne, nous avons mis une lettre de référence de la maille étudiée.

Dans une seconde colonne, la référence de la maille où la canalisation étudiée a été précédemment rectifiée.

Puis les débits, les pertes de charge comptées positivement ou négativement et les dérivées.

Enfin, la correction déduite du calcul $\frac{\Sigma R Q^2}{\Sigma 2 R Q}$ et le débit corrigé.

BANLIEUE EST DE PARIS RESEAU DE PREMIERE ELEVATION

FIGURE 5

SCHEMA

RESEAU DE NEUILLY-sur-MARNE

FIGURE 6

RESEAU DE										FONCTIONNEMENT									
ESSAI N° 1										ESSAI N° 2									
Maille	Maille	Conduite	débit litres/s.	Perte de charge + -	Dérivée	correction	débit corrige	Maille	conduite	débit litres/s.	Perte de charge + -	Dérivée	correction	débit corrige					
E				380							380								
	C	20	266	360		2,7	+6	272	C	20	244	314		2,5-3	241				
		1 _B	200	9		0,1	+6	206	I	1B	185	7		0,1-3	182				
		4 _B	1300	1370		2,1	+6	1306	V	4B	1344	1465		2,2-3	1341				
		3	958		700	1,5	-6	952	X	3	973		723	1,5+3	976				
		21	154		145	1,9	-6	148	I	21	169		175	2,1	172				
	B	37	85		1300	31	-6	79	B	37	72		950	27,0	75				
	C	10	382		234	1,2	-6	376	C	10	355		196	1,1	358				
				2119	2379	40,5					2166	2044	36,5						
				260							122								
F																			
	E	20	272	377		2,8	-36	236	E	20	241	308		2,5+3	244				
	B	13	452	422		1,8	-36	416	B	13	431	378		1,8	434				
		23	400	1280		6,4	-36	364	W	23	351	990		5,8	354				
	E	4 _B	1306		1380	2,1	+36	1342	E	4B	1341		1470	2,2-3	1338				
		1 _A	1100		216	0,4	+36	1136	V	1A	1159		240	0,4	1156				
				2079	1596	13,5					1676	1710	12,7						
				483									34						
G				380							380								
	F	20	236	286		2,4	+9	245	F	20	244	316		2,6+3	247				
	D	16 _B	280		212	1,5	-9	271	D	16 _B	322		281	1,7-3	319				
		19	85		28	0,6	-9	76	N	19	126		61	1,0-3	123				
		30	10	19		0,4	+9	19	L	30	31	41		1,5+3	34				
		15	159		57	0,7	-9	150	M	15	64		9	0,3-3	61				
	C	14	330		236	1,4	-9	321	C	14	316		216	1,3-3	313				
	E	10	376		227	1,2	-9	367	E	10	358		200	1,1-3	355				
				685	760	8,2					737	767	9,5						
				75							30								

FIGURE 7

On constatera que notre méthode se sépare de la méthode originale HARDY-CROSS sur deux points :

1°) Après chaque rectification de maille, nous prenons pour la suite du calcul le débit corrigé et non le débit initial.

Exemple : la canalisation 20 est prise avec un débit de 266 litres dans la maille E puis avec 272 litres dans la maille F.

HARDY-CROSS lui, conserve le même débit dans toutes les mailles et applique en fin de calcul à chaque branche la somme des corrections algébriques qui la concerne.

L'expérience acquise sur des réseaux importants nous a montré que notre méthode est plus rapide, car si elle entraîne quelques calculs élémentaires supplémentaires (ce qui avec notre appareil n'est pas une grosse difficulté) elle peut supprimer finalement un ou deux trains complets de calculs d'approximation.

2°) Nous ne prenons pas automatiquement comme mailles la limite des régions élémentaires que crée le tracé des canalisations, ainsi que le fait HARDY-CROSS dans les exemples qu'il donne dans son mémoire original. Les exemples qu'il propose ne conduisent pas à des calculs trop longs, car il suppose que les résistances de toutes les branches sont égales.

FIGURE 8

Malheureusement, dans la pratique, il y a des variations considérables entre les résistances des différentes branches (même si on limite le réseau à des canalisations dont le diamètre soit du même ordre de grandeur : de 500 à 800 par exemple).

De ce fait, une région élémentaire peut avoir à sa périphérie une canalisation dont la résis-

tance est beaucoup plus élevée que la résistance du reste de la périphérie.

L'expérience nous a montré que dans un tel cas, la convergence des calculs est extrêmement lente, mais qu'un choix plus judicieux de mailles (en groupant par exemple plusieurs régions) conduisait alors à des calculs plus rapides.

Malheureusement, ce choix est assez délicat, car, s'il n'est pas fait avec soin et suivant certaines règles que nous allons exposer, il peut conduire à des réseaux qui ne sont qu'en équilibre apparent. La question vaut donc qu'on s'y arrête.

III. — CHOIX DES MAILLES DANS LA METHODE HARDY-CROSS

Indiquons, tout d'abord, un côté paradoxal du problème.

Considérons (fig. 9) un réseau maillé A, B, C, D, E, F, G, H.

FIGURE 9

La méthode HARDY-CROSS consistera à le diviser en cinq mailles élémentaires AEF, BEH, CFG, GHD, EFGH.

Or, si nous le divisons en deux mailles AEHDGF et CFEBHG, on peut être tenté de dire qu'un tel choix de mailles suffira à résoudre le problème puisque toutes les canalisations du réseau ont été ainsi équilibrées.

En réalité, il n'en est rien et nous le démontrerons tout à l'heure, mais ce paradoxe nous montre qu'il existe en réalité deux problèmes :

- a) nombre de mailles ;
 - b) composition des mailles
- que nous traiterons séparément.

a) NOMBRE DE MAILLES.

Considérons n nœuds réunis par p branches de manière à ne réaliser que des contours fermés.

Le nombre de régions délimitées est égal à $N = p - n + 1$.

En effet, si l'on joint deux nœuds quelconques existants, le nombre des régions augmente d'une unité ainsi que le nombre de branches.

Si l'on appelle p_1 l'augmentation du nombre de branches ainsi réalisée, on a :

$$\Delta N = \Delta p_1.$$

Si on crée un nouveau nœud et si on le joint à K nœuds existants, on augmente le nombre de régions de $K-1$ et le nombre de branches de K . Donc, si p_2 est le nombre de branches considérées, on a pour chaque nœud :

$$\Delta N = \Delta p - 1 \text{ et pour l'ensemble des nœuds } \Delta N = \Delta p_2 - n.$$

Finalement : $\Delta N = \Delta p_1 + \Delta p_2 - \Delta n = \Delta p - \Delta n(1)$ donc $N = p - n + \text{constante}$.

Il est facile de voir que la constante est égale à 1.

En effet, quelle que soit la disposition des n nœuds, nous pouvons trouver un polygone convexe de n' côtés ayant ses sommets en certains de ces nœuds et enveloppant tous les autres.

Supprimons tous les nœuds et branches intérieurs à ce polygone, il nous reste une seule région

délimitée par un polygone convexe de n' sommets, donc de n' côtés et l'équation (1) devient :

$$1 = n' - n' + \text{constante},$$

donc, la constante est égale à 1.

Supposons maintenant que le réseau des p branches et n nœuds soit un réseau hydraulique.

Ces nœuds peuvent se répartir en n_1 nœuds où le potentiel est connu, le débit extérieur inconnu (réservoirs), n_2 nœuds où le potentiel est inconnu, le débit extérieur connu.

Pour ces derniers, nous avons n_2 équations du premier degré liant les débits entrant et sortant en chaque nœud.

De plus, pour une branche quelconque joignant les nœuds K et L nous avons la relation : $H_K - H_L = R_{KL} - Q_{KL}^2$

Q_{KL} étant le débit qui circule dans cette branche et R_{KL} sa résistance

Nous avons ainsi p équations à $p - n$ inconnues, p inconnues figurant au second degré (débits) et n au premier (potentiel).

L'élimination des potentiels va nous ramener à $p - n$ équations du second degré liant les débits entre eux.

Cette élimination se fait par sommation des équations entre elles

$$H_A - H_B = \dots\dots$$

$$H_B - H_C = \dots\dots$$

$$H_C - H_A = \dots\dots$$

Ces sommations peuvent se faire de plusieurs manières différentes, mais on ne peut prendre n'importe lesquelles d'entre elles sous peine de tomber sur des équations du second degré non indépendantes.

Ce problème est exactement celui du choix des mailles dans la méthode HARDY-CROSS.

Le nombre d'équations $p - n_2$ est encore égal à $p - n + n_1$

On remarquera tout de suite que dans les réseaux à un seul réservoir où $n = 1$, le nombre d'équations est égal au nombre des régions délimitées par les mailles.

Pour les réseaux où $n_1 > 1$ on peut écrire $N = p - n + 1 + (n_1 - 1)$

Le nombre d'équations est égal au nombre de régions, augmenté du nombre de nœuds à potentiel connu diminué d'une unité.

Toutefois, pour généraliser la méthode de calcul HARDY-CROSS, on peut considérer les nœuds à potentiels connus comme des nœuds à potentiels inconnus reliés à l'un d'entre eux par des canalisations fictives au nombre de

FIGURE 10

$n_1 - 1$. Ce faisant, on augmente le nombre de branches ainsi que le nombre de régions de $n_1 - 1$.

$$\begin{aligned} N &= p + (n_1 - 1) - n + 1 \\ &= p' - n + 1 \end{aligned}$$

p' étant le nombre de branches après adjonction de $n_1 - 1$ branches fictives.

Donc, sous réserve d'avoir ajouté ces branches fictives, on a la proposition générale suivante :

— le nombre de mailles à considérer dans la méthode HARDY-CROSS est égal au nombre de régions délimitées.

Ceci répond au problème posé pour certains réseaux qui semblent à priori nécessiter moins de mailles que de régions délimitées.

Soit, par exemple, le réseau ABCDE (fig. 10) qui délimite trois régions. Il semble à priori que les deux mailles ACDEB et BED suffisent pour l'application de la méthode HARDY-CROSS puisqu'elles englobent toutes les branches.

En réalité, il n'en est rien, le réseau ainsi équilibré est le réseau à deux régions ABCDE et B'ED sans communication entre B et B'.

b) CHOIX DES MAILLES

La méthode la plus sûre pour résoudre exactement le problème est de prendre comme mailles la périphérie de chaque région. Un tel choix correspond forcément à des équations du second degré indépendantes. Mais cette méthode n'est la plus courte que si le réseau est homogène, c'est-à-dire si les résistances des différentes branches sont du même ordre.

Sinon, il paraît préférable d'isoler dans le réseau un réseau de « moindre résistance » dont les mailles devront être traitées en premier lieu. A l'intérieur des mailles de ce réseau principal existent des mailles secondaires qui devront être toutes traitées séparément (en réalité, on peut se dispenser d'en traiter une et une seule ; car le fait d'avoir déjà traité la maille périphérique rendrait le système surabondant).

On peut se demander, lorsqu'un choix de mailles aura été effectué, à quel critérium on reconnaîtra qu'il donne un système indépendant. Nous avons vu que le système constitué par les régions élémentaires était indépendant. Or, si la notion région élémentaire, c'est-à-dire région qui n'est traversée par aucune canalisation, est évidente sur une représentation géographique du réseau, elle l'est beaucoup moins dès qu'on prend un schéma théorique.

Reprenons en effet le réseau de la fig 9. Sans changer leurs résistances, supposons que les

canalisations EBH et FCG passent en EB'H et FC'G, à l'intérieur de la région EFGH (fig. 9 bis).

L'équilibre de ce nouveau réseau est évidemment le même que celui du précédent et cependant ses régions élémentaires ne sont plus les mêmes, la région EB'HGC'F correspond à la somme des trois régions du premier réseau.

Géométriquement, on pourrait donc dire qu'un choix de maille sera convenable lorsqu'une suite de transformations analogues à celles que nous venons d'indiquer, permettra de transformer le réseau géographique en un réseau théorique dont chaque maille serait une région élémentaire. Mais cette condition, si elle est suffisante, n'est pas nécessaire.

Aussi, préférons-nous le critérium suivant. Considérons le réseau géographique dans lequel les régions élémentaires ont été numérotées. Chaque maille considérée est toujours une somme de régions élémentaires.

Désignons chaque maille choisie par une lettre

FIGURE 9 bis

et établissons un tableau carré à double entrée.

	1	2	3	4	n
A	1	0	0	1..	0
B	0	1	1	0..	1
C	1	0	0	0..	0
.....					
N	1	1	1	0..	0

Considérons, par exemple, la maille A, formée des régions 1 et 4. Dans les colonnes 1 et 4, nous marquerons 1 et 4, dans les autres colonnes 0 et ainsi de suite.

Le déterminant ainsi formé doit être différent de zéro (2).

On peut d'ailleurs, avant de le développer, le simplifier considérablement, car :

1°) On peut supprimer toute ligne ou toute colonne comprenant un seul 1 et plusieurs 0, en supprimant en même temps la colonne ou la ligne qui comprend ce 1.

2°) On peut supprimer toute ligne ou colonne qui ne diffère d'une autre ligne ou colonne que par un seul élément en supprimant en même temps la colonne ou la ligne correspondant à l'élément commun.

L'application successive de ces deux principes permettra, la plupart du temps, de ne pas développer le déterminant pour constater finalement s'il est nul ou non.

Nous pouvons démontrer sur un exemple simple l'intérêt qu'il y a à choisir convenablement les mailles.

Considérons trois conduites en parallèle (fig. 11) ABE, ACE, ADE, de résistance R_1, R_2, R_3 ,

FIGURE 11

avec entrée Q en A et sortie Q en E.

(2) Cette condition qui résout élégamment le problème a été trouvée par M. BIESEL, Ingénieur des Laboratoires NEYRPEC.

Bien qu'un tel réseau puisse être calculé par une méthode plus directe, appliquons-lui la méthode HARDY-CROSS.

L'équilibre est déterminé évidemment par la connaissance des débits x, y, z dans les trois conduites ABE, ACE, ADE.

On a d'abord :

$$x + y + z = Q$$

Nous pouvons donc représenter tout système arbitraire de distribution de x, y et z par un point M donné à l'intérieur d'un triangle équilatéral XYZ (fig. 12).

FIGURE 12

Considérons, maintenant, la maille ABE, son équilibre sera réalisé lorsque :

$$R_1 x^2 = R_2 y^2 \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$

Le point figuratif de cet équilibre est sur une droite issue de Z.

De même, le point figuratif de l'équilibre de la maille ACED sera sur une droite issue de X et celui de la maille ABED sur une droite issue de Y. Ces trois droites sont concourantes en M_0 .

Si les trois résistances sont du même ordre de grandeur, elles concourent près du centre de gravité du triangle. Le choix des mailles est indifférent. Au contraire, si les deux résistances parcourues par x et y sont peu élevées par rapport à la résistance parcourue par z , le choix n'est plus indifférent si l'on désire avoir une convergence plus rapide.

En effet, les droites $X M_0$ et $Y M_0$ sont alors plus proches de XY que de XZ et YZ et font entre elles un angle très plat.

Appliquons la méthode HARDY-CROSS aux mailles ABED et ACED.

Rectifiée par le calcul, la maille ABED ($y = \text{constante}$) revient à tracer une parallèle MM_1 à XZ et à prendre comme point d'équilibre de cette maille le point M_1 .

On obtiendra de même le point M_2 figuratif de l'équilibre de la maille ACED ($x = \text{constante}$).

Et, après application des corrections ainsi déterminées, on a le nouveau point figuratif M' ($M' M_2$ parallèle à XZ , $M' M_1$ à YZ).

Opérons de même à partir de M' , on obtient M_3 et M_4 et le point figuratif M'' .

On voit donc que les points M_2, M_4, M_6 etc... et les points M_1, M_3, M_5 sont alternativement sur les droites $X M_0$ et $Y M_0$ et qu'ils tendent vers le point M_0 .

Les points $M_2, M_4, M_6, M_{2n} + 2$ sont sur une même droite et on démontre qu'ils forment une progression géométrique.

La convergence de la méthode sera d'autant plus rapide que la raison de cette progression sera plus petite.

La raison de cette progression est

$$\frac{R_3}{(\sqrt{R_3} + \sqrt{R_1}) (\sqrt{R_3} + \sqrt{R_2})}$$

R_3 est la résistance de la branche commune aux deux mailles choisies.

Si nous supposons, par exemple, ces trois résistances proportionnelles à 1 - 4 et 25, nous voyons que, suivant la combinaison choisie, la raison de la progression est : 0,055 0,190 ou 0,595

S'il faut 3 approximations dans la première combinaison pour arriver à une précision donnée, il en faudra 5 dans la seconde et 11 dans la troisième.

On voit donc le gros intérêt qu'il y a à prendre pour branche commune aux deux mailles la branche de résistance minima, autrement dit à prendre le système donnant la résistance totale des deux mailles minima.

Sur ce même graphique, on peut voir, également, l'avantage de la méthode que nous préconisons tout à l'heure, qui consiste à calculer une maille en tenant compte des corrections qu'a fait subir l'étude de la maille précédente à leur élément commun.

En effet, la méthode ordinaire consiste (fig. 12 bis) à prendre pour approximations successives les points M, M', M'', M''', M'''' .

La méthode préconisée, au contraire, consiste à prendre pour approximations successives $M - M_3 - M_7$ ou $M - M_1 - M_5$, suivant l'ordre dans lequel on examine les mailles, c'est-à-dire qu'elle va deux fois plus vite, puisque le point M par exemple, est atteint à la deuxième approximation, tandis qu'il n'est atteint qu'à la quatrième approximation dans le premier cas.

Si nous avions dans le même réseau des débits en B, C et D, le problème serait plus complexe,

FIGURE 12 bis

les droites $X M_0, Y M_0, Z M_0$ devenant alors des courbes. On ne peut plus parler de progression géométrique que dans la mesure où l'on peut confondre ces courbes avec leur tangente.

Néanmoins, l'allure du phénomène est conservée et il y a intérêt à baser encore le choix des mailles sur le même critérium.

c) NOUVELLE MÉTHODE D'APPROXIMATIONS.

Le choix des mailles nous a donc permis d'augmenter notablement la rapidité des calculs.

Est-il encore possible d'augmenter cette rapidité ?

Dans certains cas certainement, si nous faisons appel à la méthode suivante que nous allons exposer sur un exemple simple.

Supposons un réseau à deux mailles (fig. 13) dans lequel nous avons à priori un régime de débits donnés Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 .

L'équilibre exact est donné par la solution du système à deux inconnues :

$$1) R_1 (Q_1 + x)^2 + R_2 (Q_2 + x)^2 + R_3 (Q_3 + x + y)^2 = 0$$

$$2) R_4 (Q_4 + y)^2 + R_5 (Q_5 + y)^2 + R_3 (Q_3 + x + y)^2 = 0$$

(les différentes résistances et débits étant pris avec leur signe algébrique, correspondant au sens du parcours choisi dans chaque maille).

FIGURE 13

Ce qui donne, en développant :

$$1) \sum R_1 Q_1^2 + x \sum 2R_1 Q_1 + y \sum 2R_3 Q_3 + x^2 (R_1 + R_2) + (x+y)^2 R_3 = 0$$

$$2) \sum R_4 Q_4^2 + x \sum 2R_3 Q_3 + y \sum 2R_5 Q_5 + y^2 (R_4 + R_5) + (x+y)^2 R_3 = 0$$

Les méthodes exposées jusqu'ici consistent non seulement à négliger les termes du second degré, mais encore les termes $y \cdot 2R_3 Q_3$ et $x \cdot 2R_3 Q_3$, ce qui n'est valable que si $R_3 Q_3$ est négligeable devant :

$$(R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + R_3 Q_3) \text{ et}$$

$$(R_4 Q_4 + R_5 Q_5 + R_3 Q_3)$$

On conçoit donc qu'on aura une convergence plus rapide si au lieu de calculer x et y séparément, comme il a été fait jusqu'ici, on les calcule à l'aide de l'équation du premier degré à deux inconnues, obtenue en négligeant les termes du second degré.

Soit l'exemple numérique suivant :

$R_1=50$ $R_2=150$ $R_4=49$ $R_5=25$ $R_3=600$
(avec une entrée de 1.000 lit./sec. en A et un départ de 1.000 lit./sec. en C).

Nous sommes partis avec les débits suivants :

$$Q_1=Q_4=700 \quad Q_2=Q_5=300 \quad Q_3=0$$

Nous connaissons, à priori, la solution exacte sur laquelle les données avaient été établies.

$$Q_1 = 600 \quad Q_2 = 400 \quad Q_3 = 100 \\ Q_4 = 500 \quad Q_5 = 500$$

Nous partions donc avec une erreur de 200 litres dans certaines branches et de 100 litres dans les autres.

Nous avons successivement appliqué :

1°) la méthode « Hardy-Cross » simple sur les mailles ABD et BCD,

2°) la méthode « améliorée » sur les mailles ABCD et BCD,

3°) la méthode à « deux inconnues ».

Voici les erreurs maxima résiduelles après chaque approximation :

METHODE		1	2	3
Erreur après	1 ^{er} essai	39	77	39
—	2 ^e essai	23	12	0,4
—	3 ^e essai	9	2	
—	4 ^e essai	6	0,4	
—	5 ^e essai	2,5		
—	6 ^e essai	1,5		
—	7 ^e essai	0,6		
—	8 ^e essai	0,4		

Nous voyons que la convergence de la troisième méthode est deux fois plus rapide que celle de la seconde, laquelle est deux fois plus rapide que celle de la première.

Il est à remarquer que la rapidité de convergence dans la troisième méthode est indépendante du choix des mailles. Elle peut donc être appliquée sur les deux mailles ABD et BCD dont le calcul est plus simple que le groupe ABCD et BCD.

Toutefois, lorsque le nombre de mailles est suffisamment important (le nombre d'inconnues étant égal au nombre de mailles), si l'équation du premier degré à n inconnues est relativement facile à poser, elle devient plus difficile à résoudre et le gain de temps peut être négatif.

Cependant, les méthodes pouvant s'interpénétrer, on peut, si on le veut, dégrossir le problème par la méthode « Hardy-Cross » simple et le terminer par la méthode à plusieurs inconnues.

En particulier, on peut, dans un réseau à mailles nombreuses, trouver des mailles s'amortissant difficilement alors que les autres paraissent de meilleure composition. Cela arrivera

notamment pour des mailles ayant en commun un parcours dont le $2RQ$ est relativement élevé. On pourra alors, pour ces deux mailles seulement, prendre le système à deux inconnues qui les concerne et leur amortissement sera alors aussi rapide que celui des autres mailles.

CONCLUSION

Nous avons exposé ci-dessus les réflexions auxquelles nous a conduits une pratique assez longue du calcul des réseaux maillés. La méthode dont HARDY-CROSS a donné les grandes lignes, nous ayant apporté, au début, quelques déboires, sinon dans sa sûreté, du moins dans sa rapidité, nous l'avons étudiée plus à fond sur le plan théorique. Nous avons, ainsi, découvert certaines méthodes pouvant notablement diminuer la longueur des calculs et espérons avoir fait œuvre utile pour ceux qui auront à calculer des réseaux d'une certaine complexité.

LA HOUILLE BLANCHE signale à ses lecteurs que différents dépôts ont été faits à l'Etranger, où ils peuvent s'adresser, soit pour obtenir un numéro, soit pour contracter un abonnement.

ARGENTINE

Mr F. SENZ, Corrientes 456, BUENOS-AIRES.

BELGIQUE

LIBRAIRIE « Vient de Paraître » BEHON J., Treurenberg, 19, BRUXELLES.

BRESIL

FRANCOBEL S. A., 311, Avenida Rio Branco, Salas 615-16, Caixa Postale 3848
RIO-DE-JANEIRO.

HOLLANDE

Lib. MEULENHOF & C°, Beulingstraat 2-3, AMSTERDAM.

PORTUGAL

Livraria BERTRAND IRMAOS Lda Travessa da Condessa do Rio LISBONNE.

SUISSE

M. Fred GILLIARD, Edition-Représentation, Case-Ville, LAUSANNE.