

MÉTHODE GRAPHIQUE

POUR L'ÉTUDE DES OSCILLATIONS DANS UNE CHAMBRE D'ÉQUILIBRE DONT LE CANAL D'AMÉNÉE COLLECTE DES APPORTS DE DÉBIT PAR DES PUIXS DE SECTION NÉGLIGEABLE

Application à l'Usine d'Olette de la S. N. C. F.

par L. ESCANDE

Ingénieur I. E. T.

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse

Directeur de l'Institut Electrotechnique et de l'Institut de Mécanique des Fluides

SECONDE PARTIE

Extension du problème précédent. — Etude des oscillations dans un système comprenant un canal d'amenée aboutissant à une chambre d'équilibre à étranglement, dans le cas où des débits d'apport interviennent, soit dans la chambre d'équilibre, soit par divers puits de section négligeable sur le parcours du canal d'amenée.

Considérons un canal d'amenée en charge (fig. 1) aboutissant à une chambre d'équilibre, que nous supposerons, pour plus de généralité, munie d'un étranglement inférieur.

Ce canal collecte, en cours de route, $n-1$ débits d'apport constants q_2, \dots, q_n en des points qui le subdivisent en n tronçons de longueurs respectives L_1, L_2, \dots, L_n , de section f_1, f_2, \dots, f_n ; la chambre d'équilibre reçoit, elle-même un débit d'apport q_1 .

Si tous ces apports n'intervenaient pas, en cours de route, et si le débit demeurerait donc constant, à chaque instant, sur toute la longueur du canal d'amenée et égal, en régime permanent, au débit $Q = F_1 U$ absorbé par les turbines (F_1 désigne la section horizontale supposée constante de la chambre d'équilibre), tout se passerait, au point de vue des oscillations dans la chambre d'équilibre, comme si le canal d'amenée avait une longueur L et une section constante F telles que l'on ait :

$$(1) \quad \frac{L}{f} = \frac{L_2}{f_1} + \dots + \frac{L_n}{f_n}$$

En particulier, en l'absence d'étranglement et de pertes de charge, on aurait une période d'oscillations :

$$(2) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L F_1}{g f}}$$

et, dans le cas d'une fermeture complète instantanée du débit $Q_0 = F_1 U_0$ appelé par les turbines, une amplitude :

$$(3) \quad z_* = U_0 \frac{T}{2\pi} = U_0 \sqrt{\frac{L F_1}{g f}}$$

Nous allons voir comment on peut étudier très simplement le canal avec apports de débit considéré, lorsqu'on suppose les puits de captation de section assez petite pour que l'on puisse négliger les volumes engendrés par les oscillations du plan d'eau à l'intérieur de ces puits, dans les conditions de continuité.

Nous désignerons par Z_1, \dots, Z_n les cotes du plan d'eau, dans ces divers puits, à l'instant t .

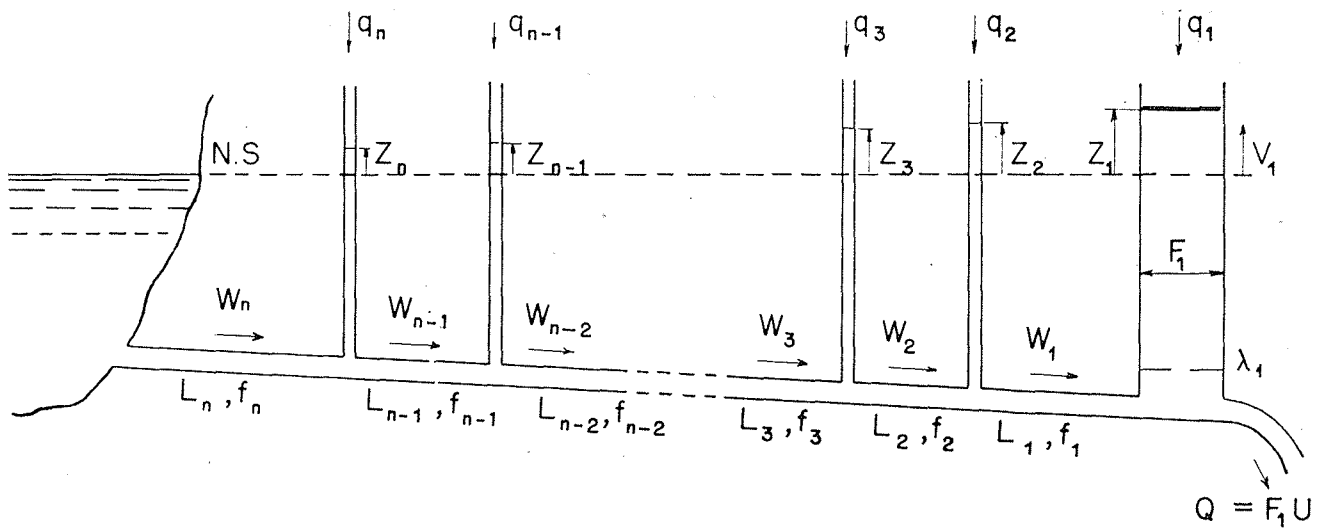


Fig. 1. — CANAL D'AMENÉE COLLECTANT DES DÉBITS D'APPORT SUR SON PARCOURS

I

Etude d'une fermeture complète instantanée de débit maximum Q des turbines, en négligeant les pertes de charge et la présence de l'étranglement.

On a les relations :

$$\begin{aligned}
 f_1 W_1 &= F_1 V_1 - q_1 \\
 f_2 W_2 &= f_1 W_1 - q_2 = F_1 V_1 - (q_1 + q_2) \\
 f_3 W_3 &= f_2 W_2 - q_3 = F_1 V_1 - (q_1 + q_2 + q_3) \\
 &\dots \\
 f_n W_n &= f_{n-1} W_{n-1} - q_n = F_1 V_1 - (q_1 + \dots + q_n)
 \end{aligned}$$

d'où :

$$F_1 \frac{dV_1}{dt} = F_1 \frac{d^2 Z_1}{dt^2} = f_1 \frac{dW_1}{dt} = f_2 \frac{dW_2}{dt} = \dots = f_n \frac{dW_n}{dt}$$

et

$$\frac{L_1}{g} \frac{dW_1}{dt} + Z_1 - Z_2 = 0$$

$$\frac{L_2}{g} \frac{dW_2}{dt} + Z_2 - Z_3 = 0$$

$$\frac{L_n}{g} \frac{dW_n}{dt} + Z_n = 0$$

ou, par addition :

$$\frac{1}{g} \left[L_1 \frac{dW_1}{dt} + \dots + L_n \frac{dW_n}{dt} \right] + Z_1 = 0$$

soit compte tenu du fait que $V_1 = \frac{dZ_1}{dt}$:

$$V_1 = \frac{dZ_1}{dt}$$

$$\frac{F_1}{g} \left[\frac{L_1}{f_1} + \dots + \frac{L_n}{f_n} \right] \frac{d^2 Z_1}{dt^2} + Z_1 = 0$$

$$\text{ou } \frac{L F_1}{g f} \frac{d^2 Z_1}{dt^2} + Z_1 = 0$$

avec les conditions initiales pour :

$$t = 0 \quad Z_1 = 0, \quad V_1 = \frac{dZ_1}{dt} = \frac{Q_0}{F_1} = U_0$$

ce qui donne :

$$Z = Z_* \sin \frac{2\pi t}{T}$$

Les oscillations sont rigoureusement les mêmes que si le débit total des turbines Q_0 circulait sur toute la longueur du canal, au lieu de résulter en partie de tous les débits d'apports collectés en cours de route.

On en déduit aisément les variations de

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$$

en remarquant que :

$$Z_n = -\frac{L_n}{g} \frac{dW_n}{dt} = -\frac{L_n F_1}{g f_n} \frac{dV_1}{dt} = -\frac{L_n}{f_n} \frac{L F_1}{g f} \frac{d^2 Z_1}{dt^2}$$

$$\text{ou } Z_n = a_n Z_1, \quad \text{avec } a_n = \frac{\frac{L_n}{f_n}}{\frac{L}{f}}$$

$$Z_{n-1} = -\left[\frac{L_n}{g} \frac{dW_n}{dt} + \frac{L_{n-1}}{g} \frac{dW_{n-1}}{dt} \right] = -\left[\frac{L_n F_1}{g f_n} + \frac{L_{n-1} F_1}{g f_{n-1}} \right] \frac{dV_1}{dt}$$

$$Z_{n-1} = -\frac{\frac{L_n}{f_n} + \frac{L_{n-1}}{f_{n-1}}}{\frac{L}{f}} \frac{L F_1}{g f} \frac{d^2 Z_1}{dt^2}$$

$$\text{ou } Z_{n-1} = a_{n-1} Z_1 \quad \text{avec } a_{n-1} = \frac{\frac{L_n}{f_n} + \frac{L_{n-1}}{f_{n-1}}}{\frac{L}{f}}$$

$$Z_i = a_i Z_1 \quad \text{avec } a_i = \frac{\frac{L_n}{f_n} + \dots + \frac{L_i}{f_i}}{\frac{L}{f}}$$

$$Z_2 = a_2 Z_1 \quad \text{avec } a_2 = \frac{\frac{L_p}{f_p} + \dots + \frac{L_2}{f_2}}{\frac{L}{f}}$$

Les hauteurs Z_n, \dots, Z_2 sont, à chaque instant, proportionnelles aux hauteurs z_1 .

On voit que l'on a :

$$\frac{Z_i}{Z_1} = \alpha_i = \frac{\frac{L_n}{f_n} + \dots + \frac{L_i}{f_i}}{\frac{L_n}{f_n} + \dots + \frac{L_1}{f_1}}$$

α_i étant le quotient du $(\frac{L}{f})$ du canal équivalent à la portion de canal située en amont du puits considéré, au $(\frac{L}{f})$ du canal entier.

Il résulte de cette remarque que, dans le cas d'un canal à section constante, la répartition des pressions serait linéaire à chaque instant, tout le long du canal.

II

Equations générales des oscillations, avec emploi de grandeurs relatives, dans le cas d'une manœuvre quelconque, en tenant compte des pertes de charge et de la présence de l'étranglement.

— Soit $P_{o1}, P_{o2}, \dots, P_{on}, R$, les pertes de charge qu'il y aurait dans les divers tronçons du canal d'amenée et dans l'étranglement s'ils étaient traversés par le débit maximum Q absorbé par les turbines.

— Soit P_1, P_2, \dots, P_n, R , les pertes de charge effectives dans les divers tronçons du canal et dans l'étranglement, à l'instant t .

— Posons :

$$W_{o1} = \frac{Q_c}{f_1}, \quad W_{o2} = \frac{Q_o}{f_2}, \quad \dots, \quad W_{on} = \frac{Q_o}{f_n}$$

$$U_o = \frac{q_1}{F_1}, \quad W_{o2} = \frac{q_2}{f_2}, \quad W_{o3} = \frac{q_2+q_3}{f_3}, \quad \dots, \quad W_{on} = \frac{q_2+\dots+q_n}{f_n}$$

En appelant $Q = F_1 U$ le débit absorbé par les turbines à l'instant t , et en posant, d'autre part, $q_1 = F_1 U_o$, on a :

$$f_1 W_1 = F_1 V_1 + Q - q_1 = F_1 (V_1 + U - U_o)$$

$$f_2 W_2 = f_1 W_1 - q_2 = F_1 (V_1 + U - U_o) - q_2,$$

$$f_3 W_3 = f_2 W_2 - q_3 = F_1 (V_1 + U - U_o) - (q_2 + q_3),$$

$$\dots$$

$$f_n W_n = f_{n-1} W_{n-1} - q_n = F_1 (V_1 + U - U_o) - (q_2 + \dots + q_n)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$(5) \quad F_1 (V_1 + U - U_o) = f_1 W_1 = f_1 (W_2 + W_{o2}) = \dots = f_n (W_n + W_{on})$$

Les conditions de force vive donnent, par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{g} \frac{dW_1}{dt} + Z_1 - Z_2 + \epsilon_1 P_1 + \epsilon' R &= 0 \\ \frac{L_2}{g} \frac{dW_2}{dt} + Z_2 - Z_3 + \epsilon_2 P_2 &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{L_{n-1}}{g} \frac{dW_{n-1}}{dt} + Z_{n-1} - Z_n + \epsilon_{n-1} P_{n-1} &= 0 \\ \frac{L_n}{g} \frac{dW_n}{dt} + Z_n + \epsilon_n P_n &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_n \epsilon'$ ayant pour valeur absolue l'unité et pour signes respectifs, ceux de W_1, W_2, \dots, W_n et $V_1 - U_a$; en effet, le débit qui traverse l'étranglement de bas en haut est égal   :

$$F_1 V_1 - q_1 = F_1 (V_1 - U_0)$$

et la perte de charge $\epsilon' R$ est bien de la forme :

$$\epsilon' R = \epsilon' \lambda_1 F_1^2 (V_1 - U_0)^2$$

ϵ' ayant le signe de $V_1 - U_a$.

En ajoutant membre   membre les relations (6), on obtient :

$$\frac{1}{g} \left[L_1 \frac{dW_1}{dt} + \dots + L_n \frac{dW_n}{dt} \right] + Z_1 + \epsilon_1 P_1 + \dots + \epsilon_n P_n + \epsilon' R = 0$$

or, les relations (5) donnent :

$$\frac{dW_1}{dt} = \frac{F_1}{f_1} \left(\frac{dV_1}{dt} + \frac{dU}{dt} \right), \dots, \frac{dW_n}{dt} = \frac{F_n}{f_n} \left(\frac{dV_1}{dt} + \frac{dU}{dt} \right)$$

on a donc :

$$\frac{F_1}{g} \left(\frac{L_1}{f_1} + \dots + \frac{L_n}{f_n} \right) \left(\frac{dV_1}{dt} + \frac{dU}{dt} \right) + Z_1 + \epsilon_1 P_1 + \dots + \epsilon_n P_n + \epsilon' R = 0$$

ou, compte tenu de (1) :

$$(6 \text{ bis}) \quad \frac{LF_1}{gf} \left(\frac{dV_1}{dt} + \frac{dU}{dt} \right) + Z_1 + \epsilon_1 P_1 + \dots + \epsilon_n P_n + \epsilon' R = 0$$

or, d'après (3) :

$$\begin{aligned} \frac{LF_1}{gf} &= \left(\frac{Z_*}{U_0} \right)^2 = \frac{Z_*}{U_0} \frac{T}{2\Pi} \\ \frac{dV_1}{dt} &= \frac{dV_1}{dZ_1} \frac{dZ_1}{dt} = V_1 \frac{dV_1}{dZ_1} \\ \left(\frac{Z_*}{U_0} \right)^2 V_1 \frac{dV_1}{dZ_1} + \frac{Z_*}{U_0} \frac{T}{2\Pi} \frac{dU}{dt} + Z_1 + \epsilon_1 P_1 + \dots + \epsilon_n P_n + \epsilon' R &= 0 \end{aligned}$$

ou en divisant par Z_* :

$$\left(\frac{V_1}{U_0} \right) \frac{d \left(\frac{V_1}{U_0} \right)}{d \left(\frac{Z_1}{Z_*} \right)} + \frac{1}{2\Pi} \frac{d \left(\frac{U}{U_0} \right)}{d \left(\frac{t}{T} \right)} + \frac{Z_1}{Z_*} + \frac{\epsilon_1 P_1}{Z_*} + \dots + \frac{\epsilon_n P_n}{Z_*} + \frac{\epsilon' R}{Z_*} = 0$$

Introduisons les grandeurs relatives suivantes :

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{V_1}{U_0} \quad , \quad u = \frac{U}{U_0} \quad , \quad z_1 = \frac{Z_1}{Z_*} \quad , \quad t' = \frac{t}{T} \\
 p_1 &= \frac{P_1}{Z_*} \quad , \quad \dots \quad , \quad p_n = \frac{P_n}{Z_*} \quad , \quad r = \frac{R}{Z_*} \quad , \\
 w_1 &= \frac{W_1}{W_{01}} \quad , \quad w_2 = \frac{W_2}{W_{02}} \quad , \quad \dots \quad , \quad w_n = \frac{W_n}{W_{0n}} \quad , \\
 u_a &= \frac{U_a}{U_0} \quad , \quad w_{a2} = \frac{W_{a2}}{W_{02}} \quad , \quad \dots \quad , \quad w_{an} = \frac{W_{an}}{W_{0n}} \quad ,
 \end{aligned}$$

Divisons membre à membre les équations (5) par les suivantes :

$$F_1 U_0 = f_1 W_{01} = \dots = f_n W_{0n}$$

nous obtenons l'équation de continuité, entre grandeurs relatives :

$$(8) \quad v_1 + u - u_a = w_1 = w_2 + w_{a2} = \dots = w_n + w_{an}$$

Posons enfin :

$$(9) \quad p_{01} = \frac{P_{01}}{Z_*} \quad , \quad \dots \quad , \quad p_{0n} = \frac{P_{0n}}{Z_*} \quad , \quad r_0 = \frac{R_0}{Z_*}$$

Les pertes de charge étant proportionnelles au carré des vitesses, on a :

$$p_i = \frac{P_i}{Z_*} = \frac{P_{0i}}{Z_*} \frac{P_i}{P_{0i}} = p_{0i} \left(\frac{W_i}{W_{0i}} \right)^2 = p_{0i} w_{0i}^2$$

On a, de même, pour l'étranglement :

$$r = \frac{R}{Z_*} = \frac{R_0}{Z_*} \frac{R}{R_0} = r_0 \frac{F_1^2 (V_1 U_a)^2}{F_1^2 U_0^2} = r_0 (v_1 - u_a)^2$$

Retenons donc les expressions :

$$(10) \quad p_i = p_{0i} w_i^2 \quad , \quad \dots \quad , \quad p_n = p_{0n} w_n^2 \quad , \quad r = r_0 (v_1 - u_a)^2$$

Compte tenu des résultats précédents, l'équation des forces vives prend la forme suivante :

$$(11) \quad v_1 \frac{dv_1}{dz_1} + \frac{1}{2\Pi} \frac{du}{dt'} + z_1 + \epsilon_1 p_1 + \dots + \epsilon_n p_n + \epsilon' r = 0$$

ϵ_1 , \dots , ϵ_n , ϵ' ayant les signes de w_1 , \dots , w_n , $v_1 - u_a$

Finalement, les équations générales cherchées, entre grandeurs relatives, sont fournies par la relation (11) des forces vives, la condition de continuité (8) et les relations diverses (7), (9) et (10).

Remarque

Posons

$$z_2 = \frac{Z_2}{Z_*} \quad , \quad \dots \quad , \quad z_n = \frac{Z_n}{Z_*}$$

et cherchons à déterminer ces quantités :

On a, d'après (6) :

$$Z_n = - \left[\frac{L_n}{g} \frac{dW_n}{dt} + \epsilon_n P_n \right] = - \frac{L_n F_1}{g f_n} \left[\frac{dV_1}{dt} + \frac{dU}{dt} \right] - \epsilon_n P_n$$

$$Z_n = - \frac{\frac{L_n}{f_n}}{\frac{L}{f}} \frac{L F_1}{g f} \left(\frac{dV_1}{dt} + \frac{dU}{dt} \right) - \epsilon_n P_n$$

et donc d'après (4) et (6 bis) :

$$Z_n = + a_n \left[Z_1 + \epsilon_1 P_1 + \dots + \epsilon_n P_n + \epsilon' R \right] - \epsilon_n P_n$$

ou, entre grandeurs relatives :

$$z_n = a_n z_1 + \epsilon_1 p_1 + \dots + \epsilon_n p_n + \epsilon' r - \epsilon_n p_n$$

On a de même, en ajoutant membre à membre les deux dernières équations (6) :

$$\frac{L_n}{g} \frac{dW_n}{dt} + \frac{L_{n-1}}{g} \frac{dW_{n-1}}{dt} + Z_{n-1} + \epsilon_n P_n + \epsilon_{n-1} P_{n-1} = 0$$

avec :

$$\frac{L_n}{g} \frac{dW_n}{dt} + \frac{L_{n-1}}{g} \frac{dW_{n-1}}{dt} = \left[\frac{L_n F_1}{g f_n} + \frac{L_{n-1} F_1}{g f_{n-1}} \right] \left(\frac{dV_1}{dt} + \frac{dU}{dt} \right)$$

$$= \frac{\frac{L_n}{f_n} - \frac{L_{n-1}}{f_{n-1}}}{\frac{L}{f}} \frac{L F_1}{g f} \left[\frac{dV_1}{dt} + \frac{dU}{dt} \right]$$

$$= - a_{n-1} (Z_1 + \epsilon_1 P_1 + \dots + \epsilon_n P_n + \epsilon' R)$$

et donc : $z_{n-1} = a_{n-1} (z_1 + \epsilon_1 p_1 + \dots + \epsilon_n p_n + \epsilon' r) - (\epsilon_n p_n + \epsilon_{n-1} p_{n-1})$

$$z_{n-1} = a_{n-1} (z_1 + \epsilon_1 p_1 + \dots + \epsilon_n p_n + \epsilon' r) - (\epsilon_n p_n + \epsilon_{n-1} p_{n-1})$$

On obtiendrait, de même :

$$z_1 = a_1 (z_1 + \epsilon_1 p_1 + \dots + \epsilon_n p_n + \epsilon' r) - (\epsilon_n p_n + \dots + \epsilon_1 p_1)$$

$$z_2 = a_2 (z_1 + \epsilon_1 p_1 + \dots + \epsilon_n p_n + \epsilon' r) - (\epsilon_n p_n + \dots + \epsilon_2 p_2)$$

Nous appellerons (12) les relations fournissant les valeurs de :

$$z_2, \dots, z_n$$

III

Etude d'une fermeture complète instantanée du débit Q_0 en tenant compte des pertes de charge et de la présence de l'étranglement.

Nous nous limiterons à l'étude de la première montée.

Dès l'instant zéro, on a $u = 0$, $\frac{du}{dt} = 0$

de telle sorte que les relations (11) et (8) deviennent :

$$(13) \quad \frac{dv_1}{dz_1} = \frac{z_1 + \epsilon_1 p_1 + \dots - \epsilon_n p_n + \epsilon' r}{v_1}$$

$$(14) \quad v_1 u_0 = w_1 = w_2 + w_{a2} = \dots = w_n + w_{an}$$

Dans le cas d'un canal parcouru sur toute sa longueur par le débit Q_0 dans le régime permanent initial on aurait, durant toute la première montée :

$$(15) \quad \frac{dv_1}{dz_1} = - \frac{z_1 + p + \epsilon' r}{v_1}$$

représentant la perte de charge qui existerait, à l'instant t , dans le canal d'aménée, comptée positivement de l'amont vers l'aval. Or, dans le problème actuel, il est facile de voir que l'expression

$$\epsilon_1 p_1 + \dots + \epsilon_n p_n$$

représente précisément cette perte de charge totale que nous appellerons donc p .

A l'instant initial, le débit Q_0 primitivement absorbé par les turbines s'engouffre dans la chambre en donnant à la vitesse V_1 la valeur initiale $(V_1)_0 = \frac{Q_0}{F_1} = U_0$ et à v_1 la valeur initiale 1 ;

v_1 décroît ensuite de 1 à zéro durant toute la première montée du plan d'eau.

Préalablement à toute autre opération, on construira les courbes (fig. 2) donnant, en fonction de v_1 , pour v_1 décroissant de 1 à zéro, les pertes de charge.

$$\begin{aligned} \epsilon_2 p_2 &= p_{01} (v_1 - u_0)^2 && \text{avec le signe de } v_1 - u_0 \\ \epsilon_2 p_2 &= p_{02} (v_1 - u_0 - w_{02})^2 && \text{avec le signe de } v_1 - (u_0 + w_{02}) \\ \dots & \dots && \dots \\ \epsilon_n p_n &= p_{0n} (v_1 - u_0 - w_{0n})^2 && \text{avec le signe de } v_1 - (u_0 + w_{0n}) \\ p &= \epsilon_1 p_1 + \epsilon_2 p_2 + \dots + \epsilon_n p_n \\ \epsilon' r &= r_0 (v_1 - u_0)^2 && \text{avec le signe de } v_1 - u_0 \end{aligned}$$

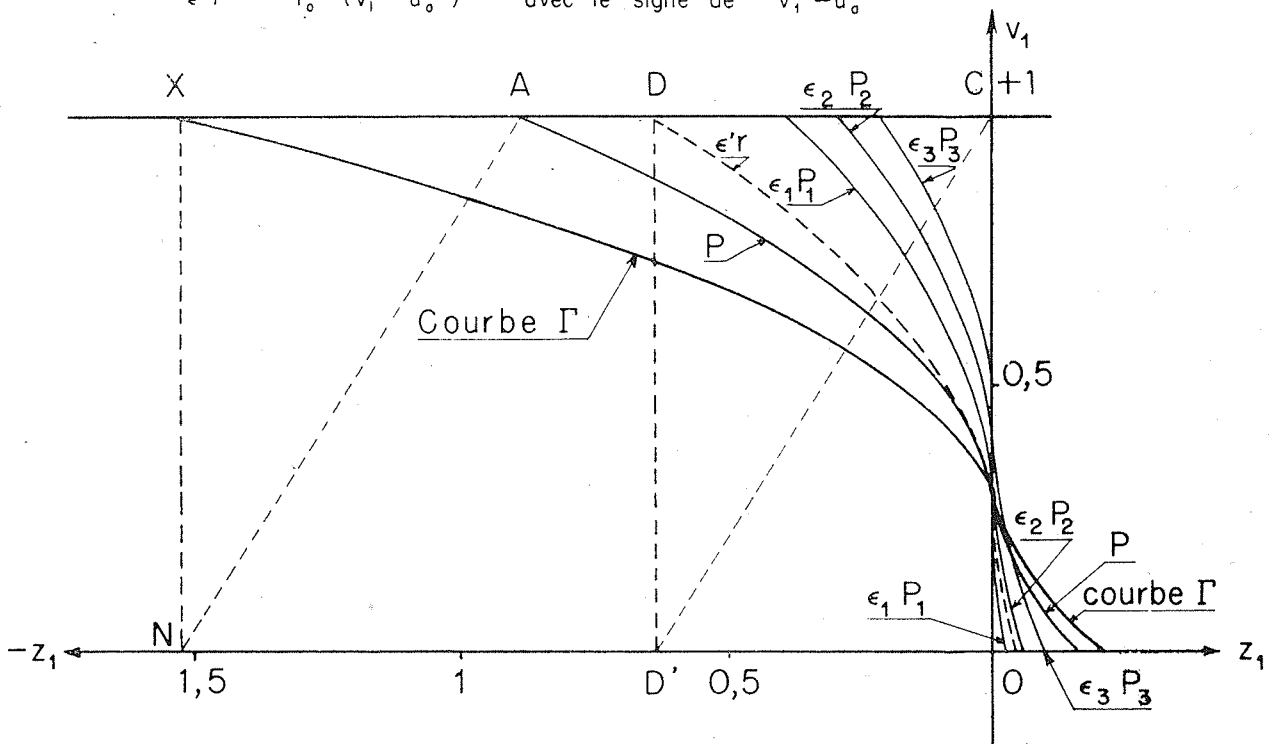


Fig. 2. — CONSTRUCTION DE LA COURBE Γ

POUR $q_1 = 0,2 \quad Q_0$
 $q_2 = 0,1 \quad Q_0$
 $q_3 = 0,1 \quad Q_0$
 $P_{01} = P_{02} = P_{03} = 0,6$
 $C_0 = 1$
 GAS DE LA FERMETURE

On en déduit également la courbe Γ donnant les variations de la quantité : $y = p + \epsilon' r$

La courbe (z_1, v_1) part d'un point A, d'ordonnée $v_1 = 1$ d'abscisse z_1 négative et égale, en valeur absolue, à la perte de charge p_0 existant dans le canal d'aménée, dans le régime permanent initial ; le point A est donc le point d'ordonnée $v_1 = 1$ sur la courbe p de la fig. 2.

La tangente en ce point à la courbe (z_1, v_1) a pour pente

$$\left(\frac{dv_1}{dz_1}\right) = - \frac{-p_0 + p_0 + r_0 (1 - u_0)^2}{1} = - r_0 (1 - u_0)^2$$

Si l'on remarque que $r_0 (1 - u_0)^2$ et que la droite D'C' a donc pour pente $\frac{1}{r_0 (1 - u_0)^2}$

on voit que la normale AN en A à la courbe (z_1, v_1) est parallèle à D'C' (fig. 3). On pourrait remarquer aussi, que la normale AN à la courbe en A coupe l'axe des abscisses au point N où se projette sur cet axe le point k d'ordonnée $v_1 = +1$ sur la courbe Γ .

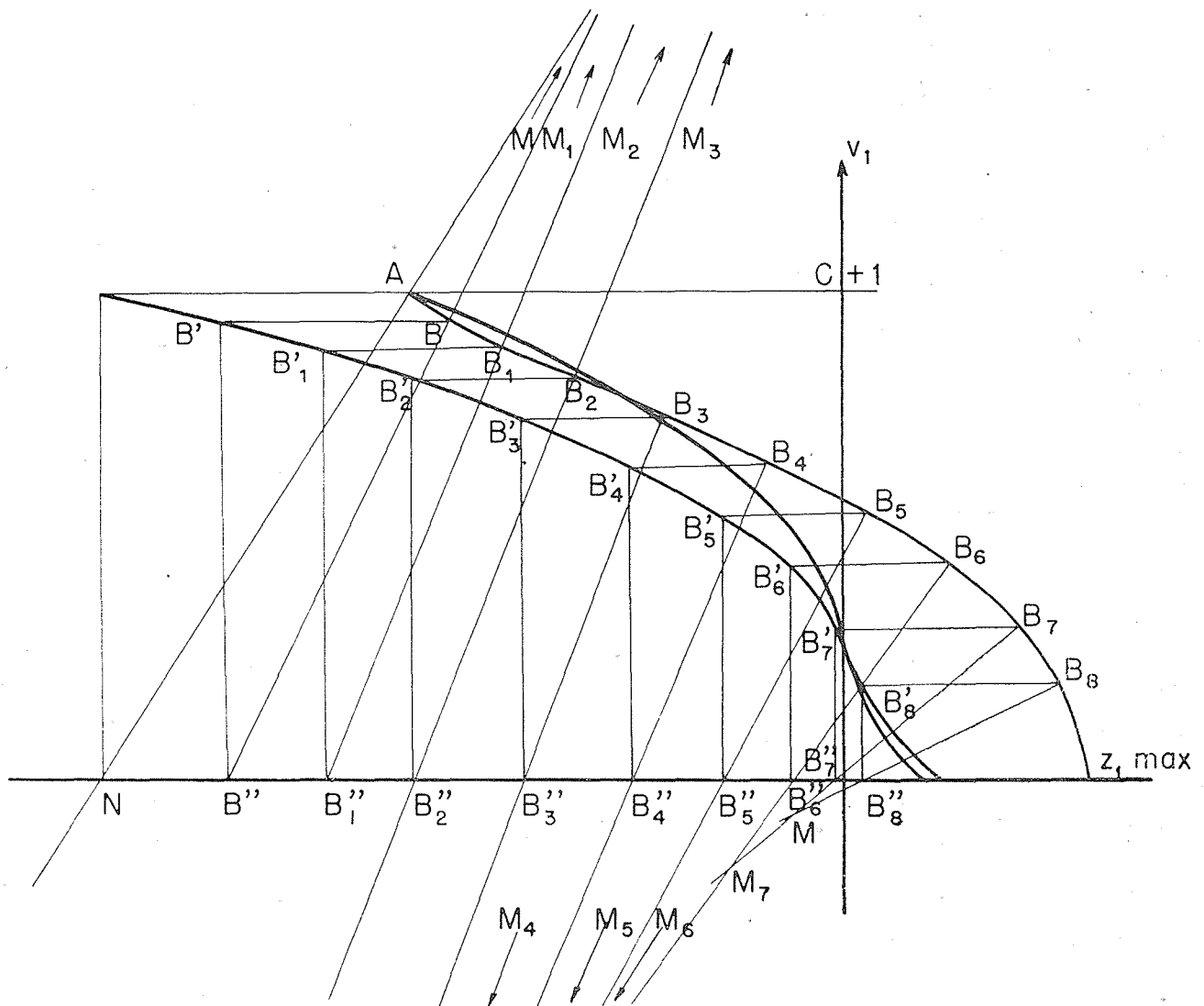


Fig. 3. — CONSTRUCTION DE LA COURBE $z_1 (v_1)$

Pour trouver le rayon de courbure en ce point, calculons la valeur initiale de $\frac{d^2 v_1}{dz_1^2}$ en remarquant qu'à l'instant initial, tous les α sont positifs.

$$\frac{d^2 v_1}{dz_1^2} = \frac{z_1 + p + r}{v_1^2} \frac{dv_1}{dz_1} - \frac{1}{v_1} \left(1 + \frac{dp}{dz_1} + \frac{dr}{dz_1} \right)$$

$$\text{avec : } \frac{dr}{dz_1} = 2 r_o (v_1 - u_o) \frac{dv_1}{dz_1}$$

$$\left(\frac{dr}{dz_1} \right)_o = 2 r_o (1 - u_o) \left[-r_o (1 - u_o)^2 \right] = -2 r_o^2 (1 - u_o)^3$$

$$\frac{dp}{dz_1} = \frac{dp_i}{dz_1} + \dots + \frac{dp_n}{dz_1}$$

$$= 2 \left[p_{o1} (v_1 - u_o) + p_{o2} (v_1 - u_o - w_{o2}) + \dots + p_{on} (v_1 - u_o - w_{on}) \right] \frac{dv_1}{dz_1}$$

$$\left(\frac{dp}{dz_1} \right)_o = -2 r_o (1 - u_o)^2 \left[p_{o1} (1 - u_o) + p_{o2} (1 - u_o - w_{o2}) + \dots + p_{on} (1 - u_o - w_{on}) \right]$$

on a donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 v_1}{dz_1^2} \right)_o &= -r_o^2 (1 - u_o)^4 - \left\{ 1 - 2 r_o^2 (1 - u_o)^3 - 2 r_o (1 - u_o)^2 \left[p_{o1} (1 - u_o) + p_{o2} (1 - u_o - w_{o2}) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p_{on} (1 - u_o - w_{on}) \right] \right\} \\ &= -1 + r_o (1 - u_o)^2 \left\{ 2 \left[p_{o1} (1 - u_o) + p_{o2} (1 - u_o - w_{o2}) + \dots + p_{on} (1 - u_o - w_{on}) \right] \right. \\ &\quad \left. + r_o (1 - u_o^2) \right\} \end{aligned}$$

Le rayon de courbure initial a donc pour valeur :

$$\begin{aligned} \rho_o &= \frac{\left[1 + \left(\frac{dv_1}{dz_1} \right)_o^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \left(\frac{d^2 v_1}{dz_1^2} \right)_o \right|} \\ \rho_o &= \frac{\left[1 + r_o^2 (1 - u_o)^4 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| -1 + r_o (1 - u_o)^2 \left[2 p_{o1} (1 - u_o) + 2 p_{o2} (1 - u_o - w_{o2}) + \dots + 2 p_{on} (1 - u_o - w_{on}) + r_o (1 - u_o^2) \right] \right|} \end{aligned}$$

Connaissant ainsi le point de départ et le cercle de courbure initial en ce point, on peut construire immédiatement la courbe (z_1, v_1) de proche en proche, au moyen du procédé classique des normales. La pente de la normale étant :

$$-\frac{1}{\left(\frac{dv_1}{dz_1} \right)} = \frac{v_1}{z_1 + y}$$

la normale en un point quelconque B de la courbe s'obtient (fig. 4) en B''B, B'' désignant la projection sur l'axe des z_1 de l'intersection B' de la courbe Γ , donnant y avec l'horizontale de B.

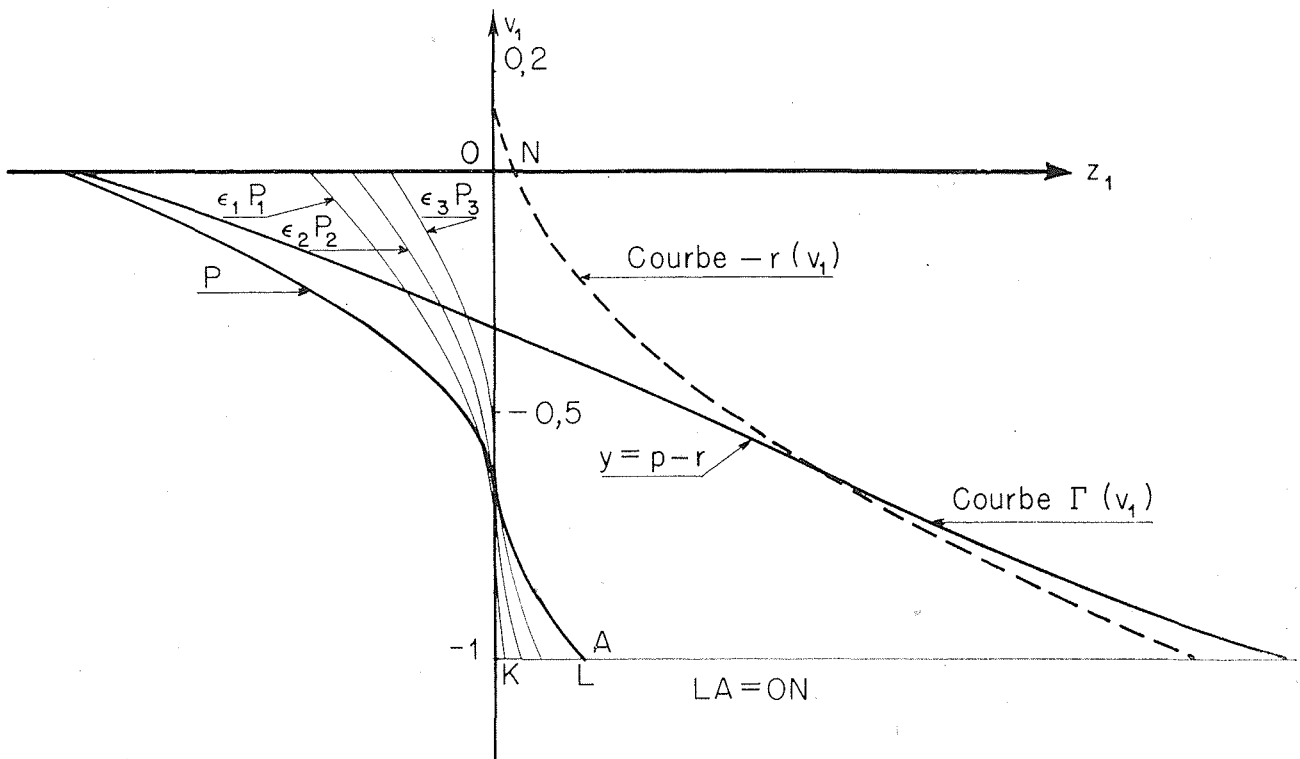


Fig. 4. — CONSTRUCTION DE LA COURBE Γ

pour $q_1 = 0,2 Q_0$
 $q_2 = 0,1 Q_0$
 $q_3 = 0,1 Q_0$
 $P_{01} = P_{02} = P_{03} = 0,6$
 $r = 1$

CAS DE L'OUVERTURE

On s'arrête au point M où la courbe coupe l'axe des abscisses, ce qui donne, puisqu'alors $v_1 = 0$, la cote relative de la montée maxima du plan d'eau, atteinte par lui à la fin de la première montée.

Remarque

La détermination des valeurs de $z_2 \dots z_n$ se fait aisément. On voit que, d'après les expressions (12) on a :

$$z_1 = \alpha_1 [z_1 + y] - (\epsilon_n p_n + \dots + \epsilon_1 p_1)$$

$z_1 + y$ est donné immédiatement, en B, par exemple par la valeur algébrique du segment B'B, compté suivant $O z_1$ les termes de la seconde parenthèse étant donnés par les courbes de la fig. 2.

IV

Etude d'une ouverture instantanée de 0 à Q_0 en tenant compte des pertes de charge et de la présence de l'étranglement.

Nous supposons que, dans le régime permanent initial, les turbines n'absorbent rien et que les débits $q_1, q_2 \dots q_n$ remontent le canal d'amenée, de l'aval vers l'amont, en constituant une accumulation dans le réservoir de tête.

On a maintenant, dès l'instant initial :

$$Q = Q_0, \quad U = U_0, \quad u = 1, \quad \frac{du}{dt} = 0$$

et les équations générales peuvent s'écrire, ϵ' étant négatif pendant toute la première descente (période à laquelle nous limiterons notre étude) puisque l'eau traverse constamment l'étranglement de haut en bas :

$$\frac{dv_1}{dz_1} = - \frac{z_1 + \epsilon_1 p_1 + \dots + \epsilon_n p_n - r}{v_1}$$

$$v_1 + 1 - u_o = w_1 = w_2 + w_{o2} = \dots = w_n + w_{on}$$

A l'instant initial, par suite de l'inertie de l'eau en mouvement, le tronçon 1 du canal d'aménée continue à absorber le débit q_1 provenant de l'apport qui se produit dans la chambre d'équilibre, de telle sorte que le débit total Q_o des turbines est fourni par la chambre et que l'étranglement est traversé par le débit $Q_o + q_1$.

V_1 part de $-U_o$ et croît jusqu'à zéro, de telle sorte que v passe de -1 à zéro.

On construit les courbes donnant, dans ces limites de variation de v_1 :

$$\epsilon_1 p_1 = p_{o1} (v_1 + 1 - u_o)^2 \text{ avec le signe de } v_1 + 1 - u_o$$

$$\epsilon_2 p_2 = p_{o2} (v_1 + 1 - u_o - w_{o2})^2 \text{ avec le signe de } v_1 + 1 - u_o - w_{o2}$$

$$\dots$$

$$\epsilon_n p_n = p_{on} (v_1 + 1 - u_o - w_{on})^2 \text{ avec le signe de } v_1 + 1 - (u_o + w_{on})$$

$$p = \epsilon_1 p_1 + \dots + \epsilon_n p_n$$

$$r = -r_o (v_1 - u_o)^2 \text{ expression toujours négative.}$$

On en déduit immédiatement la courbe Γ donnant les variations de la quantité $y = p - r$.

Déterminons la valeur initiale de z_1 :

a) w_1, w_2, \dots, w_n conservent, à l'instant initial, les valeurs qu'elles possédaient dans le régime permanent précédant la manœuvre considérée ; valeurs qui sont données par les équations de continuité (8) dans lesquelles on fait $u = 0, v_1 = 0$ soit :

$$-u_o = (w_1)_o = (w_2)_o + w_{o2} = \dots = (w_n)_o + w_{on}$$

ou

$$(w_1)_o = -u_o < 0, (w_2)_o = -u_o - w_{o2} < 0, \dots, (w_n)_o = -u_o - w_{on} < 0$$

et il leur correspond des pertes de charge.

$$(\epsilon_1 p_1)_o = -p_{o1} u_o^2$$

$$(\epsilon_2 p_2)_o = -p_o (u_o + w_{o2})^2$$

$$\dots$$

$$(\epsilon_n p_n)_o = -p_{on} (u_o + w_{on})^2$$

qui sont négatives parce que le mouvement se fait alors de la cheminée vers le réservoir de tête.

b) l'étranglement étant traversé de haut en bas, dans le régime permanent primitif, par le débit

$q_1 = F_1 U_o$ est le siège d'une perte de charge :

$$(\epsilon' r) = -r_o u_o^2$$

c) il en résulte la valeur initiale suivante de z_1 :

$$(z_1)_o = p_{o1} u_o^2 + p_{o2} (u_o + w_{o2})^2 + \dots + p_{on} (u_o + w_{on})^2 + r_o u_o^2$$

ou $(z_1)_o = p_o + r_o u_o^2$

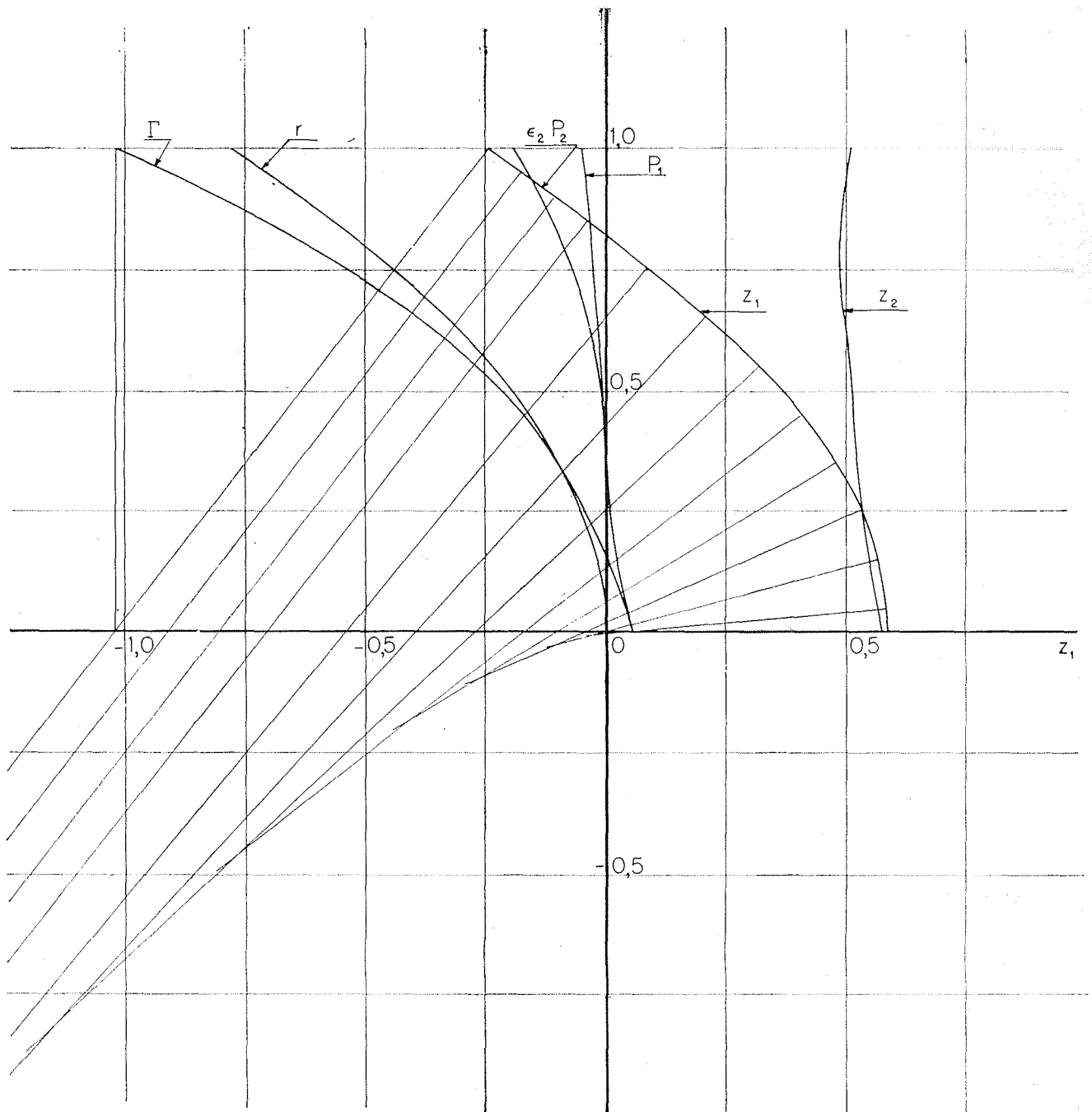


Planche 1. — La flèche correspondant à $\epsilon_2 P_2$ n'indique pas la bonne courbe ; elle devrait être prolongée de 2 ou 3 mm. jusqu'à la courbe voisine qui n'est pas repérée par une nomenclature et qui est celle de $\epsilon_2 P_2$

P_0 désignant la perte de charge totale dans le canal d'aménée dans le régime permanent primitif, donnée par l'abscisse KL du point où la courbe p de la fig. 4 coupe la droite $v_1 = -1$ et $r_0 u_0^2$ étant représenté par l'abscisse ON du point où la courbe $r = r_0 (v_1 - u_0)^2$ coupe l'axe des z_1

le point de départ de la courbe (z_1, v_1) est donc en A , d'ordonnée -1 , d'abscisse $\overline{KA} = \overline{KL} - \overline{ON}$ (fig. 4 et 5).

La perte de la tangente en ce point est donnée par la valeur initiale de

$$\frac{dv_1}{dz_1} = - \frac{z_1 + p - r}{v_1} = - \frac{z_1 + y}{v_1}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv_1}{dz_1}\right)_0 &= - \frac{p_0 + r_0 u_0^2 - p_0 - r_0 (-1 - u_0)^2}{-1} = r_0 [u_0 - (1 + u_0)^2] \\ \left(\frac{dv_1}{dz_1}\right)_0 &= r_0 [(u_0 - 1 - u_0)(u_0 + 1 + u_0)] \\ \left(\frac{dv_1}{dz_1}\right)_0 &= -r_0 (1 + 2u_0) \end{aligned}$$

L'expression de $\frac{dv_1}{dz_1}$ montre (fig. 5) que la normale à l'origine A , à

la courbe (z_1, v_1) est la droite AN , N étant la projection sur l'axe des z_1 du point K d'ordonnée $v_1 = -1$, de la courbe Γ donnant $y = p - r$.

Pour avoir le rayon de courbure en A , formons

$$\frac{d^2 v_1}{dz_1^2} = \frac{z_1 + p - r}{v_1^2} \frac{dv_1}{dz_1} - \frac{1}{v_1} \left[1 + \frac{dp}{dz} - \frac{dr}{dz} \right]$$

A l'instant initial :

$$\begin{aligned} \frac{z_1 + p - r}{v_1^2} \frac{dv_1}{dz_1} &= \frac{p_0 + r_0 u_0^2 - p_0 - r_0 (1 + u_0)^2}{1} \times [-r_0 (1 + 2u_0)] \\ &= r_0^2 (1 + 2u_0)^2 \end{aligned}$$

De plus, on a les ε étant négatifs au début du phénomène :

$$\begin{aligned} p &= p_1 - \dots - p_n = p_{01} (v_1 + 1 - u_0)^2 - p_{02} (v_1 + 1 - u_0 + w_{02})^2 - \dots - p_{0n} (v_1 + 1 - u_0 - w_{0n})^2 \\ \frac{dp}{dz_1} &= -2 \frac{dv_1}{dz_1} [p_{01} (v_1 + 1 - u_0) + p_{02} (v_1 + 1 - u_0 - w_{02}) + \dots + p_{0n} (v_1 + 1 - u_0 - w_{0n})] \\ \left(\frac{dp}{dz_1}\right)_0 &= -2 r_0 (1 + 2u_0) [p_{01} u_0 + p_{02} (u_0 + w_{02}) + \dots + p_{0n} (u_0 + w_{0n})] \\ \frac{dr}{dz_1} &= 2 r_0 (v_1 - u_0) \frac{dv_1}{dz_1} \\ \left(\frac{dr}{dz_1}\right)_0 &= 2 r_0^2 (1 + u_0) (1 + 2u_0) \end{aligned}$$

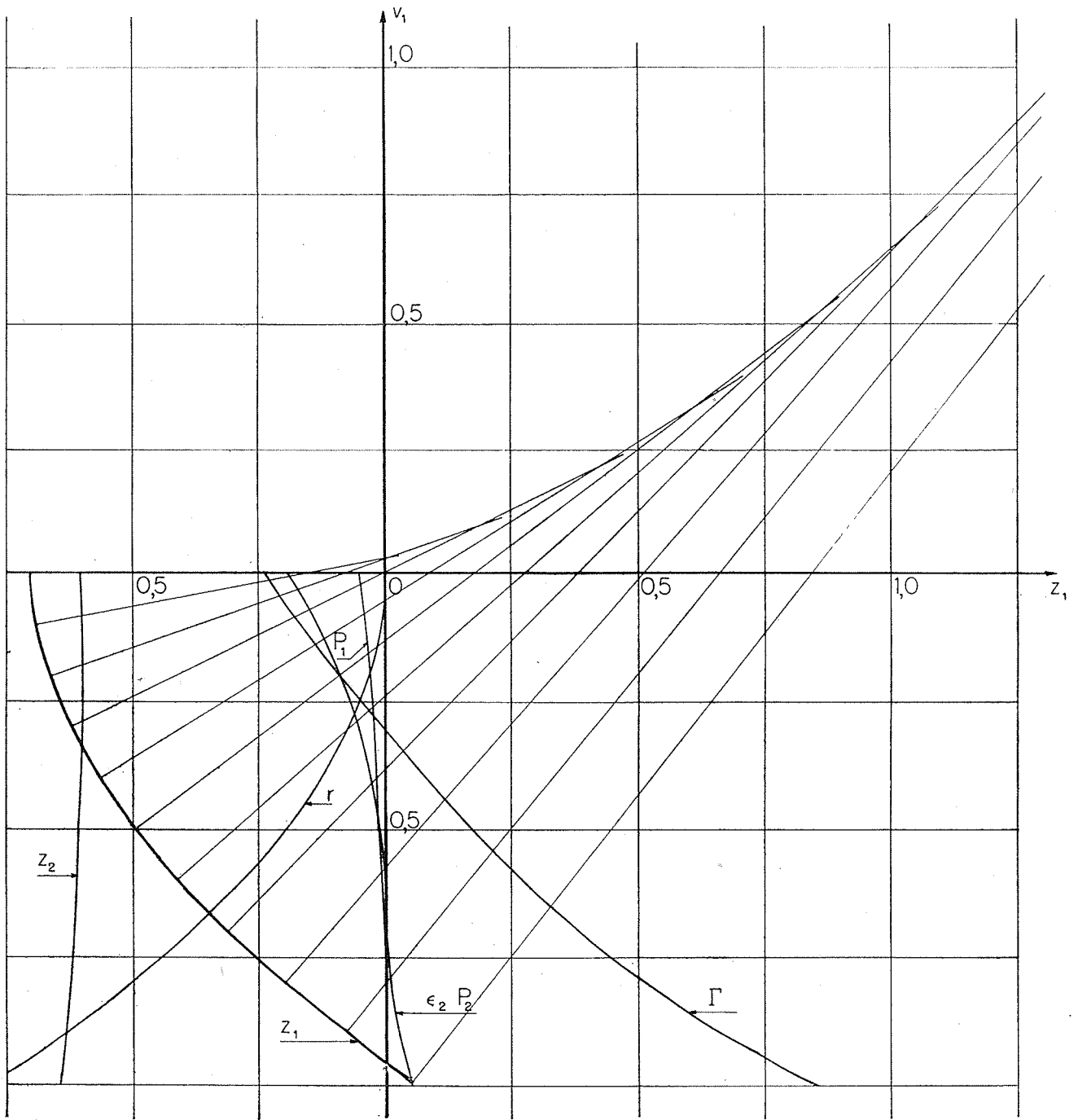


Planche 2. — USINE D'OLETTE : CHAMBRE D'ÉQUILIBRE. DIAGRAMME D'OUVERTURE INSTANTANÉE.
 $Q_0 = 5,200 \text{ m}^3/\text{sec.}$ $q_2 = 1,800 \text{ m}^3/\text{sec.}$

On a donc :

$$\left(\frac{d^2 v_1}{dz_1^2}\right)_2 = r_o^2 (1+2u_o)^2 + 1 - 2r_o^2 (1+u_o)(1+2u_o) - 2r_o (1+2u_o) \left[p_{o1}u_o + p_{o2}(u_o+w_{o2}) + \dots + p_{on}(u_o+w_{on}) \right]$$

$$\left(\frac{d^2 v_1}{dz_1^2}\right)_2 = 1 - r_o (1+2u_o) \left[r_o + 2p_{o1}u_o + 2p_{o2}(u_o+w_{o2}) + \dots + 2p_{on}(u_o+w_{on}) \right]$$

et le rayon de courbure initial de la courbe est donné par :

$$\rho_o = \frac{\left[1 + r_o^2 (1 + 2u_o)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| 1 - r_o (1 + 2u_o) \left[r_o + 2p_{o1}u_o + 2p_{o2}(u_o + w_{o2}) + \dots + 2p_{on}(u_o + w_{on}) \right] \right|}$$

Le départ de la courbe (z_1, v_1) est ainsi connu, en assimilant cette courbe à son cercle de courbure, et la construction se poursuit, de proche en proche, par le procédé habituel, la normale en un point quelconque B étant BB'', en appelant B'' la projection sur l'axe oz du point B' où l'horizontale de B coupe la courbe Γ donnant $y-r$ (fig. 5).

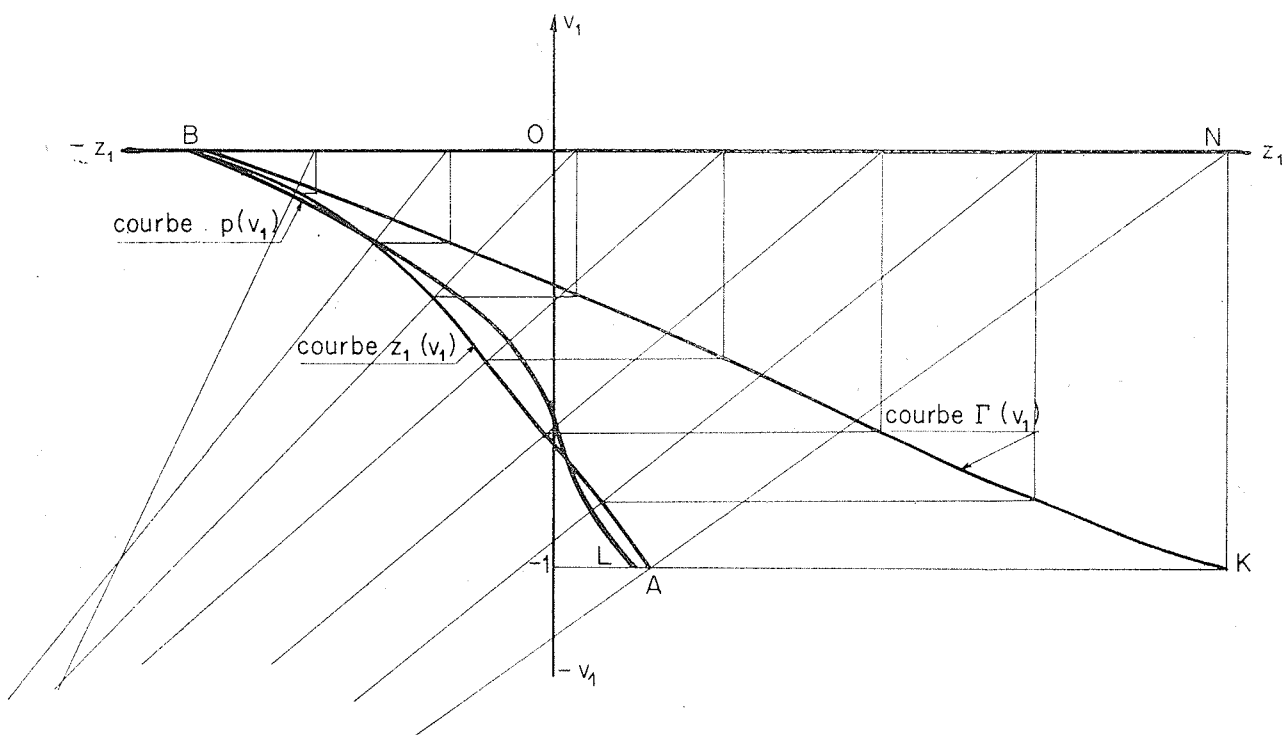


Fig. 5. — CONSTRUCTION DE LA COURBE $z_1(v_1)$

Remarque. — Dans l'exemple choisi les pertes de charge sont élevées et l'oscillation correspondant à l'ouverture est aperiodique, le max. de descente est égal à la perte de charge dans le canal (valeur OB).

Conclusion générale

Nous avons déjà montré, dans des études antérieures, comment le calcul des oscillations pouvait être effectué, dans le cas d'un nombre quelconque de chambres d'équilibre montées sur un même canal d'amenée et captant, comme la chambre elle-même, des débits d'apports. Les méthodes indiquées, méthodes aux différences finies (méthodes D.F.) et méthode semi-graphique, conduisent toutefois à des calculs très longs.

Dans la précédente étude, nous avons montré comment, dans le cas réalisé presque toujours en pratique de puits de captation de section négligeable, le résultat peut être obtenu, dans le cas le plus général, par une méthode graphique particulièrement simple.