

FLEXION ET FLAMBAGE DES ARCS MINCES

APPLICATION AU FLAMBAGE DES CONDUITES ET DES ANNEAUX CIRCULAIRES

P. ANGLÈS D'AURIAC

Ancien élève de l'École Polytechnique

AVANT-PROPOS

Les premières recherches théoriques en rapport avec la résistance des conduites au vide intérieur remontent, à notre connaissance, à l'année 1884. C'est à cette date, dans le journal de Mathématiques pures et appliquées, que Maurice LÉVY étudia la stabilité d'un cylindre circulaire indéfini soumis à pression extérieure. Il établit le premier l'existence d'une pression critique à partir de laquelle l'équilibre devient instable et en donna l'expression mathématique.

Cette même formule fut retrouvée quelques années après par ALLIÉVI dans ses études sur le coup de bélier. Elle connut alors une grande diffusion et garda le nom de son vulgarisateur.

La formule dite d'ALLIÉVI donne une relation entre la pression critique, les caractéristiques géométriques du tuyau et le module d'élasticité du matériau. Chose curieuse, elle ne fait pas intervenir son taux de résistance.

Notons que, dans l'esprit même de ses auteurs, cette formule ne prétend pas résoudre intégralement le problème pratique du flambage des conduites. Ce n'est qu'une formule théorique s'appliquant à des corps de forme idéale.

Les études ultérieures faites sur le même problème eurent, on ne sait pourquoi, beaucoup moins de retentissement. Aujourd'hui encore de nombreux bureaux d'études ne connaissent que la vieille formule d'ALLIÉVI.

Ils l'utilisent prudemment en l'affectant d'un certain coefficient de sécurité dont, malheureusement, on ne voit pas très bien la signification. On prend par exemple une pression égale à 2 fois la pression atmosphérique et l'on en déduit le moment d'inertie nécessaire pour la paroi.

L'expérience montre que les tuyaux calculés ainsi, ont en général, la résistance voulue. Cette méthode a néanmoins l'inconvénient de ne pas faire voir de quoi dépend réellement la résistance

du tuyau. Elle néglige deux facteurs primordiaux : l'ovalité de construction de la conduite et le taux de résistance du matériau ; or, selon leurs valeurs, le coefficient de sécurité réel au point de vue résistance pourra varier beaucoup et, en tout cas, n'aura aucun rapport avec le prétendu chiffre 2. Il peut même se faire, si l'ovalité de construction est trop grande, que la conduite casse.

L'étude ci-dessous répond au besoin des bureaux d'études d'avoir une méthode de calcul plus complète que celle habituellement en usage et néanmoins simple.

Les deux premiers chapitres sont un préambule mathématique aboutissant aux équations générales de la déformation des cylindres circulaires soumis à pression extérieure. Théorie classique mais que nous développons un peu plus qu'il n'est coutume.

Ce développement n'est pas inutile. Il nous permet, au chapitre III, d'étudier non seulement le cas classique de l'anneau complet libre et sans articulation, mais plusieurs autres cas types, susceptibles d'applications.

Jusque là, il n'est question, comme chez ALLIÉVI, que de cercles parfaits et de pressions critiques.

Au chapitre IV, nous abordons l'étude si importante de l'ovalité de construction. Notre point de départ se trouve être le même que celui de TIMOSCHENKO dans « Elastic Stability ». Toutefois, la forme de nos résultats est beaucoup plus simple. Nous présentons un abaque qui donne la contrainte du matériau en fonction de la pression et des caractéristiques de construction (rayon, épaisseur, ovalité). Cet abaque permet de dissocier clairement les différents coefficients de sécurité que l'on doit prendre.

1 — Sécurité sur les efforts.

Elle est liée au choix de la pression de calcul.

Dans le cas de la résistance au vide intérieur, la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur ne peut pas dépasser la pression atmosphérique. Il n'y a donc pas de coefficient de majoration à adopter. Cela n'aurait aucun sens de calculer pour deux fois la pression atmosphérique.

2 — Sécurité sur la forme de la pièce

On pourra, par exemple, imposer dans le cahier des charges que l'ovalité soit inférieure à 2 % et, par sécurité, faire le calcul pour une ovalité de 4 %. Ces chiffres ne sont donnés qu'à titre indicatif. Ce qui est nécessaire, c'est de prendre pour le calcul une ovalité largement plus grande que celle imposée au cahier des charges. A l'ovalité de construction doit d'ailleurs s'ajouter, le cas échéant, celle due au poids de la conduite et au poids d'eau.

3 — Sécurité sur la résistance du matériau

Puisque l'on a pris par ailleurs toutes les marges de sécurité nécessaires, il est inutile d'en prendre une très grande sur la résistance du matériau. Un taux de travail de 20 k/mm² nous paraîtrait encore acceptable pour de l'acier.

Tout ce qui précède est relatif aux conduites homogènes, c'est-à-dire dont toutes les sections sont semblables, l'inertie de la paroi résultant simplement de son épaisseur. Mais dès que le diamètre de la conduite ou la pression extérieure atteint une certaine valeur, il devient trop coûteux de réaliser l'inertie nécessaire par la seule épaisseur. On est conduit à disposer de place en place des cercles de renforcement. Nous étudions au chapitre V l'inertie et l'espacement à donner à ces renforcements ainsi que le travail de la paroi entre deux renforcements.

CHAPITRE I

Déformation plane d'une courbe plane

On sait que quand une poutre courbe ou « arc » a des dimensions transversales suffisamment faibles par rapport à sa longueur et à son rayon de courbure, il suffit pour caractériser sa déformation, de définir celle de sa ligne moyenne.

L'extension et la flexion de cette dernière dépendent respectivement de l'effort normal et du moment fléchissant.

Il est donc naturel de faire précéder l'étude de la flexion des arcs minces par l'étude purement géométrique de la déformation d'une courbe plane.

DEFORMATION PLANE QUELCONQUE D'UNE COURBE PLANE

Soit, dans un plan, une origine O, un axe O_x et 2 courbes AB et A₁B₁. A tout point M de AB correspond, par hypothèse, un point M₁ de A₁B₁.

Posons :

$$\begin{aligned} \overline{\rho} &= \overline{OM} & \overline{\rho_1} &= \overline{OM_1} \\ d\rho &= \overline{MM'} & d\rho_1 &= \overline{M_1M'_1} \\ s &= AM & s_1 &= A_1M_1 \\ ds &= MM' & ds_1 &= M_1M'_1 \end{aligned}$$

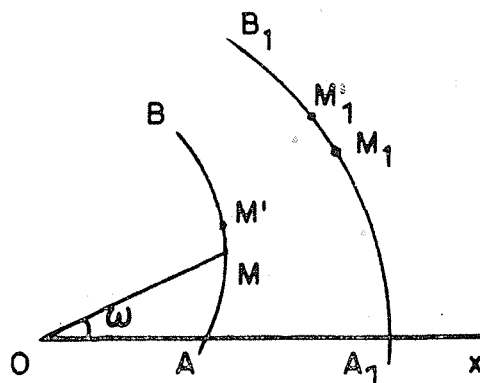


FIGURE 1

$\rho, \rho_1, d\rho, d\rho_1$ sont des vecteurs ou grandeurs complexes.

s, s_1, ds, ds_1 des scalaires, modules des précédents.

L'extension ϵ de la courbe est définie par

$$1 + \epsilon = \frac{ds_1}{ds} \tag{1}$$

Soit α l'angle que fait avec ox la tangente en M dans le sens des s croissants.

Les courbures en M et M₁ sont respectivement définies par

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} \quad \gamma_1 = \frac{d\alpha_1}{ds_1}$$

La variation de courbure ou « flexion » de la courbe est :

$$\theta = \frac{d\alpha_1}{ds_1} - \frac{d\alpha}{ds}$$

Soit φ la rotation de la tangente dans la déformation :

$$\varphi = \alpha_1 - \alpha$$

d'où :

$$\theta = \frac{d\varphi - \varepsilon d\alpha}{(1 + \varepsilon) ds} \quad (2)$$

La formule 2 peut s'écrire :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \theta (1 + \varepsilon) + \varepsilon \frac{d\alpha}{ds} = \theta \left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon \gamma}{\theta} \right)$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\theta = \frac{d\varphi}{ds} \quad (3)$$

pourvu que l'on ait à la fois :

ε petit, ce qui exclut les matériaux du genre caoutchouc.

$\frac{\varepsilon \gamma}{\theta}$ petit, ce qui exclut le cas où la courbure initiale serait trop grande par rapport à $\frac{\theta}{\varepsilon}$. Le rapport $\frac{\theta}{\gamma}$

représente la variation relative de courbure.

PETITES DEFORMATIONS
D'UNE COURBE PLANE

Elles sont définies par ε et θ petits. Introduisons le vecteur déplacement

$$\bar{u} = \overline{AA_1}$$

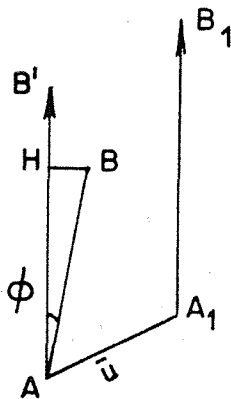


FIGURE 2

Soit les arcs élémentaires AB et $A_1 B_1$, soit AB' équipollent à $A_1 B_1$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \overline{AA_1} &= \bar{u} \\ \overline{BB_1} &= \bar{u} + \overline{du} \\ \overline{BB'} &= \overline{BB_1} + \overline{B_1 B'} = \\ &= \bar{u} + \overline{du} - \bar{u} = \overline{du} \end{aligned}$$

Le vecteur $\overline{BB'}$ est la somme géométrique de :

$$\overline{BH} = i\varphi \overline{d\rho} \text{ c'est-à-dire } \varphi \overline{d\rho} \text{ tourné de } +\frac{\pi}{2}$$

$$\overline{HB'} = \varepsilon d\rho$$

d'où la formule fondamentale :

$$\overline{du} = (\varepsilon + i\varphi) \overline{d\rho} \quad (4)$$

Décomposons maintenant le vecteur \bar{u} en un vecteur $\lambda \rho$ porté par OA et $i \mu \rho \perp OA$, λ et μ étant scalaires.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \lambda \bar{\rho} + i \mu \bar{\rho} \\ \overline{du} &= (\lambda + i \mu) \overline{d\rho} + (d\lambda + i d\mu) \bar{\rho} \end{aligned} \quad (5)$$

Exprimons $\bar{\rho}$ en fonction de $\overline{d\rho}$ pour pouvoir identifier (4) et (5). Soit ω l'angle de OA avec ox et β , l'angle de AB avec OA.

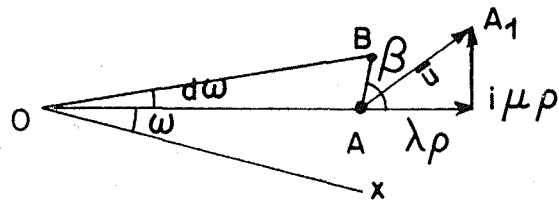


FIGURE 3

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \rho e^{i\omega} \\ d\rho &= ds e^{i(\omega + \beta)} \end{aligned}$$

par ailleurs $ds = \frac{\rho d\omega}{\sin \beta}$

d'où $\rho = d\rho \frac{\sin \beta \cos \beta - i \sin^2 \beta}{d\omega}$

En portant cette expression dans 5 et en identifiant avec 4, il vient :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \lambda + \lambda' \sin \beta \cos \beta + \mu' \sin^2 \beta \\ \varphi &= \mu - \lambda' \sin^2 \beta + \mu' \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \quad (6)$$

où les dérivées sont prises par rapport à ω .

CAS DU CERCLE

Pour un cercle $\beta = \frac{\pi}{2}$

le système 6 devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \lambda + \mu' \\ \varphi &= \mu - \lambda' \end{aligned}$$

qui, en changeant les notations, devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= n + t' \\ \varphi &= t - n' \end{aligned} \quad (7)$$

n et t étant respectivement les déplacements relatifs radiaux et tangentiels.

Pour $\varepsilon = 0$

$$R \theta = \varphi' = t' - n'' = - (n + n'') \quad (8)$$

VARIATION DE SURFACE

Soit toujours AB et A₁B₁ un élément d'arc et son transformé. La surface AA₁B₁B est un infiniment petit du même ordre que la surface AA₁B₁B laquelle est égale au produit vectoriel $\bar{u} (\times) d\bar{\rho}$

Désignons par (×) les produits vectoriels et par (.) les produits scalaires. Soit Ω la surface balayée par le rayon vecteur. La variation totale de surface sera en valeur absolue.

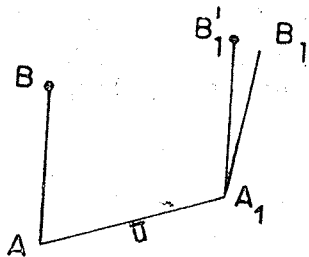


FIGURE 4

$$\Delta \Omega = \int_c \bar{u} (\times) d\bar{\rho} = \int_c \bar{\rho} (\times) d\bar{u} = \int_c \varepsilon \bar{\rho} (\times) d\rho + \int_c \varphi i \bar{\rho} (\times) d\rho$$

$$\text{or : } \bar{\rho} (\times) d\bar{\rho} = 2 d\Omega$$

$$\text{et : } i \bar{\rho} (\times) d\bar{\rho} = \bar{\rho} (.) d\bar{\rho} = \frac{d\rho^2}{2}$$

$$\text{d'où } \Delta \Omega = \int_c 2 \varepsilon d\Omega + \int_c \varphi \frac{d\rho^2}{2}$$

$$\text{ou encore : } \boxed{\Delta \Omega = \int_c 2 \varepsilon d\Omega + \int_c \frac{\rho^2 \theta}{2} ds} \quad (9)$$

Dans cette formule ε est positif pour une extension et θ est positif si la face extérieure de la paroi est comprimée et la face intérieure tendue.

RELATIONS ENTRE LES DEFORMATIONS

ET LES EFFORTS

Pour un arc, les grandeurs ε et θ sont liées à l'effort normal N et au moment de flexion M par les relations

$$\varepsilon = \frac{N}{E S}$$

$$\theta = \frac{M}{E I} + \frac{\varepsilon}{R} \quad (10)$$

S et I étant respectivement la section et le moment d'inertie.

CHAPITRE II

Enveloppe cylindrique ou anneau soumis à pression extérieure ou intérieure

CERCLE DE FLEXION (OU CERCLE NODAL)

THEOREME D'EXISTENCE

Soit une enveloppe cylindrique mince, de forme quelconque soumise à pression uniforme p (par exemple intérieure). Prenons un point A quelconque sur la face interne de l'enveloppe et considérons deux coupes quelconques AA' et AA''. Par raison d'équilibre, les efforts sur ces deux coupes doivent être égaux. Nous pouvons donc, pour abrégier le langage, parler de l'effort sur une coupe en A sans préciser la direction de la coupe.

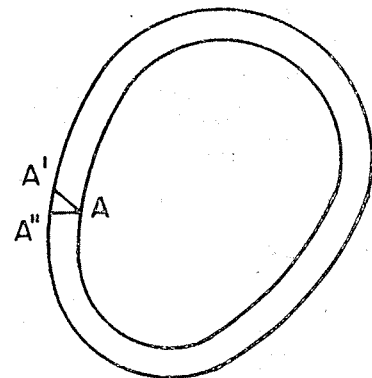


FIGURE 5

Si la pression était extérieure, nous pourrions refaire le même raisonnement, en prenant A sur la face externe. Mais, comme l'épaisseur de la paroi est très petite, nous pouvons ne pas distinguer les cas de pression extérieure et intérieure et prendre toujours le point A au milieu de l'épaisseur.

Soit donc une coupe en A. Les efforts que la partie inférieure exerce sur la partie supérieure sont équivalents à une certaine force F_A qui ne passe pas, en général, par A. Menons Ax ⊥ F_A. Soit O un point sur la droite Ax tel que p × AO = F_A c'est-à-dire que la pression p appliquée sur le côté OA a pour résultante F'_A équipollente à F_A. Nous pouvons donc remplacer la force F_A par la pression p sur la face OA + le moment de F_A par rapport à H' soit M_O.

F_A équivalent à $F'_A + M_o$.

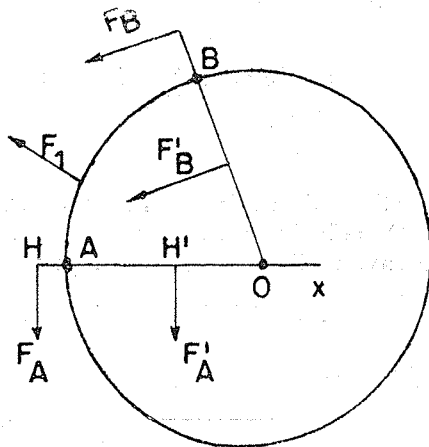


FIGURE 6

Considérons maintenant une coupe en B. Soit F_1 la force s'exerçant sur l'arc AB. La force en B, soit F_B sera la résultante de F_A et de F_1 , c'est-à-dire la résultante de F'_A , F_1 et M_o .

Or, la résultante de F'_A et F_1 n'est autre que la force F'_B résultant de la pression p exercée sur la face OB, d'où :

$$F_B \text{ équivalent à } F'_B + M_o.$$

Si nous rapportons au point B le système de forces s'exerçant sur la section B, nous avons une force F normale à OB.

$$F = p \rho$$

ρ étant la distance OB et un moment

$$M = p \frac{\rho^2}{2} + M_o$$

M_o étant constant quel que soit le point B. Posons :

$$M_o = \pm p \frac{R_o^2}{2}$$

(selon que M_o est positif ou négatif), nous aurons :

$$M = \frac{p}{2} (\rho^2 \pm R_o^2)$$

PREMIER CAS

$$M_o < 0$$

$$M = \frac{p}{2} (\rho^2 - R_o^2)$$

Traçons le cercle de centre O et de rayon R_o . Prenons l'inverse de l'enveloppe considérée par rapport à ce cercle. Au point B correspond le point B' tel que :

$$OB' = \frac{R_o^2}{OB}$$

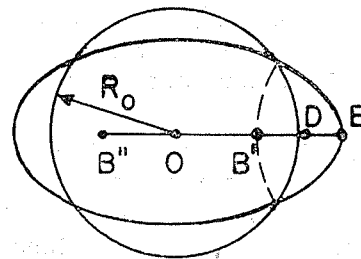


FIGURE 7

La force relative à la section B est égale à $p \times OB$ et est appliquée au point D milieu du segment BB' .

Le cercle est appelé cercle de flexion. Ses points d'intersection avec l'enveloppe sont des points de moment nul. C'est pourquoi on l'appelle aussi cercle nodal.

DEUXIEME CAS

$$M_o > 0$$

$$M = \frac{p}{2} (\rho^2 + R_o^2)$$

Traçons toujours un cercle de centre O et de rayon R_o . Prenons l'inverse de l'enveloppe par rapport au cercle, ce qui amène B en B', puis le symétrique de la courbe obtenue par rapport à O ce qui amène B' en B''. Le point d'application de la force n'est plus le milieu de BB' mais le milieu de BB'' .

Dans ce cas, le cercle ne s'appelle plus cercle nodal. Ses intersections avec l'enveloppe ne sont plus des points de moment nul. Il n'y a d'ailleurs plus de points de moment nul. Le moment est partout de même signe. Ce cas ne peut être réalisé que s'il existe un état de tension interne préalable à la mise en pression de l'enveloppe. On peut le réaliser, par exemple, en prenant un arc flexible de forme quelconque, en le courbant de façon à joindre les deux extrémités et en les soudant entre elles.

DETERMINATION DU CERCLE DE FLEXION

Le cercle de flexion dépend de trois paramètres : 2 pour la position du centre, 1 pour la valeur du rayon. Souvent, dans la pratique, des considérations de symétrie permettent de fixer a priori le centre. Il ne reste que le rayon à déterminer.

Si l'arc possède des articulations ou des points de très faible résistance à la flexion, assimilables à des articulations, le cercle de flexion doit

y passer. C'est ainsi que pour 3 articulations, le cercle est connu d'avance. Pour plus de 3 articulations, l'équilibre ne peut avoir lieu que si les articulations sont sur un même cercle. L'équilibre sera alors stable pour une pression intérieure et instable pour une pression extérieure.

CAS GENERAL SANS ARTICULATIONS

Etudions la déformation de la courbe C en immobilisant le point A et sa tangente.

L'angle de rotation en B sera :

$$\varphi = \int_A^B \frac{M}{EI} ds$$

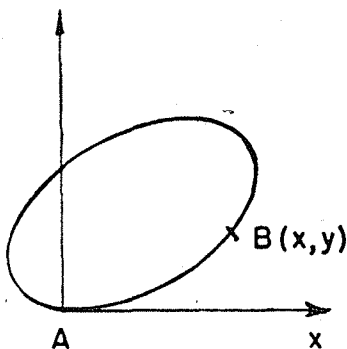


FIGURE 8

et le déplacement aura pour composante :

$$u = - \int_A^B y \frac{M}{EI} ds$$

$$v = \int_A^B x \frac{M}{EI} ds$$

Les 3 intégrales doivent être nulles, prises le long du contour fermé. D'où 3 équations pour déterminer les 3 paramètres dont dépend le cercle de flexion.

Nous donnons simplement le résultat du calcul. On peut le traduire de la façon suivante : Attribuons à la courbe C une épaisseur fictive variable proportionnelle à $\frac{1}{EI}$.

L'élément de section sera : $dS = \frac{ds}{EI}$

Prenons comme axes de coordonnées les axes principaux d'inertie de S. Les coordonnées a et b du centre O du cercle de flexion seront

$$a = \frac{\int x \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) dS}{\int x^2 dS}$$

$$b = \frac{\int y \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) dS}{\int y^2 dS}$$

et le rayon du cercle sera donné par :

$$R_0^2 = \frac{\int (x^2 + y^2 + a^2 + b^2) dS}{S}$$

Si la section S avait deux axes de symétrie, le point O coïnciderait avec le centre de symétrie et le rayon R_0 serait donné par

$\frac{\int (x^2 + y^2) dS}{S}$, c'est-à-dire serait le rayon de giration polaire.

CHAPITRE III

Flambage d'un anneau ou d'une enveloppe cylindrique

ANNEAU ET CYLINDRE

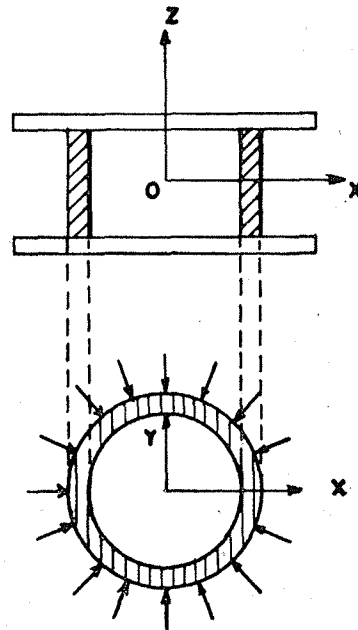


FIGURE 9

Soit un anneau soumis à des forces extérieures centripètes uniformément réparties.

Si le moment d'inertie de la section $x o z$ par rapport à l'axe xx est grand, cet anneau ne pourra pas flamber par déplacement selon l'axe z . Il en sera de même si l'anneau est guidé entre deux plaques parallèles au plan $x o y$ (cas de la fig. 9).

Dans ce cas comme dans l'autre, l'anneau se comportera au point de vue flambage, de la même façon qu'un cylindre infini ; c'est-à-dire que le flambage se produira par déformation de la section droite du cylindre. Il existe pourtant une différence entre le cas de l'anneau de faible hauteur (selon z) et le cylindre. C'est la suivante :

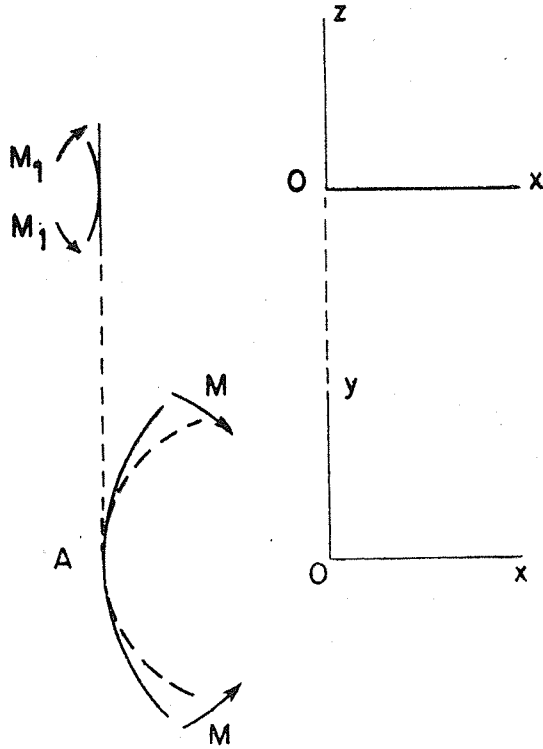


FIGURE 10

Supposons qu'au point A dans l'anneau il y ait un moment de flexion M produisant une variation de la courbure γ telle qu'indiquée figure 10. En raison du coefficient de poisson il doit se produire dans la coupe selon $z o x$ une variation de courbure de sens inverse égale à η fois la précédente. Mais cette déformation ne peut se produire que pour un anneau de faible hauteur. Pour un cylindre de hauteur infinie, cette déformation est nulle. C'est donc qu'il existe un moment $M_1 = \eta M$ qui l'empêche. Ce moment M_1 agira à son tour par effet de poisson sur la courbure dans le plan $x y$ en rajoutant la courbure $-\eta^2 \gamma$.

Les déformations seront donc $\times (1 - \eta^2)$ par rapport au cas de l'anneau.

Ainsi, la seule différence entre le cas de l'anneau et celui du cylindre, est la suivante :

— pour l'anneau, on considère le module d'élasticité réel E et pour le cylindre un module fictif $E' = \frac{E}{1 - \eta^2}$.

Flambage d'un segment d'Arc de Cercle

Le centre du cercle de flexion est en O' différent de O . Prenons OO' comme axe $o x$. Soit $OO' = \delta R$ et soit R_0 le rayon du cercle de flexion :

$$R_0 = R (1 + h)$$

Soit A un point de l'enveloppe circulaire définie par l'angle ω et le rayon R . Ce point subit un déplacement radial $n R$ qui l'amène en A' , et un déplacement tangentiel $t R$ qui l'amène en A'' .

Les coordonnées polaires de A'' sont :

$$R (1 + n) \\ \omega + t$$

Nous avons :

$$\overline{O'A''}^2 = \overline{O'O}^2 + \overline{OA''}^2 + 2\overline{OO'} \cdot \overline{OA''} \cos(\omega + t) \\ = R^2 [\varepsilon^2 + (1+n)^2 + 2\delta(1+n) \cos(\omega + t)]$$

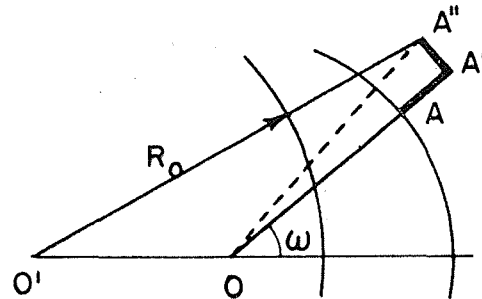


FIGURE 11

c'est-à-dire en négligeant les infiniment petits de second ordre

$$\overline{O'A''}^2 = R^2 [1 + 2n + 2\delta \cos \omega]$$

Le moment au point A'' est donné par :

$$M = \frac{p}{2} [\overline{O'A''}^2 - R_0^2]$$

$$M = pR^2 [n + \delta \cos \omega - h]$$

La déformation est donnée par les formules 7, 8 et 10 où l'on fait $\varepsilon = 0$

$$R \theta = t' - n'' = n - n'' = \frac{MR}{EI}$$

d'où l'équation en n

$$n'' + n \left(1 + \frac{pR^3}{EI}\right) + \frac{pR^3}{EI} (\delta \cos \omega - h) = 0$$

ainsi que :

$$n + t' = 0$$

dont la solution générale est, en posant :

$$(11) K = \sqrt{1 + \frac{pR^3}{EI}} \quad K > 1$$

$$(12) n = A \cos K \omega + B \sin K \omega - \delta \cos \omega + \frac{K^2 - 1}{K^2} h$$

$$t = -\frac{A}{K} \sin K\omega + \frac{B}{K} \cos K\omega + \delta \sin \omega - \frac{K^2 - 1}{K^2} h\omega + C$$

La solution dépend de 4 constantes arbitraires A, B, C, et h.

Rδ représente la distance du centre de flexion O' au centre de l'arc de cercle dans sa position initiale. Or, δ n'intervient dans la solution générale que par les termes :

$$\begin{aligned} n &= \delta \cos \omega \\ t &= \delta \sin \omega \end{aligned}$$

Ces dernières formules définissent une translation — δ R selon l'axe des x, translation qui ramène O en O'.

Pour expliciter une solution pratique, compte tenu des conditions aux limites, nous avons le choix entre deux méthodes :

1°) Exprimer les conditions aux limites par rapport à la position initiale du cercle. Auquel cas on doit conserver les termes en δ dans la solution générale.

2°) N'exprimer les conditions aux limites qu'à un déplacement près. Auquel cas on peut poser à priori δ = 0 et de même C = 0, car la solution n = 0

$$t = C$$

correspond à une rotation pure.

Dans ces conditions, les formules 12 sont remplacées par les suivantes :

$$\begin{aligned} n &= A \cos K\omega + B \sin K\omega + \frac{K^2 - 1}{K^2} h \\ t &= -\frac{A}{K} \sin K\omega + \frac{B}{K} \cos K\omega - \frac{K^2 - 1}{K^2} h\omega \end{aligned} \quad (12bis)$$

On peut encore simplifier en posant :

$$\begin{aligned} A &= H \cos \omega_0 \\ B &= H \sin \omega_0 \end{aligned}$$

Les équations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} n &= H \cos (K\omega - \omega_0) + \frac{K^2 - 1}{K^2} h \\ t &= -\frac{H}{K} \sin (K\omega - \omega_0) - \frac{K^2 - 1}{K^2} h\omega \end{aligned} \quad (13)$$

La solution représentée par ces équations est elle-même la somme de 2 solutions.

Une solution périodique de période $\frac{2\pi}{K}$

d'amplitude H et de phase ω₀ et une solution périodique correspondant à la déformation suivante :

L'arc circulaire AB de centre O devient A₁ B₁ arc circulaire de même longueur et de même centre que le précédent.

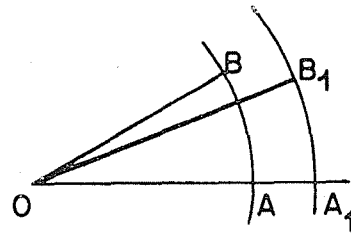


FIGURE 12

Flambage d'un Cercle entier

La continuité impose pour ω quelconque :

$$\begin{aligned} n(\omega) &= n(\omega + 2\pi) \\ n'(\omega) &= n'(\omega + 2\pi) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos (K\omega - \omega_0) &= \cos [K(\omega + 2\pi) - \omega_0] \\ \sin (K\omega - \omega_0) &= \sin [K(\omega + 2\pi) - \omega_0] \end{aligned}$$

d'où l'on tire K = entier positif.

D'autre part, t(ω) = t(ω + 2π)

entraîne : $\frac{K^2 - 1}{K^2} h = 0$ d'où h = 0 si K ≠ 1

et : t'(ω) = t'(ω + 2π) est vérifié.

En choisissant l'origine de façon que ω₀ = 0, la solution générale pour un cercle entier sera :

$$\begin{aligned} n &= H \cos K\omega \\ t &= -\frac{H}{K} \sin K\omega \end{aligned} \quad (14)$$

K = 1 p = 0 donne un déplacement sans déformation qui ne nous intéresse pas.

K = 2 p = $\frac{3EI}{R^3}$ C'est la plus faible valeur de p produisant le flambage.

$$\begin{aligned} n &= H \cos 2\omega \\ t &= -\frac{H}{2} \sin 2\omega \end{aligned}$$

L'anneau prend la forme ci-contre.

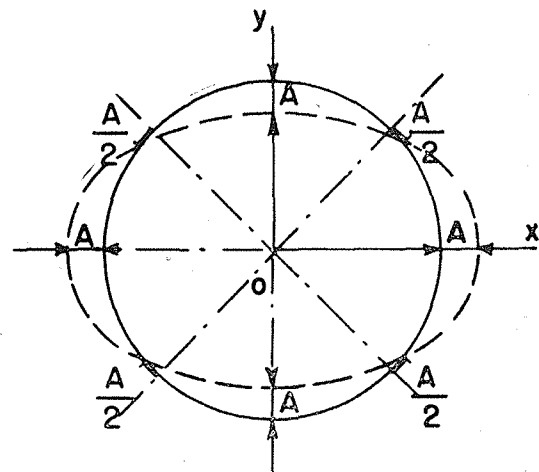


FIGURE 13

Les déplacements tangentiels maxima sont moitié des déplacements normaux maxima et se produisent à 45° de ceux-ci.

$$K = 3 \quad p = \frac{8 EI}{R^3}$$

$$n = H \cos 3 \omega$$

$$t = - \frac{H}{3} \sin 3 \omega$$

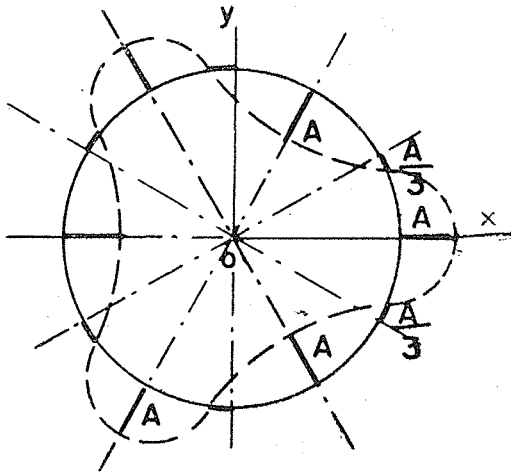


FIGURE 14

Les déplacements tangentiels maxima ne sont plus que $\frac{1}{3}$ des déplacements normaux.

$K = 4 \quad p = \frac{15 EI}{R^3}$ et ainsi de suite. Les formes de flambage sont faciles à dessiner.

REMARQUE

Pour un anneau complètement libre, la seule forme de flambage possible est celle correspondant à $K = 2$, car c'est celle qui se produit la première. Pour obtenir les formes de flambage correspondant à $K < 2$ il faut imposer à l'anneau certaines liaisons extérieures.

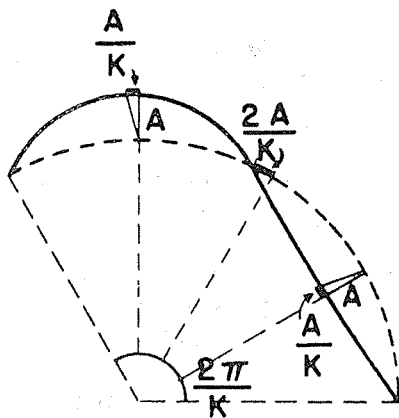


FIGURE 15

ARC d'ouverture $2 \omega_1$ articulé à ses deux extrémités.

Le cercle de flexion passe par les deux extrémités et a le même centre que l'arc dans sa position initiale. D'où $h = 0$.

En portant cette valeur dans 12 bis et en faisant $n (\pm \omega_1) = t (\pm \omega_1) = 0$, on trouve facilement :

$$K = \frac{m \pi}{\omega_1} \text{ avec } m \text{ entier.}$$

La plus faible valeur de p est pour $m = 1$

$$p = \left(\frac{\pi^2}{\omega_1^2} - 1 \right) \frac{EI}{K^3} \quad (15)$$

La déformée est représentée figure 15.

REMARQUE

Quand $\omega_1 \rightarrow \pi$ la pression critique $p \rightarrow 0$. Il semble donc qu'à la limite une pression infiniment faible pourrait faire flamber un cercle complet fixé en un seul point A avec articulation, ce qui est faux ainsi qu'on le verra au paragraphe suivant.

Pour expliquer ce paradoxe, il faut considérer la forme de flambage pour ω_1 voisin de π (voir fig. 16). A la limite le flambage proprement dit, s'évanouit et fait place à un déplacement pur.

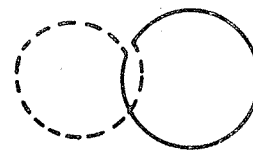


FIGURE 16

CERCLE complet avec une articulation

Dans les équations 12 bis, nous faisons $B = 0$, en prenant ox comme axe de symétrie. Nous devons avoir par ailleurs :

$$t (\pm \pi) = 0$$

$$n (\pm \pi) = h$$

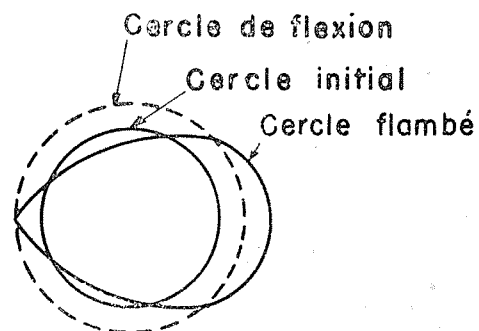


FIGURE 17

Le calcul conduit sans peine à l'équation en K

$$tg K \pi = K \pi (1 - K^2)$$

Cette équation est résolue graphiquement fig. 18. On a tracé les courbes $tg K \pi$ et $K \pi (1 - K^2)$. Leurs intersections donnent les différentes valeurs de K.

Ecartons la solution $K = 1$ qui correspond à un déplacement pur. La plus petite valeur de K est 1,547, d'où :

$$p = 1,4 \frac{EI}{R^3}$$

au lieu de $3 \frac{EI}{R^3}$

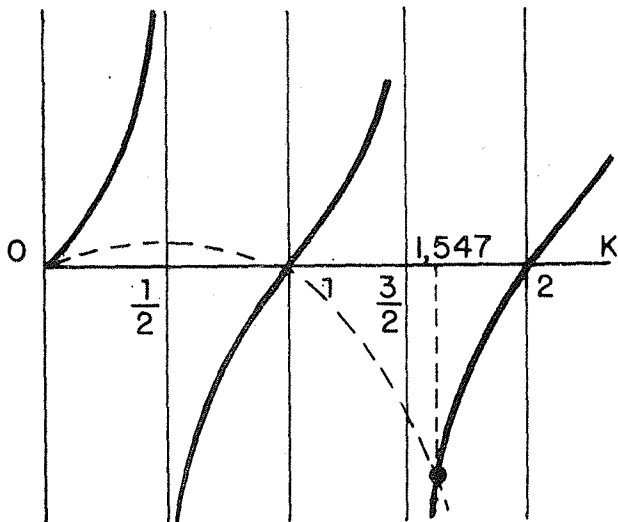


FIGURE 18

Ainsi, du fait de l'articulation, la pression critique est à peu près divisée par 2.

CERCLE complet avec deux articulations diamétralement opposées

On a $n (\pm \frac{\pi}{2}) = h$

$t (\pm \frac{\pi}{2}) = 0$

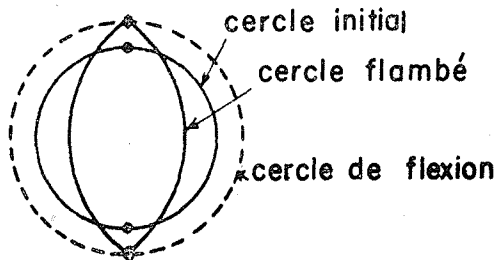


FIGURE 19

Le calcul conduit à l'équation suivante :

$$tg K \frac{\pi}{2} = K \frac{\pi}{2} (1 - K^2)$$

dont la solution graphique est :

$K = 1,34$

$p = 0,796 \frac{R^3}{EI}$

(au lieu de $\frac{3 R^3}{EI}$ sans articulation).

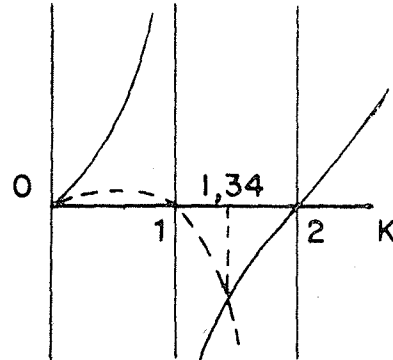


FIGURE 20

La pression critique est à peu près divisée par 4 du fait des deux articulations.

ARC d'ouverture $2 \omega_1$ encastré à ses deux extrémités

Nous partons des équations 12 et nous y faisons :

$n (\pm \omega_1) = 0$

$n' (\pm \omega_1) = 0$

$t (\pm \omega_1) = 0$

Le calcul conduit à l'équation caractéristique :

$$tg K \omega_1 = K tg \omega_1$$

En posant $K \omega_1 = K'$ la condition ci-dessus devient :

$$\frac{tg K'}{K'} = \frac{tg \omega_1}{\omega_1}$$

Nous avons tracé sur la fig. 21, la courbe $\frac{tg x}{x}$ en fonction de x ; à l'aide de cette seule courbe, on peut trouver K en fonction de ω_1 .

Partant du point A correspondant à ω_1 , on obtient B puis le point C en rappelant B sur une horizontale, puis D qui correspond à K' .

On a : $K = \frac{K'}{\omega_1} = \frac{OD}{OA}$

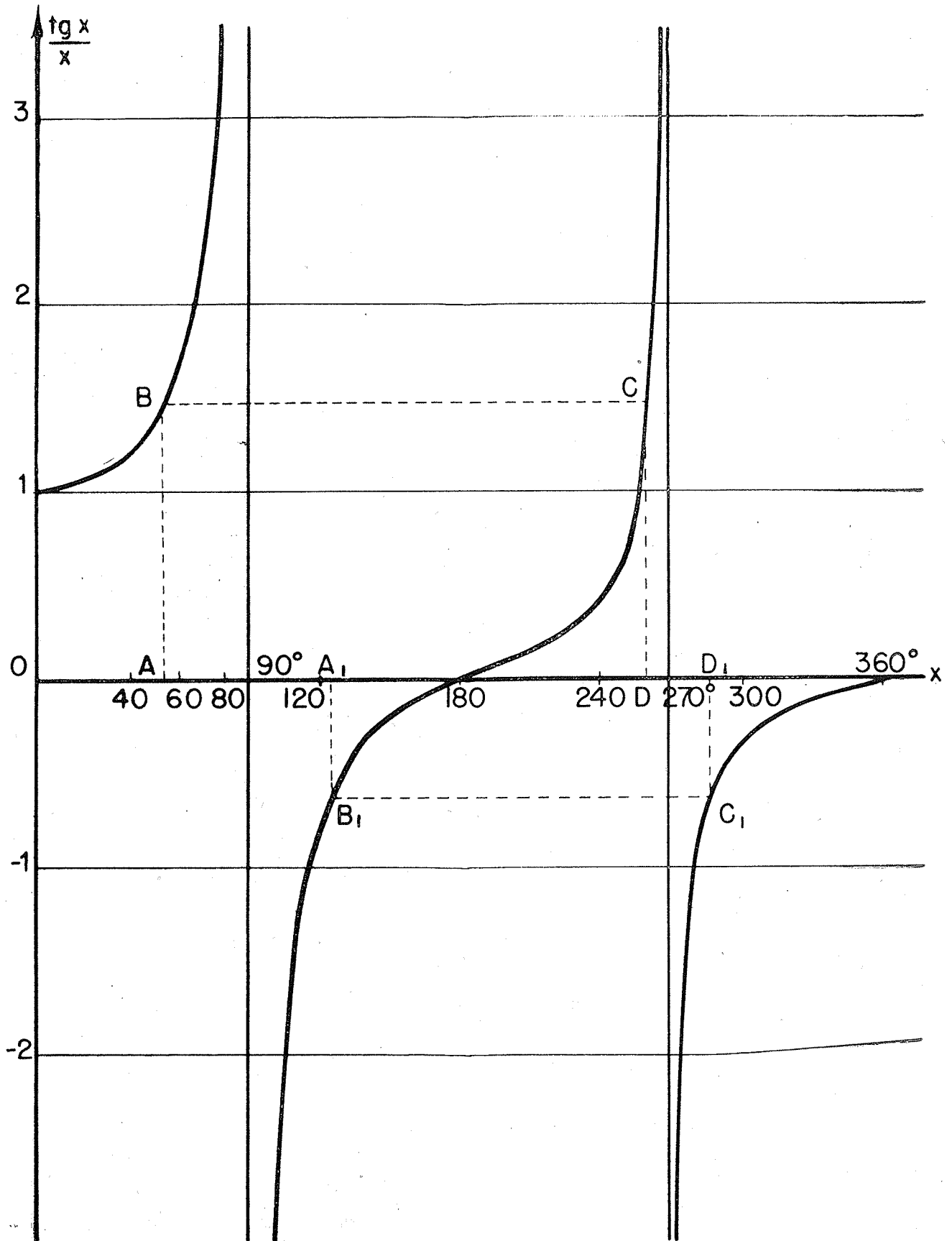


FIGURE 21

Il y a deux cas de figures correspondant à :

$$0 < \omega_1 < \frac{\pi}{2}$$

et

$$\frac{\pi}{2} < \omega_1 < \pi$$

Remarquons que, dans tous les cas, la pression critique est plus grande pour l'arc encastré que pour l'arc articulé. En effet, on a toujours :

$$K > \frac{\pi}{\omega_1}$$

puisque l'on a $K' > \pi$

CHAPITRE IV

Influence de l'ovalité de construction

Rappelons qu'il faut y inclure celle résultant du poids de la conduite et de l'eau.

Supposons que l'ovalité de construction ait même forme que l'ovalité de flambage. Elle sera donc définie par un paramètre unique, l'amplitude maximum y_0 .

Soumettons un tel tuyau à une pression extérieure p . La flèche initiale y_0 deviendra y .

La contrainte de flexion sera de la forme $k_1 (y - y_0)$ en raison de la loi de HOOKE. Mais elle doit être également de la forme $k_2 p y$ en raison du cercle de flexion :

$$k_1 (y - y_0) = k_2 p y$$

Le cas particulier $y_0 = 0$ nous donne $k_1 = k_2 p_c$

$p_c =$ pression critique théorique, d'où

$$\frac{y}{y_0} = \frac{p_c}{p_c - p}$$

Le moment par unité de longueur est :

$$M = p R y$$

Le module d'inertie par unité de longueur :

$$\frac{I}{v} = \frac{e^2}{6}$$

En remplaçant y par $y_0 \frac{p_c}{p_c - p}$

p_c par $\frac{3 EI}{R^3}$ (première pression critique)

et I par $\frac{e^3}{12}$

nous obtenons pour la contrainte de flexion :

$$\frac{\frac{3}{2} E.p. \frac{e}{R} \cdot \frac{y_0}{R}}{\frac{E}{4} \left(\frac{e}{R}\right)^3 - p}$$

et en rajoutant la contrainte de compression, nous obtenons la contrainte totale :

$$\sigma = p \frac{R}{e} + \frac{\frac{3}{2} E.p. \frac{e}{R} \cdot \frac{y_0}{R}}{\frac{E}{4} \left(\frac{e}{R}\right)^3 - p} \tag{18}$$

Si nous considérons p et E comme donnés, l'équation 18 ne contient que 3 inconnues, la contrainte σ , l'ovalité $\frac{y_0}{R}$ et l'épaisseur rela-

tive $\frac{e}{R}$. La relation est du premier degré en σ

et $\frac{y_0}{R}$. Nous avons donc intérêt à prendre ces

grandeurs comme coordonnées et à tracer sur ce fond les courbes $\frac{e}{R} = Cte$ ce qui nous

donne un abaque composé de droites, fig. 22.

Mais nous voudrions que le même abaque serve pour toutes les pressions p et toutes les valeurs de E . C'est pourquoi nous modifions comme suit la forme de la formule 18.

Prenons comme référence la pression atmosphérique $p_0 = 1 \frac{K}{cm^2}$ et le module d'élasticité apparent d'un tuyau infini en acier :

$$E_0 = \frac{20.000}{1 - \eta^2} = 22.000$$

Posons $p = \lambda p_0$

$$E = \mu E_0$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{\mu^{1/3} \lambda^{2/3}}$$

$$\frac{e_1}{R} = \frac{e}{R} \frac{\mu^{1/3}}{\lambda^{1/3}}$$

$$\frac{y_1}{R} = \frac{y_0}{R} \frac{\mu^{1/3}}{\lambda^{1/3}}$$

La formule 18 peut s'écrire :

$$\sigma_1 = p_0 \frac{R}{e_1} + \frac{\frac{3}{2} E_0 p_0 \cdot \frac{e_1}{R} \cdot \frac{y_1}{R}}{\frac{E_0}{4} \left(\frac{e_1}{R}\right)^3 - p_0} \tag{19}$$

Remarquons que l'ensemble des droites $\frac{e_1}{R} = Cte$ possède une limite inférieure

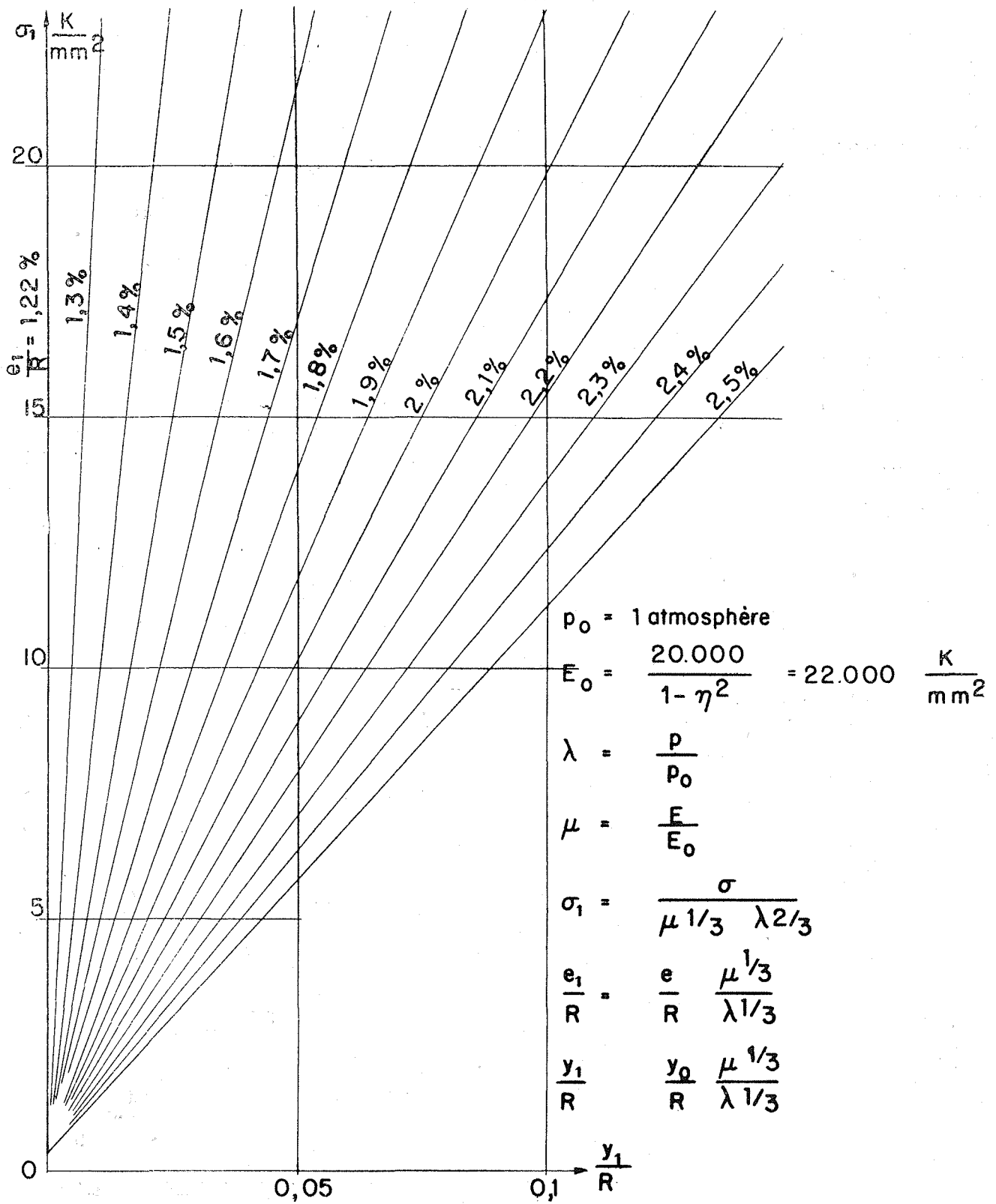


FIGURE 22

$$\frac{e_1}{R} = 0,0122 \text{ qui correspond à la formule}$$

d'ALLÉVI (ovalité nulle). Pour cette valeur, la droite est verticale, c'est-à-dire la contrainte indéterminée. On remarque également sur l'abaque que la contrainte de compression pure est toujours faible et négligeable par rapport à la contrainte totale.

INFLUENCE DE LA FORME DE L'OVALITE

Nous avons supposé que l'ovalité de construction avait même forme que l'ovalité de flambage. En réalité, cela ne sera pas forcément. Nous admettons, néanmoins, que l'influence de l'ovalité est suffisamment caractérisée par l'écart relatif des diamètres extrêmes. D'ailleurs, comme l'ovalité de construction est connue d'une façon aléatoire, on est obligé de l'évaluer par excès avec une certaine marge et du même coup, on couvre la petite erreur provenant de la forme de l'ovalité.

Exemple 1

Tuyau infini en acier $\mu = 1$

Pression extérieure 8 K/cm²

$$\lambda = 8 \quad \lambda^{1,3} = 2 \quad \lambda^{2,3} = 4$$

Supposons une ovalité de 4 %

$$\frac{y_0}{R} \frac{1}{\lambda^{1,3}} = \frac{0,04}{2} = 0,02$$

Nous voulons faire travailler à 16 K/mm²

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{\lambda^{2,3}} = \frac{16}{4} = 4$$

L'abaque montre que le point de coordonnées

$$\frac{y_1}{R} = 0,02 \quad \sigma_1 = 4$$

correspond à :

$$\frac{e_1}{R} = 2,07 \%$$

$$\frac{e}{R} = 2,07 \times \lambda^{1,3} = 4,14 \%$$

Exemple 2

Tuyau infini en fonte résistant au vide

$$\lambda = 1$$

$$\mu = \frac{10.000}{20.000} \left(\frac{1 - 0,3^2}{1 - 0,25^2} \right) = 0,485$$

$$\mu^{1,3} = 0,7865$$

Supposons une ovalité de 4 %.

$$\frac{y_1}{R} = 0,04 \times 0,7865 = 0,03146$$

Nous voulons faire travailler à 6 K/mm²

$$\frac{\sigma}{\mu^{1,3}} = \frac{6}{0,7865} = 7,63$$

Le point de coordonnées 3,146 et 7,63

correspond à $\frac{e_1}{R} = 1,9 \%$

$$\frac{e}{R} = \frac{1,9}{0,7865} = 2,41 \%$$

CHAPITRE V

Conduites avec renforcements

CALCUL DES RENFORCEMENTS

Supposons que la conduite possède des renforcements espacés de la longueur l et que l'on puisse négliger la raideur totale de la paroi par rapport à celle des renforcements.

Dans ces conditions, on peut calculer la paroi comme une enveloppe souple transmettant les efforts aux renforcements. Ces derniers sont seuls à intervenir dans le flambage par leur moment d'inertie I , leur module d'inertie $\frac{I}{v}$, leur section S , leur ovalité de construction $\frac{y_0}{R}$:

Nous avons :

$$y = y_0 \frac{p_c}{p_c - p}$$

$$p_c = \frac{3 EI}{l R^3}$$

$$M = p R l y$$

$$\sigma = \frac{M v}{I}$$

d'où l'on tire la contrainte de flexion :

$$\sigma = \frac{3 p y_0 v E}{\frac{3 EI}{l R} - p R^2} \quad (22)$$

Nous avons déjà fait remarquer que la contrainte de compression pure était négligeable. Nous pouvons donc utiliser la formule 22 pour vérifier une conduite donnée, puisque tout est connu dans le second membre.

S'il s'agit d'un projet à établir σ est connu et les inconnues sont $\frac{I}{l}$ et v . On les déter-

mine par tâtonnements. Pour faciliter le calcul, on peut s'aider du résultat suivant que nous énonçons simplement mais qui est facile à démontrer : supposons que les renforcements soient de section rectangulaire de largeur b et de hauteur h . Nous avons la relation suivante :

$$\frac{\frac{E}{4} \frac{b}{l} \frac{h^3}{R^3} - p}{h} = \frac{\frac{E}{4} \frac{e^3}{R^3} - p}{e}$$

où e est l'épaisseur nécessaire pour une conduite homogène donc connue par l'abaque. A l'aide de la formule 23, on calcule l'une des quantités $\frac{b}{l}$ ou $\frac{h}{R}$ quand on connaît l'autre.

On se trouve toujours entre les deux cas extrêmes suivants :

$$1^\circ) \text{ ovalité nulle } \frac{E}{4} \frac{e^3}{R^3} = p$$

$$\frac{b}{l} = \frac{e^3}{h^3}$$

2°) ovalité grande

$$\frac{E}{4} \frac{e^3}{R^3} \text{ grand par rapport à } p$$

$$\frac{b}{l} = \frac{e^2}{h^2}$$

On aura donc toujours

$$\left(\frac{l}{b}\right)^{1/3} < \frac{h}{e} < \left(\frac{l}{b}\right)^{1/2} \tag{23}$$

ce qui permet de dégrossir immédiatement la solution.

CALCUL DE LA PAROI

Il y a deux choses à vérifier : 1°) la contrainte dans la transmission des efforts, contrainte qui dépend de l'ovalité ; 2°) la stabilité de l'équilibre.

1°) On se donne une certaine ovalité de construction en supposant que la paroi a la forme d'un cylindre de section ovale, tenu à intervalles réguliers par des cloisons transversales rigides. Entre deux renforcements, nous calculons la paroi comme une membrane souple. Pour simplifier, nous admettons, comme jusqu'ici, que l'ovalité a la forme de l'onde de flambage (pour $K = 2$). Dans ces conditions, le calcul ne présente pas de difficultés. Nous en donnons simplement le résultat ci-dessous.

La contrainte normale maximum dans le sens longitudinal est, dans le cas d'une seule travée :

$$\sigma = \pm \frac{3 p l^2 y_0}{2 R^2 e} \text{ au milieu de la travée } \tag{24}$$

et, dans le cas d'une infinité de travées :

$$\sigma = \pm \frac{p l^2 y_0}{R^2 e} \text{ au milieu de la travée}$$

et $\sigma = \pm \frac{1}{2} \frac{p l^2 y_0}{R^2 e}$ au droit des renforcements.

La contrainte de glissement maximum est donnée dans tous les cas, par :

$$\tau = \pm \frac{3 p l y_0}{e R} \text{ au droit des renforcements. } \tag{25}$$

Les contraintes σ et τ n'ont pas à être combinées, car elles se produisent dans les plans axiaux différents.

2°) Une autre méthode de calcul consiste à considérer une conduite parfaitement cylindrique avec deux sections droites rigides et à chercher s'il existe, pour une certaine pression une forme d'équilibre autre que la forme initiale, ce qui est la méthode classique pour un problème de flambage.

Si la surface était rigoureusement inextensible, nous savons d'après la théorie des surfaces applicables qu'un cylindre fixé à ses deux extrémités est indéformable, il n'y aurait donc pas de flambage possible. Mais, physiquement, le problème ne se pose pas ainsi. Il faut considérer l'ordre de grandeur de la déformation.

Si pour une variation du rayon de courbure, qui soit un infiniment petit du premier ordre, il se produit une variation des longueurs qui soit un infiniment petit du second ordre, cette déformation pourra avoir lieu.

C'est précisément ce qui se produit pour un cylindre circulaire : une ovalisation du premier ordre des sections droites à longueur constante entraîne des variations de longueur des génératrices qui ne sont que du 2° ordre. La possibilité d'un flambage avec ovalisation variable d'une section à l'autre n'est donc pas exclue a priori.

D'ailleurs l'expérience montre que de tels phénomènes se produisent si les renforcements sont suffisamment écartés.

La théorie mathématique du flambage d'un tuyau circulaire tenu à ses deux extrémités a été donnée par LOVE dans « The mathematical theory of Elasticity ». La formule 32 de la page 574 traduite avec nos notations s'écrit :

$$(26) \quad p_e = \frac{E e}{R} \left[\frac{(K^2 - 1) e^2}{12 (1 - \eta^2) R^2} + \frac{m^4 R^4}{K^4 (K^2 - 1)} \right] \text{ avec}$$

$$m = \frac{\pi}{l}$$

On peut à l'aide de cette formule déterminer l'écartement maximum à donner aux cercles raidisseurs.

En cherchant la condition pour que la conduite flambe selon K lobes, ou plus on trouve

$$m^2 R^2 > \frac{e^2 (K-2)(K-1)^2 K^2 (K+1)}{12(1-\eta^2)R^2 (3K^2 - 3K + 2)} \quad (27)$$

et en portant cette valeur dans 26 il vient

$$P_c > \frac{E e^3 (K-1) 4 K (K^2 - K + 1) e^3}{12(1-\eta^2) R^3 (3K^2 - 3K + 2) R^3} \quad (28)$$

A l'aide de 28 on peut calculer K en choisissant l'entier immédiatement supérieur. En portant K dans 27, on détermine m d'où l .

Pour faciliter le calcul, nous donnons la liste des valeurs de 2 à 10 des expressions :

$$A_k = \sqrt{\frac{(K-2)(K-1)^2 K^2 (K+1)}{12(1-\eta^2)(3K^2 - 3K + 2)}}$$

$$B_k = \frac{(K-1) 4 K (K^2 - K + 1)}{3 K^2 - 3 K + 2}$$

$$A_2 = 0 \quad B_2 = 3$$

$$A_3 = 3,13 \quad B_3 = \frac{42}{5} = 8,4$$

$$A_4 = 6,7 \quad B_4 = \frac{312}{19} = 16,41$$

$$A_5 = 11,44 \quad B_5 = \frac{840}{31} = 27,1$$

$$A_6 = 17,38 \quad B_6 = \frac{930}{23} = 40,43$$

$$A_7 = 24,48 \quad B_7 = \frac{903}{16} = 56,5$$

$$A_8 = 32,8 \quad B_8 = \frac{6384}{85} = 75,2$$

$$A_9 = 42,25 \quad B_9 = \frac{10.512}{109} = 96,44$$

$$A_{10} = 53 \quad B_{10} = \frac{4.095}{34} = 120,44$$

Exemple : conduite en acier calculée au vide

$$D = 1 \text{ m.}$$

$$e = 5 \text{ m/m.}$$

$$\frac{e}{R} = \frac{1}{100} \quad \text{Donc, la conduite a besoin de renforcements.}$$

La formule 28 donne

$$0,01 = \frac{20.000}{12 \times 0,91} \frac{1}{(100)^3} B_k$$

$$B_k = 5,46$$

Nous prenons donc $B_k = 8,4$

$$K = 3$$

$$A_3 = 3,13$$

$$m R = \sqrt{\frac{e}{R}} 3,13 = 0,313$$

$$l = \frac{\pi R}{0,313} = 5 \text{ m.}$$

Nous sommes donc très larges en prenant des renforcements distants de 2 m.

Admettons une ovalité de 4 %

$$y_0 = \frac{4}{100} \times 500 = 20 \text{ m/m.}$$

$$y_0 = \frac{4}{100} \times 500 = 20 \text{ m/m}$$

La contrainte de cisaillement est donnée par la formule 25.

$$\tau = \frac{3}{100} \frac{2}{0,5} \frac{20}{5} = 0,5 \text{ K/mm}^2$$

et la contrainte normale par la formule 24

$$\sigma = \frac{1}{100} \left(\frac{2}{0,5} \right)^2 \frac{20}{5} = 0,64 \text{ K/mm}^2$$

Toutes ces contraintes sont très faibles.

Calculons maintenant les brides. Supposons leur une largeur $b = 25$ mm. Prenons par exemple un taux de contrainte de 12 K/mm².

L'abaque fig. 22 donne pour

$$\frac{x_0}{R} = \frac{4}{100} \quad \text{et } \sigma = 12$$

$$e = 8,8 \text{ mm}$$

$$\frac{l}{b} = \frac{2.000}{25} = 80$$

d'après la formule 23

$$38 < h < 79$$

On peut donc essayer une bride de 25×65 et vérifier la contrainte exacte par la formule 22.