NOTE SUR LA DISTRIBUTION DES VITESSES MOYENNES POUR L'ECOULEMENT TURBULENT DANS LES CONDUITES CYLINDRIQUES

par **Robert LEGENDRE**
Ingénieur en Chef du Génie Maritime

(COMMUNICATION PRÉSENTÉE AU COMITÉ TECHNIQUE DE LA SOCIÉTÉ HYDROTECHNIQUE DE FRANCE DANS SA SÉANCE DU 29 AVRIL 1947)

Nous avons montré antérieurement (1) que la loi logarithmique de distribution des vitesses moyennes, proposée par VON KARMAN pour l'écoulement turbulent dans une conduite cylindrique, peut être déduite de la coexistence dans une zone de transition de deux lois limites, l'une relative à la distribution des vitesses dans le noyau central turbulent, l'autre relative à la distribution des vitesses dans le film, dit laminaire, au voisinage de la paroi. Le caractère approché de la loi de VON KARMAN et l'impossibilité de son extrapolation en dehors de la zone de transition trouvent ainsi une nouvelle justification.

Nous nous proposons ici d'interpoler la loi vers le noyau central en supposant l'existence d'une troisième loi limite au centre de la conduite, qui est suggérée par les anomalies des résultats expérimentaux de NIKURADSE.

Lois de force et de quantité de mouvement.

Rappelons que la moyenne des membres des équations de l'hydrodynamique, écrites avec les notations habituelles, conduit aux équations portant sur les moyennes :

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\delta\bar{p}}{\delta x}=\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}(r\,\overline{uv})-\frac{\nu}{r}\frac{\delta}{\delta r}\left(r\frac{\delta\bar{u}}{\delta r}\right)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\delta\bar{p}}{\delta r}=\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}(r\,\overline{v^2})-\frac{\overline{w^2}}{r}$$

(1) FRANCE ENERGETIQUE, juillet-août 1946.

Nous n'utiliserons que la première équation dont nous simplifierons l'écriture en introduisant la vitesse de frottement u_* le paramètre y et le nombre de Reynolds $\mathcal{R}$ ou plutôt le coefficient ε inverse de $\mathcal{R}$ et que nous préférons, car il est nul aux grandes vitesses.

$$u_*^2=-\frac{R}{2\rho}\frac{\delta\bar{p}}{\delta x}$$

$$y=\frac{r}{R}$$

$$\epsilon=\frac{1}{\mathcal{R}}=\frac{\nu}{2u_*R}$$

Alors la loi de force se réduit à :

$$y=\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(y.\frac{\overline{uv}}{u_*^2}\right)-\epsilon\frac{d}{dy}\left(y\frac{d\bar{u}/u_*}{dy}\right)$$

équation qui s'intègre par la loi réduite de quantité de mouvement :

$$y=\frac{\overline{uv}}{u_*^2}-2\epsilon\frac{d.\bar{u}/u_*}{dy}$$

Cette équation, ou sa dérivée, définit $\overline{uv}/u_*^2$ pour une distribution des vitesses fournie par l'expérience.

La loi limite de noyau.

Conformément à la loi générale de l'hydrodynamique, la vitesse moyenne rapportée à la vitesse de frottement $\frac{\bar{u}}{u_*}$ est une fonction de la distance à l'axe réduite « y » et du nombre de Reynolds ou de ε.

Lorsque ε tend vers zéro, l'expérience montre que $\overline{u}/u_*$ ne tend vers aucune limite finie. Par contre, la différence des vitesses entre deux points du noyau

$$\frac{u\ (y, \epsilon) - u\ (y_0, \epsilon)}{u_*}$$

tend vers une limite finie, et ceci constitue la première loi limite que nous pouvons considérer comme purement empirique.

VON KARMAN et ses successeurs ont employé la vitesse maxima sur l'axe comme vitesse de comparaison, mais si les hypothèses, dont nous développerons ci-après les conséquences, sont justifiées, l'axe est un point singulier comme la paroi. Choisissons donc un point fixe arbitrairement, par exemple $y_0 = 1/2$.

$$\frac{u\ (y, \epsilon) - u\ (1/2, \epsilon)}{u_*} = f\ (y, \epsilon)$$

où f a une signification pour $\varepsilon = 0$, ce qui traduit l'existence de la loi limite.

Nous pourrons exprimer la loi d'une manière équivalente en utilisant la dérivée de manière à éliminer le point de comparaison

$$\frac{d\overline{u}/u_*}{dy} = f'_y\ (y, \epsilon)$$

Nous supposons seulement que f (y,0) est dérivable.

Nous verrons que, d'après les hypothèses que nous ferons, cette loi n'est pas rigoureuse et doit être à nouveau dérivée pour être exacte :

$$\frac{d^2\ \overline{u}/u_*}{d\,y^2} = f''_{y^2}\ (y, \epsilon)$$

Loi limite de film.

D'après les conceptions de VON KARMAN, la loi de distribution des vitesses dans le film au voisinage de la paroi est suffisamment définie, dès que le film est mince, par la force de frottement locale et la viscosité. Elle doit être indépendante du diamètre 2 R de la conduite. Il est donc indiqué de choisir pour paramètre essentiel dans le film, non pas y qui rapporte les rayons au rayon de la conduite, mais un invariant y_+ constitué avec la distance à la paroi R — r et ν/u_* choisi comme grandeur de comparaison

$$y_+ = (R - r)\frac{u_*}{\nu} = \frac{1-y}{2\,\epsilon}$$

La loi de distribution des vitesses est encore, d'après la loi générale de l'hydrodynamique, fonction de y_+ et de ε

$$\overline{u}/u_* = g\ (y_+, \epsilon)$$

Grâce au changement de variable, g (y_+, 0) a un sens et constitue une seconde loi limite.

L'existence de cette loi limite n'est pas encore rigoureusement exacte, mais les hypothèses que nous ferons sont compatibles avec l'existence de la loi dérivée deux fois, dérivations d'ailleurs commodes pour la comparaison avec la loi précédente.

$$\frac{d^2\ \overline{u}/u_*}{d\,y_+^2} = g''_{y_+^2}\ (y_+, \epsilon)$$

où $g''_{y_+^2}$ a un sens pour $\varepsilon = 0$.

Loi logarithmique.

Supposons qu'il existe une zone de transition entre le film et le noyau où les deux lois limites puissent être approchées simultanément

$$\frac{d^2\overline{u}/u_*}{dy_+^2} = 4\epsilon^2\frac{d^2\overline{u}/u_*}{dy^2} = g''_{y_+^2}(y_+, \epsilon) = 4\epsilon^2 f''_{y^2}(y, \epsilon)$$

faisons tendre ε vers zéro pour une valeur fixe de y_+

$$g''_{y_+^2}\ (y_+, 0) \simeq 4\epsilon^2 f''_{y^2}\ (y, 0)$$

le premier membre est fini et le second ne peut l'être que parce que y varie avec ε à y_+ donné. Remarquons que la fonction de y au second membre est aussi une fonction de 1 — y ou de $2\,\varepsilon\, y_+$

$$f''_{y^2}\ (y, 0) = -\frac{1}{k\,(1-y)^2} = -\frac{1}{4\,k\,\epsilon^2 y_+^2}$$

la loi limite de y_+ est alors, dans la région où les deux lois sont valables :

$$g''_{y_+^2} = -\frac{1}{k\,y_+^2}$$

dont l'intégration donne la loi logarithmique de VON KARMAN pour la distribution des vitesses.

Singularité sur l'axe.

Les hypothèses de VON KARMAN ne justifient pas davantage que le raisonnement précédent l'extrapolation de la loi au delà de la zone de transition. L'expérience montre l'incorrection d'une telle extrapolation.

Les résultats de NIKURADSE semblent indiquer que la pente réduite de la courbe de distribution de vitesse tend à se comporter comme $a\sqrt{y}$ vers l'axe. Cela signifierait que la dérivée de la pente $d^2\bar{u}/u_*/dy^2$ tend vers l'infini comme $a/2\sqrt{y}$. Si l'on se reporte à la loi des forces, qui peut être écrite :

$$1 = \frac{1}{2y}\frac{d}{dy}\left[y\,\frac{\overline{uv}}{u_*^2}\right] - \epsilon\left[\frac{1}{y}\,\frac{d\bar{u}/u_*}{dy} + \frac{d^2\,\bar{u}/u_*}{dy^2}\right]$$

le coefficient de $-\varepsilon$ se comporterait comme $3a/2\sqrt{y}$, c'est-à-dire que le second terme, égal à 1 sur la paroi et négligeable dans le noyau, deviendrait infini sur l'axe. Nous estimons qu'une telle interprétation ne serait pas judicieuse. Il serait surprenant que le premier terme du second membre, qui correspond à la force apparente de turbulence et qui est très voisin de 1, changeat de signe pour devenir infini négatif avant l'axe, alors que la turbulence établie varie continûment.

Nous serons amenés à poser que la dérivée de la pente de la courbe de distribution de vitesse devient effectivement très grande sur l'axe conformément aux résultats de NIKURADSE, mais reste finie pour une valeur de ε, soit $a'(\varepsilon)$. La pente se comporte alors comme $a'(\varepsilon)\,y$ et le coefficient de $-\varepsilon$ prend sur l'axe la valeur $2a'(\varepsilon)$. Il suffit que $a'(\varepsilon)$ croisse indéfiniment lorsque ε tend vers zéro, mais de telle manière que $\varepsilon\,a'(\varepsilon)$ tende vers zéro pour que toute anomalie de la variation de la force apparente de turbulence disparaisse. D'autre part, pour des valeurs finies mais très grandes du nombre de Reynolds, on aura l'impression que la courbure de la loi de distribution de vitesse s'annule sur l'axe.

Il est clair qu'une telle interprétation est incompatible avec l'extrapolation jusqu'à l'axe de la loi limite de noyau.

Loi limite de zone centrale.

Par analogie avec les résultats obtenus pour le film, et bien qu'il n'y ait ici aucune confirmation expérimentale, nous allons supposer qu'il existe une loi limite de zone centrale que nous admettrons, assez arbitrairement, invariante aux variations proportionnelles de vitesse et de longueur. Une grandeur de comparaison sera donc :

$$A = \frac{2\,u_*}{R}$$

qui a les dimensions de l'inverse d'un temps et que nous devons combiner avec la viscosité ν pour former une longueur de comparaison L

$$L^2 = \nu/A = R^2\,\frac{\nu}{2\,u_*R} = \epsilon\,R^2$$

$$L = R\sqrt{\epsilon}$$

le paramètre à employer est donc :

$$y_x = \frac{r}{L} = \frac{y}{\sqrt{\epsilon}}$$

La vitesse de comparaison est d'autre part :

$$\sqrt{\nu\,A} = 2\,u_*\sqrt{\epsilon}$$

et la loi générale de l'hydrodynamique s'écrit :

$$\frac{\bar{u} - u_M}{u_*} = \sqrt{\epsilon}\;\;h\,(y_x\,,\,\epsilon)$$

où u_M désigne la vitesse maxima sur l'axe.

L'existence de la loi limite s'exprime par la tendance de h vers une fonction bien définie pour $\varepsilon = 0$.

Utilisons encore la dérivée seconde de cette loi

$$\frac{d^2\bar{u}/u_*}{dy_x^2} = \epsilon\,\frac{d^2\bar{u}/u_*}{dy^2} = \sqrt{\epsilon}\;h''_{y_x^2}\,(y_x\,,\epsilon) = \epsilon\,f''_{y^2}(y,\epsilon)$$

En particulier pour $y_x = 0$ on trouvera que $d^2\,\bar{u}/u_*/dy^2$ tend à se comporter comme $1/\sqrt{\varepsilon}$ à un facteur près, forme qui a bien le caractère annoncé au paragraphe précédent.

Il est inutile de reprendre en détail le raisonnement fait pour la zone de transition entre film et noyau. S'il existe une zone de transition entre le noyau et la zone centrale où les deux lois f''_{y^2} et $h''_{y_x^2}$ sont simultanément valables, les lois limites sont nécessairement de la forme :

$$h''_{y_x^2} = -\,\frac{1}{k_1\,y_x}$$

$$f''_{y^2} = -\,\frac{1}{k_1\,y}$$

Interpolation de la loi de noyau.

Nous avons trouvé que la loi f''_{y^2} présente deux singularités, l'une pour $y = 1$ et l'autre pour $y = 0$. Elle est certainement assez bien définie, à une constante près, par la somme de ces deux singularités et, en tous cas, l'interpolation entre ces deux singularités est sûrement meilleure qu'à partir d'une seule.

Nous sommes donc amenés à écrire

$$f''_{y^2}(y, o) = -\frac{1}{k(1-y)^2} - \frac{1}{k_1 y} + \text{Cte}$$

Les résultats de NIKURADSE sont assez bien représentés pour les valeurs ci-après des coefficients [1]

$$f''_{y^2}(y, o) = -\frac{2,5}{(1-y)^2} - \frac{0,6}{y}$$

Il n'a pas été jugé indispensable de retenir une constante ni un pôle simple en complément du pôle double pour $y = 1$.

Loi des pentes.

Pour pouvoir intégrer la loi précédente, il faut au préalable intégrer la fonction $h''y^2_x$ dans la zone centrale. Nous ne connaissons que la forme de cette loi et son allure pour une valeur assez grande de y_x. Nous pouvons cependant en déduire la forme de l'intégrale à un facteur près.

Soit z la valeur de y_x pour laquelle la loi ne diffère plus que de n % de la loi — $1/k_1 y_x$ et soit d'autre part

$$-B = \int_0^z h''_{y^2_x}(y_x, o)\, dy_x$$

la valeur inconnue mais bien déterminée de l'intégrale de $h''y^2_x$. Alors, la valeur de la pente réduite de la courbe de distribution de vitesse pour $y_x = z$ est :

$$\frac{d\bar{u}/u_*}{dy} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{d\bar{u}/u_*}{dy_x} = -B$$

Intégrons la loi de noyau à partir de cette valeur

$$C = B - 0,6 \ln Z - 0,3 \ln \epsilon_0 - \frac{2,5}{1-\sqrt{\epsilon z}}$$

(1) Nous n'avons pas eu le temps de nous reporter aux résultats originaux de NIKURADSE et nous avons utilisé les extraits de B.-A. BAKMETEFF. Dunod, 1941. La représentation pourrait être améliorée par balançement des résultats complets.

où ε_0 est l'inverse d'un nombre de Reynolds de comparaison et C :

$$C = B - 0,6 \ln Z - 0,3 \ln \epsilon_0 \frac{-2,5}{1-\sqrt{\epsilon z}}$$

Les deux premiers termes de C forment une constante, car la forme de la fonction $h''y^2_x$ garantit que B varie comme 0,6 /ln.z. Les deux derniers termes sont également constants si $\sqrt{\varepsilon} z$ qui caractérise l'étendue de la zone centrale est négligeable auprès de 1. Nous considérons donc C comme une constante.

Lorsque ε tend vers zéro, son logarithme devient infini et il ne peut exister de loi limite pour la pente de la courbe de distribution des vitesses sans contradiction avec nos hypothèses.

Si $\varepsilon = \varepsilon_0$ pour les essais de NIKURADSE au nombre de Reynolds (rapporté à la vitesse moyenne et non à la vitesse de frottement) de 105.000, la valeur de la constante C est approximativement 1,5.

Pour un autre nombre de Reynolds, la loi de variation de la pente de la courbe de distribution de vitesse est décalée de 0,3 $\ln \varepsilon / \varepsilon_0$, ce qui représente assez bien les essais de NIKURADSE. Il faut noter qu'aux faibles nombres de Reynolds un écart par rapport à la courbe limite dans le noyau pourrait s'ajouter à l'influence du nombre de Reynolds sur la distribution des vitesses dans la zone centrale.

Pente à la paroi.

Désignons par z' la valeur de y_+ à partir de laquelle $g''y^2_+$ diffère de moins de n % de la loi — $1/k(1 - y)^2$ et par B' l'intégrale.

$$B' = \int_0^{z'} g''_{y^2_+}(y_+, o)\, dy_+$$

La variation de la pente réduite dans le film est :

$$B' \frac{dy_+}{dy} = -\frac{B'}{2\epsilon}$$

et la pente à la paroi est par conséquent :

$$-\frac{1}{2\epsilon}\left[B' + 2,5/z' + 1,2\,\epsilon \ln(1-2\epsilon z') - 0,6\,\epsilon \ln\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2\,\epsilon C\right]$$

Les deux premiers termes de la parenthèse forment une constante grâce à la loi de variation de $g''y_+^2$ pour les valeurs de y_+ de l'ordre de z et les autres termes ont en facteur ε et sont négligeables.

Comme la loi de quantité de mouvement montre que la pente réduite à la paroi doit être — $1/2\,\varepsilon$ si $\overline{uv}$ s'annule à la paroi, la fonction $g''y_+^2$ doit nécessairement satisfaire à

$$B' + 2{,}5\,/\,Z' = 1$$

condition indépendante de z' qui porte sur l'aire comprise sous la courbe au voisinage de $y_+ = 0$.

Loi de distribution des vitesses.

La loi de distribution des vitesses dans le noyau résulte de l'intégration de la loi des pentes. Si nous retenons $C = 1{,}5$ pour $\varepsilon = \varepsilon_0$ et négligeons $2\,\varepsilon\, z'$ auprès de 1.

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = A - 2\beta \ln\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2{,}5 \ln(1-y) - 0{,}6\, y \ln y - \left(0{,}9 - 0{,}3 \ln\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) y$$

qui diffère de la loi de VON KARMAN par deux termes correctifs faciles à calculer.

La détermination de la constante A à l'aide de l'intégration de $g''y^2$ faite deux fois présente peu d'intérêt, puisqu'il faut en définitive faire appel à l'expérience pour choisir A.

Vitesse moyenne et coefficient de frottement.

La vitesse moyenne et les coefficients de frottement C_f et γ résultent de l'intégration

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{U}{u_*} = \int_0^1 \frac{\bar{u}}{u_*}\, d\, y^2$$

Il n'y a pas grande erreur à étendre l'intégration au delà de l'intervalle $\sqrt{\varepsilon}\, z$ et $1 - \varepsilon\, z'$ avec la loi du noyau.

L'intégration donne

$$\frac{U}{u_*} = A - 4{,}2 - 2{,}6 \ln\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = A - 4{,}2 + 2{,}6 \ln\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0}$$

Il est intéressant de remarquer que le coefficient de $\ln \mathcal{R}$ est légèrement supérieur au coefficient de $\ln(1 - y)$ dans la loi de distribution de vitesse, ainsi que l'indique l'expérience.

La vitesse u est égale à la vitesse moyenne U pour une valeur de y fonction de ε. Il est commode de déterminer en sens inverse la valeur de ε correspondant à la valeur de y par la formule

$$\ln\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{-4{,}2 - 2{,}5 \ln(1-y) + 0{,}6\, y \ln y + 0{,}9\, y}{0{,}3\, y - 0{,}2}$$

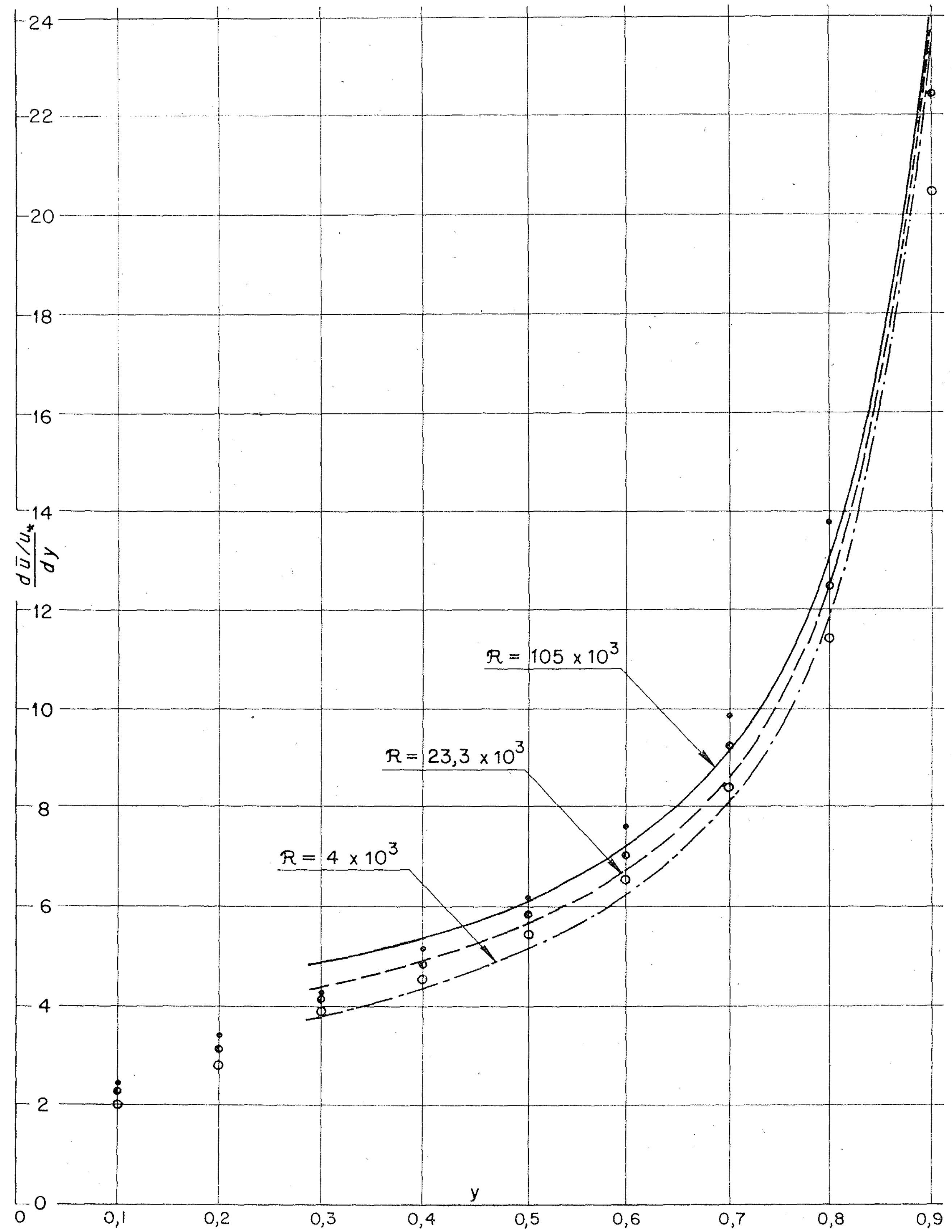
ε est égal à ε_0 pour $y = 0{,}77$ et l'expression complexe ci-dessus peut être remplacée par sa dérivée au voisinage de cette valeur de y

$$y - 0{,}77 \simeq 0{,}03 \log_{10}\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

CONCLUSION.

Les formules théorico-empiriques que nous avons établies représentent assez bien les résultats expérimentaux de NIKURADSE, mais elles contiennent assez de coefficients empiriques pour que ce résultat ne soit pas remarquable.

Nous espérons toutefois que la loi limite nouvelle que nous avons supposée correspond à une réalité physique qui donnerait alors plus de prix aux conclusions qualitatives et numériques que nous avons obtenues au sujet de la concordance des sens de variation et des ordres de grandeur de la loi de distribution de vitesse à nombre de Reynolds donné, de sa variation avec le nombre de Reynolds et du coefficient de frottement.


24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
$\frac{d\bar{u}/u_*}{dy}$
$\mathcal{R} = 105 \times 10^3$
$\mathcal{R} = 23{,}3 \times 10^3$
$\mathcal{R} = 4 \times 10^3$
y
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9