ACCÉLÉRATION DU RÉGLAGE DE VITESSE — DES TURBINES HYDRAULIQUES —

par Jean DANIEL

Ingénieur des Arts et Métiers
et de l'Ecole des Elèves Ingénieurs-Mécaniciens de la Marine

INTRODUCTION

L'énergie électrique offre à son utilisateur de nombreux avantages, et, entre autres, la possibilité de modifier la consommation à son gré, sans aucun préavis, au moins dans la limite de la puissance qu'il a souscrite. Mais comme l'accumulation, économiquement impraticable à grande échelle, n'est pas utilisée, toute variation de puissance consommée doit être sur-le-champ compensée par une variation équivalente de la puissance développée par les machines motrices des groupes générateurs. Tant que cette compensation n'est pas faite, le fonctionnement de tout l'ensemble du réseau et des appareils qui lui sont liés est troublé : ce délai doit être réduit au minimum.

A l'usine productrice, la modification de la demande se traduit par une variation de la vitesse des groupes ; l'achèvement de l'ajustement nécessaire se manifeste par le rétablissement durable de la vitesse. Une action manuelle reste impuissante à répondre aux exigences de réglage actuelles ; le recours à un automate s'impose : celui-ci est le régulateur de vitesse.

Un régulateur de vitesse consiste essentiellement en un tachymètre qui mesure l'écart à corriger et qui, grâce à un amplificateur d'efforts, agit sur l'arrivée du fluide moteur, eau ou vapeur au groupe. Il le fait d'autant plus énergiquement que l'écart relevé est plus grand, tout comme un pendule est ramené vers sa position d'équilibre avec d'autant plus de force qu'il en est plus éloigné. Mais, de même que le pendule ne finit par s'arrêter en position moyenne que s'il subit un certain amortissement, de même aussi un régulateur ne peut, en général, trouver son équilibre s'il n'est pourvu d'un dispositif, accéléromètre ou came de statisme par exemple qui, en le « freinant » dans son action, empêche ou éteigne les oscillations. Un « freinage » suffisant est la condition nécessaire de l'achèvement rapide de la manœuvre, mais un freinage excessif est nuisible : aussi, est-il indispensable de le

doser convenablement. La nécessité est particulièrement pressante lorsqu'il s'agit de turbines hydrauliques, car l'inertie et l'élasticité de l'eau exacerberont la tendance du régulateur à osciller.

Le premier but de ce travail est de préciser le dosage optimum, celui qui permet le réglage le plus rapide. Sa poursuite nous amènera à constater, et même à chiffrer, le maximum imposé par les propriétés de l'eau à la rapidité de réglage dans les conditions actuelles de stabilisation du régulateur. Les six premiers chapitres lui sont consacrés.

Le but dernier n'est autre que l'étude de l'efficacité d'un mode de stabilisation encore inusité, bien qu'il jouisse de propriétés remarquables. Il consiste à ajouter au tachymètre, outre l'accéléromètre ou la came de statisme, un détecteur d'écarts de pression instantanée. Cette addition permet toujours de doubler la rapidité de réglage ; dans certains cas, elle en autorise la multiplication par 4,5 ou même plus, précisément lorsque la disposition actuelle est la moins efficace. L'examen de cette question est fait au chapitre VII.

CHAPITRE PREMIER

LES DIFFICULTÉS RENCONTRÉES DANS LA RÉGULATION DES TURBINES HYDRAULIQUES

1° LES RÉGULATEURS

On attribue la dénomination générale de **régulateur** à des dispositions très diverses qui ont toutes pour but de maintenir constante, ou sensiblement constante, une grandeur déterminée qui, sans elles, varierait beaucoup sous l'effet de causes perturbatrices multiples. On associe d'ordinaire le nom de la grandeur réglée au qualificatif général de régulateur : c'est ainsi

que l'on parle de régulateurs de vitesse, de tension, de débit, de niveau.

Parfois, on range dans la catégorie des régulateurs :

1° des appareils du genre des volants dont l'inertie retarde l'effet d'une perturbation ; le retard est choisi tel que l'écart subi par la variable à régulariser soit encore faible au moment où apparaît une perturbation de sens inverse qui rétablit les choses en leur état initial.

2° des montages qui pallient à un effet de déréglage donné par un effet de sens inverse ayant même cause et, approximativement, même intensité : c'est ainsi que, dans les petites installations à courant continu, on compense par un enroulement série non seulement la diminution de champ due au flux secondaire, mais encore la réduction concomitante de la vitesse du groupe et parfois une partie de la chute de tension en ligne.

3° des mécanismes à fonctionnement intermittent tels que ceux qui remettent en marche le ventilateur d'une installation de chauffage central, lorsque la température de l'eau descend à un minimum fixé, et l'arrêtent quand est atteint un maximum également précisé à l'avance.

Dans tous ces cas, le réglage ne peut être qu'approximatif ou, du moins, est incapable de parer à toutes les éventualités. Le réglage de vitesse que nous envisageons ici exige une plus grande précision ; il doit permettre de réaliser une fréquence parfaitement constante du courant produit par l'alternateur, indépendamment des causes perturbatrices de quelque nature qu'elles soient, et sans tolérer d'autre marge de réglage que celle qui échappe aux appareils mesureurs eux-mêmes. Evidemment, on ne saurait exiger que l'apparition ou la disparition d'une cause perturbatrice n'ait aucun effet transitoire, mais du moins on souhaite qu'il reste purement passager, et même que sa durée et son amplitude soient aussi réduites que possible.

Actuellement, deux types de régulateurs de vitesse répondent à ces exigences ; ils sont connus sous les noms de « Régulateur tachyaccélérométrique » et « Régulateur à asservissement provisoire » ou à « Dash-pot ». Il y a entre eux des analogies assez importantes pour que l'étude de l'un puisse constituer une bonne approximation de celle de l'autre. Sauf indication contraire, nous nous bornerons donc, pour simplifier l'exposé, à celle du premier. De même, dans un but de simplification, nous ne tiendrons pas compte

du fait que le régulateur vise d'ordinaire non le maintien d'une vitesse constante, mais l'observation d'une loi de correspondance, fixée d'avance, entre la vitesse et une autre grandeur qui est tantôt la puissance développée par le groupe (réglage à faible statisme permanent), tantôt la puissance échangée avec le réseau d'interconnection (réglage fréquence-puissance) ; cette circonstance change en effet la nature de la grandeur réglée, mais non la fermeté des exigences du réglage.

2° RÉGULATEUR TACHYACCÉLÉROMÉTRIQUE

Un accéléromètre A (f. 1) et un tachymètre B sont entraînés à la vitesse ω de rotation du groupe à régler. Le manchon M_0 du tachymètre se lève, lors des augmentations de vitesse, de longueurs $k_0 \Delta \omega$ proportionnelles à l'écart $\Delta \omega$ de vitesse ; il s'abaisse en cas de diminution. De même, le manchon M_1 de l'accéléromètre se lève

de quantités $k_1 \frac{d\omega}{dt}$ proportionnelles à l'accélération $\frac{d\omega}{dt}$. Une combinaison de ces deux

mouvements est transmise au tiroir T du servomoteur par une tringlerie que nous avons représentée sur la figure simplement par une barre $M_0 M_1$ de longueur $a + b$. Dans ces conditions, le tiroir se déplace vers le haut lorsque simultanément le groupe fonctionne à vitesse trop élevée et accélère ; inversement, il se déplace vers le bas si le groupe se trouvant à trop faible vitesse ralentit encore ; dans les autres cas, les deux effets s'opposent partiellement et le tiroir subit le déplacement correspondant à leur différence : nous en examinerons plus loin la conséquence.

L'huile sous pression fournie en C par une pompe est admise sur la face droite ou gauche du piston P du servomoteur, suivant que le tiroir est au-dessus ou au-dessous de sa position moyenne ; en même temps, l'autre face est mise en communication avec le retour d'huile D. Ainsi, lorsque le tiroir est levé, l'huile circule suivant le trajet indiqué par les flèches T ; le piston se déplace alors vers la gauche et, grâce à la transmission par bielles et manivelles E, F, G, H, G', H', entraîne un mouvement de fermeture du vannage, vannage qui est représenté ici par l'anneau HH' d'une turbine FRANCIS ou

fig. 1

Schéma de principe
d'un dispositif de réglage tachyaccélérométrique

KAPLAN par exemple. Un abaissement du tiroir provoquerait au contraire un mouvement vers la droite, et une ouverture du vannage. L'installation de la pompe est telle que la vitesse de variation de « l'ouverture » de la turbine est proportionnelle à la levée du tiroir T (on sait que l'ouverture d'un circuit de fluide est le débit de ce circuit sous la pression unité ; il dépend des dimensions et de la disposition des diverses sections offertes au passage du fluide, et spécialement des sections rétreintes telles que celle présentée par le vannage.

Montrons maintenant sommairement que ce réglage mixte permet d'éteindre les écarts de vitesse qui viendraient à se produire, tandis que les réglages élémentaires, tachymétrique pur et accélérométrique pur ne le permettent pas. Nous nous bornerons d'ailleurs au cas hypothétique où la puissance produite par l'eau varierait comme l'ouverture qui lui est offerte. Nous verrons plus loin que cette hypothèse, acceptable pour les turbines à vapeur, ne l'est que très grossièrement pour les groupes hydrauliques.

Tout d'abord, si l'accéléromètre A n'était pas entraîné, le manchon M_1 restant en position moyenne, le tiroir T ouvrirait de quantités

— $k_0 \Delta \omega$ proportionnelles aux écarts de $\frac{1}{a+b}$

vitesse enregistrés par le manchon M_0 du tachymètre. Il en résulterait une variation d'ouverture dont la vitesse serait proportionnelle à $\Delta \omega$ mais par un coefficient de proportionnalité négatif, car l'ouverture doit diminuer lorsque la vitesse est trop grande. Or, à cette variation d'ouverture répond une accélération proportionnelle de la turbine, en sorte que les variations de vitesse de la turbine admettent pour dérivée première, à un coefficient positif près, les variations d'ouverture, et pour dérivée seconde, mais à un coefficient négatif près, les déplacements du tiroir, donc les écarts $\Delta \omega$. En désignant par $-k'_0$ ce coefficient, on a donc :

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta \omega = -k'_0 \Delta \omega \quad (1)$$

C'est l'équation d'un mouvement sinusoïdal autoentreteu, du même type que le mouvement pendulaire non amorti.

L'effet de l'accéléromètre pourrait être analysé de la même manière. Le terme $k'_0 \Delta \omega$ de l'équation (1) serait remplacé par le terme :

$k_1 - \Delta \omega$, en sorte que l'équation du mouvement se limiterait au premier ordre ; les variations de vitesse ne seraient plus pulsatoires, mais apériodiques ; ce mode de réglage n'est pourtant pas acceptable parce qu'après une perturbation (variation de la puissance exigée du groupe par exemple) la vitesse ne reprendrait pas sa valeur initiale.

L'utilisation simultanée des deux détecteurs, tachymètre et accéléromètre, introduit à la fois dans l'équation les deux termes que nous venons d'envisager isolément. Elle s'écrit alors :

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta \omega + k'_1 \frac{d}{dt} \Delta \omega + k'_0 \Delta \omega = 0$$

et caractérise un mouvement pendulaire amorti dont l'influence amortissante est due à l'accéléromètre. Tout écart de vitesse occasionné par un trouble extérieur quelconque doit donc disparaître après une période de transition plus ou moins longue dont le régime sera oscillatoire ou non suivant l'importance relative donnée à l'action du tachymètre.

3° CONSÉQUENCE DU COUP DE BÉLIER

Tout se passerait comme nous venons de le dire, si la puissance produite par l'eau était simplement proportionnelle à l'ouverture qui lui est offerte. En fait, elle est mesurée par le produit du débit par la pression. Le débit lui-même équivaut sensiblement au produit de l'ouverture par la racine carrée de la pression. Au total, à ouverture constante, la puissance varie donc comme la pression élevée à la puissance $3/2$; aussi faudrait-il pour que l'exposé donné des phénomènes de régulation soit applicable aux installations hydrauliques, que la pression de l'eau à l'entrée de la turbine soit constante.

Or, il n'en est pas ainsi. Personne n'ignore que la fermeture brusquée d'une conduite d'eau a pour conséquence un choc, parfois violent, imputable à l'inertie du liquide dont on a arrêté l'écoulement. On sait aussi que ce choc ne reste pas unique, l'onde de pression née au moment de la fermeture se propageant vers l'autre extrémité de la conduite pour s'y réfléchir et revenir produire un nouveau choc, moindre que le premier toutefois ; d'autres chocs de plus en plus faibles lui succèdent à intervalles réguliers, jusqu'à extinction complète de l'onde. Ces phénomènes constituent le « Coup de Bélier » au sens le plus courant. Plus généralement, toute manœuvre de fermeture de faible amplitude donne lieu à des phénomènes de même nature, mais de moindre intensité ; leur importance dépend de la vitesse de fermeture de l'obturateur. De même, les manœuvres d'ouverture de faible amplitude provoquent des effets qui, au signe près, sont identiques à ceux de fermeture ; tous constituent le phénomène du coup de bélier au sens large, le seul que nous retiendrons ici. On voit qu'il a deux causes, auxquelles correspondent ses deux aspects caractéristiques : l'inertie de l'eau provoque une variation de pression, voire un choc ; son élasticité a pour conséquence un retour périodique du trouble, alternativement sous forme de surpression et de dépression.

Dans le réglage automatique des turbines hydrauliques, le Coup de Bélier diminue l'efficacité du régulateur, et surtout retarde son action. En effet, si nous supposons pour fixer les idées, que la puissance développée par le groupe est à un instant donné trop forte par rapport à la demande, le régulateur produit bien une fermeture du vannage, mais la diminution de puissance qui en résulte n'est pas immédiate ; aux premiers instants, la pression s'élève de telle

sorte que le produit de l'ouverture par la puissance $3/2$ de la pression diminue moins que l'ouverture elle-même ; il peut même arriver dans certains cas, que ce produit augmente pendant un court instant, de telle sorte que l'accélération de la turbine commence par augmenter au lieu de diminuer. Dans tous les cas elle diminue au début moins qu'elle ne ferait en l'absence du coup de bélier, et ensuite diminue au contraire davantage, soit simplement parce que le régulateur ainsi gêné a poursuivi plus longtemps son action, soit parce qu'en outre, à la période de surpression a succédé une période de dépression. De ce fait, chacun des mouvements du régulateur, et chaque écart de vitesse est plus ample qu'il ne serait en l'absence de coup de bélier ; en d'autres termes l'amortissement des oscillations du régulateur se trouve diminué, et même s'il est faible transformé en amplification : le coup de bélier est source d'instabilité.

4° TECHNIQUE ANCIENNE

Les premières difficultés concernant la stabilité ont été rencontrées dans les installations de haute chute. On y a observé des oscillations entretenues de régulateurs, ou selon la terminologie technique, des « Pompages » dont la période était voisine de la période propre de la conduite. Celle-ci, qui avait une longueur de l'ordre de 1.500 m. était parcourue par l'onde de pression en 1,5 seconde environ, de telle sorte que les ondes, surpressions et dépressions, se succédaient au vannage à la cadence approximative d'une toutes les trois secondes, soit avec une période de l'ordre de six secondes, sensiblement égale à la période propre du système de régulation. On déclarait alors qu'il y avait résonance entre les oscillations de la conduite et celles du réglage. Le remède consistait à réduire la rapidité d'action du régulateur ; on écartait ainsi le risque de résonance et on diminuait en même temps l'intensité des coups de bélier consécutifs à une variation de charge donnée. En règle générale, les bons auteurs admettaient que la régulation devenait très difficile lorsque le coup de bélier se traduisait par une surpression de l'ordre de 25 à 30 %. Nous verrons au Chapitre II en indiquant les méthodes d'étude de la stabilité, que ce mode d'estimation ne saurait réellement convenir, du moins lorsqu'on cherche une régulation précise ; la surpression maximum dépend en effet des mouvements de grande amplitude, tandis que la naissance et le développement du

pompage relèvent des petits mouvements que régit une loi différente.

Dans les installations de basse chute, les conduites étaient ordinairement assez courtes ou munies de chambres d'équilibre ayant pour effet de maintenir une pression suffisamment constante au vannage. Les incidents n'ont apparu dans ce domaine qu'à l'époque où l'on a considérablement élevé la puissance unitaire des usines.

On a parfois tenté de substituer aux chambres d'équilibre régularisant la pression, des appareils mécaniques connus sous le nom de déchargeurs. Mais pour qu'il tinssent un rôle dans la régulation, il eût fallu les faire entrer en jeu même à l'occasion des petits mouvements, ce qui n'est possible que si, en fonctionnement normal, ils laissent écouler une notable quantité d'eau. On ne peut ordinairement le tolérer: les déchargeurs ne sont donc pas des appareils de réglage, mais de sécurité. On n'a attendu d'eux qu'ils stabilisent le réglage que lorsqu'on a voulu chiffrer par le taux de la surpression maximum, l'étendue du trouble apporté aux mécanismes de réglage par le phénomène du coup de bélier.

5° MÉTHODE DE M. D. GADEN

Monsieur D. GADEN, Directeur des Ateliers des Charmilles à Genève, a édité en 1945 une étude d'ensemble sur cette question, sous le titre de « CONSIDÉRATIONS SUR LE PROBLÈME DE LA STABILITÉ ». Il l'a complétée en collaboration avec trois de ses ingénieurs, par un article dans les « Informations techniques Charmilles n° 2 », sous le titre : « ÉTUDE DE LA STABILITÉ D'UN RÉGLAGE AUTOMATIQUE DE VITESSE PAR DES DIAGRAMMES VECTORIELS EN VUE DE L'UTILISATION DES CRITÈRES DE NYQUIST ».

Dans ces ouvrages, M. GADEN utilise un schéma analogue à celui que nous avons donné : stabilité d'une régulation sans coup de bélier puis modifications apportées par ce phénomène considéré comme parasite. L'exposé est précédé de définitions, notamment celles de la stabilité et de la promptitude du réglage. Le réglage est stable lorsque la puissance consommée restant constante, chaque « petit écart de réglage fortuit est suivi d'un retour au régime dans le temps le plus court, sans surréglages exagérés ni trop répétés, voire, si possible, suivant une loi présentant un caractère aperiodique ».

Quant à la promptitude, elle est d'autant plus grande que, sous l'effet d'un écart de vitesse ε %, une variation dans la même proportion ε % de la puissance est imposée au groupe par son régulateur en un temps plus réduit.

L'étude du coup de bélier est conduite par la méthode d'ALLIEVI qui exige la détermination préalable du rapport $\frac{Z}{4L}$ de la période des oscil-

lations du régulateur, à la période $\frac{4L}{a}$ de la

conduite, temps employé par les ondes de célérité a pour parcourir la canalisation de longueur L deux fois dans chaque sens. C'est un inconvénient sérieux, car il faut, pour calculer le rapport $\frac{Z}{4L}$, émettre des hypothèses précises au sujet du mouvement étudié, et par conséquent, diminuer considérablement le caractère de généralité de la « CONDITION DE STABILITÉ » à laquelle tend le calcul : la condition obtenue ne peut valoir qu'en fonction des hypothèses faites. Aussi, pour obtenir un résultat complet, devrait-on varier les hypothèses et montrer comment évolue alors la « condition », certains éléments qui y apparaissent comme des constantes étant en réalité des fonctions des « hypothèses ». Concrètement, la condition donnée par M. GADEN à la page 147, se traduirait, dans des notations que nous préciseront aux chapitres IV et VI, par l'inégalité :

$$B' < K'$$

où B' est un paramètre dans lequel intervient surtout le coefficient d'action du tachymètre, mais non celui de l'accéléromètre ; K' serait une pseudo-constante dont la valeur varierait avec la hauteur de chute ; l'auteur en sollicite, des exploitants et constructeurs, une évaluation statistique. Nous avons représenté cette condition sur la figure 2 pour un cas particulier, pris à titre d'exemple. La condition réelle, telle que nous l'établirons, s'écrirait :

$$B' < f(A', \rho)$$

f étant une fonction que nous préciserons au Chapitre VI, et spécialement par la figure 29, dont nous donnons ci-après (figure 3) un extrait concernant le même cas particulier pris à titre d'exemple de la condition de M. GADEN. A' est un paramètre caractérisant surtout l'action de l'accéléromètre, et ρ le paramètre principal d'ALLIEVI, inversement proportionnel à la hauteur de chute. La différence des deux expressions consiste en ce que, chez M. GADEN, l'incidence du dimensionnement de l'accéléromètre sur la stabilité est voilée par les hypothèses choisies.

fig. 4

Forme de la condition de stabilité d'après D. Gaden

Pour les figures 2 et 3, on a pris à titre d'exemple le paramètre φ d'Allievi égal à 0,3

fig. 3

Forme de la condition de stabilité que nous établirons (fig. 29)

En somme, la faiblesse de la méthode réside dans le fait qu'elle indique un cas particulier de stabilité au lieu de donner, soit la condition générale, soit tout au moins sa forme mathématique comme le voudrait l'auteur (p. 230).

6° MÉTHODE DE M. P. ALMERAS

M. ALMERAS, Professeur à l'Institut Polytechnique de Grenoble, et Ingénieur aux Ateliers NEYRET - BEYLIER et PICCARD - PICTET, a exposé sous forme d'article dans « LA HOUILLE BLANCHE » une partie de la même question. On se rappelle que les phénomènes de pompage ne se manifestent pratiquement qu'aux deux extrémités de la gamme, c'est-à-dire dans les

installations de chute haute ou très haute, et dans celles de basse ou très basse chute. L'étude d'ensemble a donc un intérêt surtout théorique ; l'ingénieur peut légitimement se borner à envisager les cas extrêmes si son travail en est facilité. M. ALMERAS s'est arrêté aux installations, généralement de basse chute, où la conduite est assez

courte pour que sa période $\frac{4L}{a}$ puisse être

négligée. Dans le coup de bélier, l'élasticité de l'eau ne joue plus aucun rôle, mais seulement son inertie ; toute la masse d'eau contenue dans la conduite au moment d'une manœuvre du vannage change instantanément de vitesse. Ce cas plus simple est connu sous le nom de « Coup de Bélier en masse ».

M. ALMERAS n'utilise pas comme M. GADEN le schéma que nous avons donné pour une première étude des phénomènes ; examen du fonctionnement du régulateur sans coup de bélier, puis analyse des effets dus à ce dernier ; son calcul y gagne de la rapidité et de la clarté. Il en donne trois présentations qui diffèrent par le type du régulateur auquel elles se rapportent : régulateur tachymétrique avec asservissement permanent, régulateur tachymétrique avec dash-pot, et régulateur à indication tachyacclérométrique. Moyennant quelques règles simples de correspondance entre les deux derniers types qui sont seuls à retenir, en pratique, les conditions auxquelles il aboutit entrent dans la forme à laquelle nous avons fait allusion :

$$\begin{aligned} B' &< f_{(A', \rho)} \\ \sim B' &< f_I(A') \end{aligned}$$

f_I étant la forme limite que prend la fonction f pour la valeur particulière prise par ρ dans l'hypothèse retenue ; aussi f_I est-elle fonction de A' seul.

7° BUT ET CONCLUSIONS DES TRAVAUX SUR LA STABILITÉ

En exposant aux §§ 3 et 4 ci-dessus les faits qui ont poussé aux études sur la stabilité, nous avons signalé que les pompages observés étaient dus à une trop grande rapidité des mouvements imprimés au vannage par le régulateur. La solution la plus naturelle pour assurer la stabilité du réglage consiste donc à diminuer cette rapidité, mais cela ne va pas sans inconvénient. En fait, l'ingénieur cherche, sous le nom de stabilité, le réglage le plus rapide possible, ainsi que le dit explicitement M. GADEN dans la définition que nous avons relevée. Le remède à l'une des difficultés, s'il était poussé trop loin, irait donc à l'encontre du but final poursuivi ; aussi important-il de le doser avec art. La détermination du dosage optimum est le but dernier des études sur la stabilité. Dans la terminologie de M. GADEN, nous dirions que l'ingénieur recherche le maximum de promptitude compatible avec une stabilité suffisante. Cette tendance légitime explique pourquoi les conditions de stabilité se présentent comme l'indication d'un maximum de promptitude.

M. ALMERAS va dans cette voie plus loin que M. GADEN. Il a déterminé comment varie avec l'action de l'accéléromètre (dans sa terminologie, « la rapidité de réponse du régleur accélérométrique »), le maximum de promptitude « rapidité de réponse du régleur tachymétrique » qui fait toucher à la limite de stabilité. Aussi lui est-il loisible de choisir la rapidité de réponse accélérométrique de manière à élever au maximum la rapidité limite de réponse tachymétrique au-delà de laquelle la régulation cesse d'être stable. Ce choix définit, selon son auteur, le réglage optimum de l'action accélérométrique (figure 4 ci-dessous) ; quant à l'action tachymétrique, seule

fig. 2

Traduction dans nos notations de la limite de stabilité et du réglage optimum d'après M. Almeras. Dans l'hypothèse de l'auteur, le paramètre ρ d'Allievi est très grand

est indiquée la limite supérieure dont il faut rester assez loin pour que le régime demeure suffisamment stable, mais dont il convient aussi de ne pas trop s'éloigner afin de conserver une vitesse de réglage suffisante.

Signalons enfin une opinion couramment

admise, que justifient les auteurs cités : il y a toujours intérêt, pour augmenter la rapidité d'action du régulateur sans détriment de la stabilité, à augmenter l'inertie du rotor du groupe. Nous aurons l'occasion de montrer au chapitre V (§ 8) que c'est surtout un pseudo-avantage : il n'intéresse qu'un élément de la stabilité, la grandeur des écarts de réglage, mais non leur durée.

8° FONDEMENT ET BUTS DE LA PRÉSENTE ÉTUDE

Nous avons remarqué que le but dernier poursuivi par les ingénieurs s'occupant de la stabilité des mécanismes de régulation est la réalisation d'un optimum. Cependant, M. ALMERAS paraît être le seul à avoir tenté de le préciser par le calcul. Encore n'a-t-il obtenu qu'un résultat à notre avis imparfait. Certes, dans ce domaine qui reste essentiellement pratique, ce serait une erreur de prétendre donner des indications numériques extrêmement précises ; on aurait pourtant souhaité des renseignements moins vagues sur l'importance à donner au tachymètre. En fait, ce n'est possible qu'à condition d'analyser de plus près le but poursuivi et de préciser davantage les notions de stabilité et de promptitude. Ce sera une partie importante de notre travail. Nous verrons que, contrairement à ce qui est apparu jusqu'ici, elles ne sont pas opposées, mais constituent deux aspects différents d'une propriété complexe, chiffrable pourtant : la stabilité, entendue au sens le plus concret. Nous aurons à indiquer comment cette évaluation numérique est possible de manière satisfaisante. En particulier, nous montrerons que la promptitude n'en est qu'une mauvaise mesure qui ne nous paraît pas pouvoir être utilement retenue.

Ces précisions étant données, nous pourrions serrer de plus près la notion d'optimum, en la faisant correspondre à un maximum de la stabilité concrète. Nous en indiquerons d'abord une détermination théorique fondée uniquement sur la considération de constantes de temps et aboutissant à des mouvements de réglage comparables à ceux d'un système pendulaire dont l'amortissement serait réglé exactement à la valeur critique pour laquelle le régime devient apériodique (voir par exemple, la figure 5). Nous donnerons ensuite une détermination plus pratique qui aurait pour analogue dans les systèmes pendulaires

un dispositif à amortissement diminué de manière sensible par rapport au précédent, réalisant donc un régime oscillatoire, mais dont les oscillations autres que la première auraient des amplitudes négligeables en pratique (figure 6). La fixation

Mouvement pendulaire freiné par amortissement critique

Ce mouvement répond à l'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2a \frac{dx}{dt} + b^2 x = 0$$

dans laquelle le paramètre a a été égalé à b .

Mouvement pendulaire moins amorti

On a pris le même terme de rappel b qu'à la figure 5, mais un terme d'amortissement réduit aux $5/10$: $a_1 = 0,5a$. Les pentes à l'origine ont été choisies égales. On voit qu'un retour approché à l'équilibre est ici plus rapide ; un retour strict l'est moins.

Mouvement pendulaire légèrement moins amorti que le précédent

On a conservé le même terme de rappel b , mais pris $a_2 = 0,4a$. La pente à l'origine a été maintenue. Le délai entre le début du mouvement et le premier passage en position normale n'a diminué que de 5 %, mais l'amplitude de la seconde demi-oscillation a augmenté de 80 %.

de la limite des amplitudes négligeables ayant quelque chose d'arbitraire, on pourrait craindre que l'optimum pratique s'en trouve considérablement affecté, mais nous verrons que cette crainte n'a pas un fondement véritable ; déjà pour les systèmes pendulaires, la comparaison des figures 6 et 7 montre que l'on peut modifier beaucoup la limite sans changer sérieusement la durée de l'oscillation unique retenue. Dans ces conditions, l'optimum pratique que nous définirons aura une valeur objective sérieuse.

Les difficultés de réglage s'étant présentées aux deux extrémités de la gamme des hauteurs de chute, l'approximation simplificatrice du « mouvement en masse » nous suffira pour un certain nombre de cas intéressants. Nous éviterons donc de compliquer leur exposé, et nous conduirons d'abord notre étude avec cette hypothèse. Le cas des hautes chutes sera examiné ensuite. Nous lui trouverons un optimum analogue au précédent, mais il faudra pour cela employer une méthode de calcul différente, apparentée à celle de NYQUIST. Nous en donnerons d'ailleurs une première application en reprenant le calcul de la limite de stabilité que M. CADEN n'a pas mené à son vrai terme.

Nous aurons alors atteint le but réel que plus ou moins ouvertement, poursuivent les Ingénieurs et situé le « mur » auquel se heurte l'accélération du réglage de vitesse des groupes hydro-électriques. Nous poursuivrons en montrant que l'existence de ce « mur » est liée à la conception actuelle des régulateurs et qu'en particulier l'adjonction aux détecteurs habituels : tachymètre et accéléromètre par exemple, d'un troisième détecteur, manométrique celui-là, suffit à le faire disparaître. L'addition proposée rend théoriquement possible tel accroissement que l'on veut de la célérité du réglage ; une limite pratique demeure, mais dûe à d'autres incidences, elle est plus reculée. Il semble bien, d'après ce que nous avons calculé, qu'il n'y ait aucune difficulté à réduire de plus de moitié le délai nécessaire pour retrouver un régime permanent après une petite variation de charge ; dans les installations de basse chute, la réduction peut être plus importante, et le délai tomber au 1/4 ou même, si l'inertie de l'eau est grande, au 1/5 de sa valeur actuelle. La disposition proposée est donc de nature à améliorer sérieusement les qualités et spécialement la rapidité de réglage de vitesse des groupes hydro-électriques.

CHAPITRE II

LA NOTION DE STABILITÉ

1° LA NOTION ÉLÉMENTAIRE

Les manuels de statique définissent la stabilité d'un équilibre à peu près dans les termes suivants : un corps est en équilibre stable dans une position donnée, si lorsqu'il en est écarté, il tend à y revenir ; son équilibre est instable si dans les mêmes conditions, il tend au contraire à s'écarter davantage ; l'équilibre indifférent est le cas limite qui sépare les deux précédents. La définition est appuyée d'un exemple ordinairement emprunté au cône reposant sur un plan horizontal : ce solide est en équilibre stable sur sa base, instable sur sa pointe, en équilibre indifférent enfin lorsqu'il s'appuie sur le plan par une génératrice (figure 8). Cette définition est

fig. 8

Images classiques des équilibres : stable, instable, indifférent. Elles masquent l'influence capitale de l'amortissement qui s'y présente sous forme de choc inélastique.

d'ordre qualificatif. Elle traite uniquement de l'existence et de la non-existence de la stabilité, mais non de son degré. Le sens commun va plus loin et tente de graduer la stabilité : les expressions « plus stable » et « moins stable » ont une signification dans chaque cas concret. Ainsi pour reprendre le même exemple, supposons deux cônes de mêmes dimensions, reposant sur un plan horizontal par leurs bases, mais l'un de plomb massif, l'autre en tôle légère ; on estimera généralement que le premier est plus stable, parce qu'il faut un plus grand effort pour l'écarter de sa position d'un angle donné ; plus savamment on dira que, toutes choses égales d'ailleurs, la force de rappel est plus grande pour le cône lourd. De même, toujours en comparant des cônes, on pourrait noter l'influence des proportions. A poids égal, celui qui aurait une base

moins étendue et une hauteur plus grande serait réputé moins stable ; on justifierait encore cet avis par la considération des forces de rappel.

2° INSUFFISANCE DE CETTE NOTION ÉLÉMENTAIRE

Si classiques qu'ils soient, ces exemples sont défectueux : ils masquent en effet un élément important de la stabilité ; parce qu'on admet implicitement l'amortissement, on omet d'en parler. Il se présente là sous la forme d'un choc inélastique. Si par contre on prenait des exemples conformes au langage adopté, c'est-à-dire ne comportant pas d'amortissement, le cas d'équilibre stable ne se traduirait plus par un retour direct à la position d'équilibre, mais par une oscillation indéfinie autour d'elle. Celui qui tiendrait à garder l'image du cône ; devrait supposer le solide et le plan parfaitement élastiques et placés dans le vide. Nous pensons préférable de recourir à un autre modèle aussi simple, celui d'une bille reposant sur une feuille cylindrique à génératrices horizontales. La bille ne peut être en équilibre en un point que si le plan tangent au cylindre y est horizontal. Cet équilibre est stable d'après la définition, si la concavité du cylindre est tournée vers le haut, instable si elle est tournée vers le bas, indifférent si la courbure est nulle (figure 9).

fig. 9

Autres images d'équilibre : stable, instable, indifférent, d'après la définition classique. Elles montrent que sans amortissement (frottement), à l'équilibre réputé stable correspond un mouvement oscillatoire entretenu.

Doit-on, malgré cette mise au point, conserver la définition courante ? Le solide susceptible d'osciller indéfiniment autour de sa position d'équilibre tend bien dès qu'on l'en écarte, à y revenir, et par conséquent, se trouve qualifié « stable ». Faut-il au contraire, avec le sens commun, affirmer que l'équilibre est stable seulement si le retour est effectif et durable ? La stabilité ne peut plus alors être mesurée par l'effort de rappel ; tous nos cônes, lourd ou léger, trapu ou élancé, s'ils sont élastiques, sont à classer ensemble ; leur stabilité est nulle. Pour chiffrer la

stabilité, il faut nécessairement faire état d'un amortissement, soit de manière explicite, soit au moins de manière implicite.

3° C'EST UNE NOTION AMBIVALENTE

Par ailleurs, il est manifeste que l'amortissement seul ne saurait suffire, à moins qu'il ne s'agisse de frottements solides ou de phénomènes analogues qui constituent en fait une catégorie spéciale dont l'étude particulière montre que l'on a intérêt à les éviter, non à les rechercher. Ainsi, un cône appuyant par sa pointe sur un plan, finira toujours, même s'il est immergé dans un liquide visqueux, par se coucher sur une génératrice.

En somme, pour qu'il y ait stabilité réelle, il faut à la fois une force de rappel et un amortissement ; il y a instabilité dès que l'un ou l'autre de ces éléments change de signe ; les cas limites sont :

1° une indifférence à la position, lorsque la force de rappel devient nulle ;

2° un mouvement périodique auto-entretenu, lorsque c'est au contraire l'amortissement qui disparaît.

Peut-être sera-t-on tenté de dire que la stabilité doit être mesurée par le produit de ces deux éléments caractéristiques, puisqu'elle s'annule avec chacun d'eux. Ce serait évidemment une erreur, le changement de signe du second élément ne rétablissant pas la stabilité détruite par le changement de signe de l'autre. Il faut donc renoncer à exprimer la stabilité par un seul nombre et accepter d'en utiliser deux. Reste à voir si les grandeurs que nous avons indiquées sont les plus convenables ou si d'autres plus ou moins directement liées à elles sont préférables.

La force de rappel n'a de sens que par référence à une amplitude d'écart donnée, puisqu'elle est, en première approximation, proportionnelle à l'écart. Il conviendrait donc de parler plutôt de « loi de rappel » que de « force de rappel ». L'intérêt de cette caractéristique serait qu'à amortissement nul (ou même à amortissements équivalents, à condition de préciser ce terme), deux systèmes ayant même loi de rappel, prendraient des écarts égaux sous l'effet d'impulsions égales. Par contre, leurs pseudo-périodes seraient entre elles comme les masses mises en jeu. Inversement, si l'on voulait caractériser la stabilité par la pseudo-période, les impulsions

nécessaires pour provoquer des écarts identiques seraient entre elles comme les masses. Adopter la loi de rappel ou la pseudo-période comme l'un des éléments de mesure de la stabilité serait donc se contraindre à utiliser en outre non seulement une mesure d'amortissement, mais une mesure de masse, complication qu'il est souhaitable d'éviter.

Pour une autre raison, de son côté, la valeur du terme d'amortissement ne peut pas non plus être adoptée comme caractéristique. Trop forte, elle empêche le retour à l'équilibre (fig. 10) ;

fig. 10

Mouvement pendulaire apériodique

Le terme d'amortissement est trop élevé : le mouvement résulte de deux composants dont l'un s'éteint de plus en plus vite lorsqu'on augmente le terme d'amortissement tandis que l'autre, au contraire, dure de plus en plus longtemps.

trop faible, elle n'arrête pas les oscillations (fig. 11). La stabilité requiert un compro-

fig. 11

Mouvement pseudo-périodique faiblement amorti

Le terme d'amortissement est si faible que le mobile oscille longtemps avant de retrouver son équilibre.

mis entre ces deux extrêmes ; c'est l'amortissement qui permet de ramener dans le moindre délai, l'écart, ou si le régime est oscillant, son

amplitude, au-dessous de telle fraction donnée à l'avance, de l'amplitude première. Cette fraction ne peut être nulle sans que le délai soit infini. Le cas où elle est infiniment petite correspond, dans les phénomènes simples envisagés, à l'amortissement critique ; la dénomination pourrait d'ailleurs être étendue sans inconvénient aux phénomènes plus complexes. Lorsqu'elle est moins petite, l'amortissement peut être plus faible, et par conséquent le premier retour plus rapide (comparer les figures 5 et 6) ; à condition qu'elle reste assez faible pour être pratiquement négligeable, le premier retour pourra être considéré comme définitif (comparer les trois figures 6, 7 et 11). Lorsqu'elle atteint la limite de ce que l'on peut négliger, le retour est le plus rapide que permettent les conditions de rappel envisagées ; l'amortissement qui permet ce retour rapide constitue un optimum pratique, puisque c'est lui qui offre le maximum de stabilité (retour définitif le plus rapide). De son côté, l'amortissement critique correspondrait, à conditions de rappel données, à un maximum théorique de stabilité : le retour définitif strict est en effet, dans ce cas, plus rapide, bien que le retour définitif approché le soit moins.

4° CARACTÉRISTIQUES RETENUES

On voit que ni la force de rappel, ni celle d'amortissement ne se prête commodément à caractériser la stabilité. Ne pouvant trouver nos éléments de mesure dans les causes, nous sommes amenés à les reconnaître dans les effets. Parmi ceux-ci, deux sont surtout à retenir :

1° un corps est en équilibre d'autant plus stable que, sous l'effet d'une impulsion donnée, il s'écarte moins de sa position ;

2° de même, un équilibre doit être d'autant plus sérieusement qualifié de stable qu'après avoir été troublé il se rétablit dans un moindre délai.

Chacun d'eux a un intérêt propre, de telle sorte qu'une perte sur l'un ne saurait être véritablement compensée par un gain sur l'autre. En tout cas, aucune règle d'équivalence ne peut être donnée à priori : on doit, pour permettre d'apprécier convenablement la stabilité, chiffrer l'un et l'autre.

Nous conviendrons d'appeler, ainsi que nous l'indiquons sur la figure 12 :

1° LABILITÉ : l'écart produit par une impulsion unité ;

2° DÉLAI DE RETOUR : ou simplement **DÉLAI**, le temps nécessaire pour obtenir pratiquement le retour définitif.

Nous dirons donc que, pour accroître la stabilité, il suffit de diminuer soit la stabilité, soit le délai ; pour l'annuler, de faire croître indéfiniment l'un ou l'autre. Nous ne pourrions strictement comparer entre elles des stabilités, si leurs différences en labilité et en délai sont de sens inverse : lorsque cette éventualité se produira, nous devrons recourir à un critère plus synthétique, dont le choix dépendra des circonstances. Donnons un exemple emprunté aux problèmes que nous étudierons en détail dans la suite. Les ordonnées x mesureront les écarts relatifs de vitesse angulaire du groupe à régler et

l'intégrale : $T_1 = \int_0^\infty x \, dt$ représentera un

temps que nous pourrions appeler « l'avance prise par le groupe » au cours de la période transitoire. Le trouble de la vitesse se traduit en effet par une rotation supplémentaire d'un angle φ qui, si on le rapporte à la vitesse normale ω ,

est défini par le temps $T_1 = \frac{\varphi}{\omega}$. Plus concrè-

tement, les horloges synchrones du groupe prennent pendant le trouble une « avance » T_1 . Si l'on attribue un intérêt primordial à la limitation d'une telle avance, ou, ce qui revient au même, à la vitesse moyenne pendant une durée limitée, de l'ordre de la minute par exemple, on adoptera un critère apte à qualifier l'intégrale T_1 ; le plus simple sera de s'en tenir au produit $A.D$ de la labilité par le délai, surtout si les courbes $x(t)$ que l'on veut comparer sont « semblables ». Il s'agit d'ailleurs ici d'une similitude au sens de la mécanique. On sait qu'elle est plus large que la similitude géométrique, et requiert seulement que les courbes puissent être superposées par amplification ou réduction des échelles indépendamment les unes des autres.

Si l'intérêt se porte avant tout sur la vitesse instantanée, on adoptera un critère qui indique l'importance de l'écart moyen quadratique de la vitesse sous l'influence des variations aléatoires de la demande. Le produit $A\sqrt{D}$ de la labilité par la racine carrée du délai conviendra dans les mêmes conditions que le produit AD dans l'hypothèse précédente.

5° EXTENSION DES NOTIONS RETENUES

La notion de stabilité ne se limite pas à l'étude des corps au repos. Elle s'étend naturellement à

tous les cas où l'on veut maintenir constant non plus un paramètre de position, mais un autre paramètre quelconque. C'est ainsi que l'on parle d'une vitesse stable pour un groupe électrogène par exemple, d'une amplitude d'oscillation stable pour un système pendulaire, d'une période stable pour un oscillateur à relaxation... etc. La notion reste la même ; seul change l'objet auquel elle s'applique : une vitesse, une amplitude, une fréquence... au lieu d'une position. Chaque fois on pourra définir une labilité, ou facilité à perdre l'équilibre, et un délai, ou temps nécessaire à la résorption d'un écart ; tous deux seront ordinairement indépendants de l'amplitude de l'écart, pourvu qu'elle reste petite.

De toute évidence, la définition concrète de la labilité variera d'un cas à l'autre ; l'objet de la stabilité étant changé, la nature de l'écart à préciser le sera nécessairement ; il en sera de même de celle de l'impulsion susceptible de le produire. Quant au délai, il sera toujours mesuré par un temps, mais il gardera un certain caractère pragmatique, du fait qu'on doit, pour le définir, décider d'une limite au-dessous de laquelle les écarts résiduels seront négligés. D'ailleurs, tant que la décision variera dans les limites normales, elle modifiera peu le délai, ainsi qu'on peut le reconnaître à l'aspect de la figure 12 ; cette notion a donc bien une portée suffisamment générale.

6° COMPARAISON ENTRE CES NOTIONS ET CELLES QUI SONT COURAMMENT ADMISES EN MATIÈRE DE RÉGULATION

La rapidité de réponse tachymétrique de M. ALMERAS et la promptitude de M. GADEN correspondraient assez exactement à l'effort de rappel dans l'exposé qui précède. En les augmentant, on diminue la période du mouvement, mais on augmente le délai de retour définitif, car on se rapproche de la limite de stabilité à forme d'oscillations entretenues, et de ce fait le délai retenu doit comporter plusieurs périodes, et non plus une seule ou même une demi-période, comme dans les exemples donnés par la figure 12. Pour éviter cet inconvénient, on est conduit à augmenter l'inertie du groupe ; on rétablit ainsi la pseudo-période à sa valeur initiale, mais on rétablit de même le délai ; la labilité toutefois se trouve réduite. Le résultat est, sans aucun doute, un accroissement de stabilité en un certain sens, mais il n'est pas, comme on le croit souvent, une augmentation de la rapidité

de réglage. Tout cela apparaîtra d'ailleurs plus clairement au cours des calculs du chapitre V, § 8.

fig. 12

Labilité et délai de retour

On a reproduit ici les trois courbes des figures 5, 6 et 7. Les ordonnées OA_1 , OA_2 , OA_3 constituent des mesures de la labilité des trois systèmes pendulaires pris comme exemples ; ce sont les amplitudes correspondant à une même impulsion donnée à chacun d'eux. (L'égalité des impulsions se traduit ici par celle des pentes à l'origine).

L'abscisse OD_2 mesure le délai minimum de retour si l'ordonnée OA'_2 correspond au maximum de ce que l'on accepte de négliger. Si l'on veut bien négliger jusque OA'_3 , le délai se réduit à OD_1 à peine inférieur à OD_2 .

Ce que l'on désigne couramment, en matière de régulation, sous le nom de stabilité, se prête mal à une comparaison avec les notions que nous proposons. Une seule chose y est très nette : la limite entre stabilité et instabilité. On y ajoute parfois une description des conditions auxquelles se réalise un délai réduit, mais elle reste nécessairement imprécise, ces conditions étant partiellement contradictoires. Nous avons indiqué, au chapitre premier (§ 5), la définition de M. GADEN ; nous n'y reviendrons pas.

Divers essais ont été tentés dans le même sens que le nôtre pour caractériser les écarts momentanés par des mesures d'effets et non de causes.

La plupart ont porté sur l'appréciation du temps nécessaire au retour à l'équilibre, temps qui est effectivement le plus important des deux éléments de la stabilité. Ils partent d'ailleurs d'un présupposé commun qu'ils indiquent plus ou moins explicitement, et dont nous contestons la validité générale ; le retour s'effectuerait par une série d'oscillations. Tantôt, on prend la durée d'une oscillation pour unité de temps, et l'on mesure soit la variation de l'amplitude pendant cette durée (rapport d'un maximum d'élongation à celui de même sens qui le suit, ou DECREMENT), soit le nombre d'oscillations nécessaires pour obtenir une réduction d'amplitude dans un rapport donné, ordinairement

réduction au $1/10^e$ de la valeur initiale. Tantôt, on agit comme si la durée d'une oscillation était négligeable, et l'on s'intéresse seulement à la courbe exponentielle de variation d'amplitude ; elle est qualifiée par sa constante de temps (temps nécessaire à la réduction dans le rapport de e à 1) ou l'un de ses multiples (rapports de 4 à 1, ou de 10 à 1, ou même de 526 à 1, le temps correspondant à ce dernier cas mesurant la période imaginaire de l'exponentielle). Notre notion de délai écarte l'hypothèse qui fonde ces diverses mesures, car une bonne régulation doit, si c'est possible, éviter qu'elle se réalise. Dans les cas où elle s'imposerait, le délai deviendrait lui aussi un multiple de la constante de temps ; il perdrait d'ailleurs son caractère essentiel de mesure objective, car il dépendrait, pour une large part, du choix du seuil au-dessous duquel les écarts sont réputés négligeables. Nous retrouverions, suivant nos goûts, l'un ou l'autre des systèmes de mesure qui viennent d'être indiqués.

7° REMARQUE

L'étude de l'existence de la stabilité n'exige pas le recours aux déterminations quantitatives. Avant même de savoir si un système donné reviendra vite après un trouble à son état de régime, il peut être très utile de savoir s'il y reviendra, que ce soit d'ailleurs d'un mouvement périodique ou à travers une série d'oscillations. Cette recherche constitue l'étude QUALITATIVE de la stabilité.

Dans bien des cas, et spécialement lorsqu'il s'agit de la régulation de vitesse des groupes électrogènes, il est en outre important que l'écart transitoire soit limité en ampleur et en durée : il faut, pour s'en assurer, une étude QUANTITATIVE de la stabilité ; c'est à permettre ce second travail que visent nos définitions de la labilité et du délai ; nous les préciserons au moment opportun pour le cas particulier qui nous retiendra.

CHAPITRE III

LES MÉTHODES D'ÉTUDE DE LA STABILITÉ

1° LES ÉQUATIONS SONT LINÉAIRES

Nous avons signalé, au premier chapitre, que, dans certaines conditions, le régulateur ne parvient pas à maintenir constante la vitesse, mais, par ses mouvements de réglage, provoque des

oscillations périodiques des diverses grandeurs, oscillations dont l'amplitude est parfois si considérable qu'elle va jusqu'à rendre impossible le maintien en service du réglage automatique. Ce phénomène peut être expliqué de la manière suivante par référence à l'action humaine au cours d'un réglage manuel. Lorsqu'un homme suffisamment habile est chargé d'un réglage, il procède par interventions successives et attend avant chacune de celles-ci, de connaître, au moins de manière approchée, le résultat de la précédente. Un régulateur, au contraire, agit de manière continue, et, d'ordinaire, corrige tant qu'un écart subsiste ; si son action est tellement rapide que l'appareil gouverné par lui ne suive qu'avec un retard considérable, il continue beaucoup trop longtemps son action correctrice, et substitue donc à l'écart de réglage initial un écart, de sens inverse il est vrai, mais gênant pourtant, car son amplitude atteint ou même dépasse celle de l'écart à corriger. Dans ces conditions, les mouvements s'entretiennent d'eux-mêmes, ou parfois s'accroissent progressivement, jusqu'à ce que des éléments nouveaux viennent les limiter : frottements accrus par les vitesses plus grandes, butoirs rencontrés par les mécanismes qui oscillent... ; il est clair qu'on ne saurait compter sur de telles limitations pour assurer la stabilité du réglage.

L'étude de la stabilité est donc, avant tout, une étude de la NAISSANCE des oscillations. Aussi, doit-elle se limiter à la considération de petits mouvements de réglage, au cours desquels les divers éléments caractéristiques : vitesse, débit de fluide moteur... ne subissent que des variations petites devant leurs valeurs moyennes respectives. Ces variations peuvent être assimilées à des infiniment petits par rapport auxquels les infiniment petits d'ordre supérieur sont négligeables : de ce fait, les équations du mouvement sont linéaires ou susceptibles d'être remplacées par des équations linéaires.

2° LEUR ÉTUDE QUALITATIVE

Parmi les solutions de ces équations, seules celles qui définissent le « mouvement libre » nous intéressent lorsque nous cherchons si, de soi, la régulation est stable ou instable. Nous ne visons pas alors à savoir si une action étrangère donnée provoquera un trouble de réglage important ou minime, ce qui serait déjà déterminer la labilité, mais bien si, indépendamment de toute

intervention extérieure, le régulateur maintiendra la vitesse ou lui imposera des variations périodiques entretenues ou même amplifiées. Au point de vue mathématique, nous n'aurons donc à retenir que des équations sans second membre.

Les solutions particulières peuvent être mises sous la forme :

$$x = X_1 e^{(\lambda_1 + i\omega_1)t} + X'_1 e^{(\lambda_1 - i\omega_1)t}$$

où x est l'une quelconque des variables, la vitesse par exemple, $\lambda_1 + i\omega_1$ une quantité complexe indiquant l'évolution en fonction du temps (t) de cette grandeur ; elle est l'une quelconque des racines d'une équation algébrique que l'on appelle la résolvante du système d'équations différentielles linéaires régissant les petits mouvements. X_1 , X'_1 sont des constantes arbitraires ou parfois des polynômes en t s'ils correspondent à une racine double ou multiple de la résolvante. La solution générale est la somme de toutes ces solutions ; elle n'est complètement déterminée que par l'indication précise des conditions initiales, car c'est la fixation de ces dernières qui lève l'arbitraire des constantes d'intégration. Les variations de x correspondant à chacune des solutions particulières, peuvent être considérées comme le produit par le facteur exponentiel $e^{\lambda_1 t}$, soit de grandeurs constantes, c'est le cas si ω_1 est nul, soit plus généralement de fonctions sinusoïdales de pulsation ω_1 . Elles s'atténuent dans le temps lorsque λ_1 est négatif, et s'amplifient dans le cas contraire ; pour cette raison, la grandeur opposée $-\lambda_1$ est appelée facteur d'amortissement ; son inverse, qui a les dimensions d'un temps, est utilisé sous le nom de constante de temps.

Dans ces conditions, il faut et il suffit, pour que la régulation soit stable, qu'aucune des racines de la résolvante n'ait une partie réelle positive.

3° CONDITIONS D'HURWITZ

En 1894, à la demande de STODOLA, le mathématicien allemand HURWITZ a, pour les équations à coefficients constants, explicité cette condition en fonction des coefficients de la résolvante. Il donne un groupe d'inégalités qui doivent être satisfaites toutes simultanément. Sa présentation est élégante et mérite d'être signalée. Il suppose une équation écrite sous la forme :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

le premier coefficient a_0 étant positif. Il forme le déterminant suivant d'ordre n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

La première ligne de celui-ci est constituée par les coefficients d'indices impairs, suivis d'autant de 0 qu'il en faut pour compléter à n le nombre des termes. La seconde ligne est constituée de même, mais à l'aide des coefficients d'indices pairs cette fois. La troisième et la quatrième ligne commencent chacune par un 0 et reproduisent ensuite respectivement la première et la seconde. La cinquième et la sixième les reproduisent aussi, et de même les autres, par couples toujours, mais, à chaque reproduction, le nombre des 0 placés au début de la ligne augmente d'une unité. Les conditions sont alors les suivantes :

1° Tous les coefficients : $a_1, a_2, \dots$ doivent être positifs.

2° Le déterminant Δ_n et tous ses mineurs (tels que Δ_{n-p} obtenu en prenant les $n-p$ premiers termes des $n-p$ premières lignes de Δ_n) doivent être positifs.

D'autres formes qui n'ont pas la même élégance, mais sont plus immédiatement utilisables, ont été données par divers auteurs, ROUTH et BLONDEL notamment. On pourra facilement retenir les formes symétriques suivantes qui correspondent aux cas les plus fréquents :

Coefficients positifs et $a_1 a_2 > a_0 a_3$ pour le troisième ordre.

Coefficients positifs et

$$a_2 > a_0 \frac{a_3}{a_1} + a_1 \frac{a_4}{a_3} \text{ pour le quatrième.}$$

4° LES CAS LIMITES

Lorsque l'une des inégalités exigées pour la stabilité n'est pas satisfaite, l'une au moins des racines a une partie réelle positive, de telle sorte que l'un des composants du mouvement libre s'amplifie progressivement. Celui-ci a d'ailleurs une forme oscillatoire ou non, suivant que la racine dont la partie réelle est positive comporte en outre une partie imaginaire, ou au contraire n'en comporte pas. A la limite, lorsque deux

expressions dont l'une devrait être supérieure à l'autre se trouvent égales, une racine a une partie réelle de signe indéterminé, donc nulle ou infinie, rien ne nous autorisant, au point de vue mathématique, à décider a priori laquelle de ces deux éventualités se trouve réalisée.

L'équation résolvante et sa réciproque (équation dont chaque racine est l'inverse d'une racine de la résolvante) ont en effet des coefficients identiques et symétriquement disposés, en sorte qu'elles se trouvent régies par les mêmes conditions d'HURWITZ. Ainsi l'équation :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

est équivalente à :

$$a_n (1/x)^n + a_{n-1} (1/x)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{1}{x} + a_0 = 0$$

Quatre cas limites sont donc mathématiquement possibles :

1° **Racine réelle nulle** : ce cas correspond à l'équilibre indifférent de la définition classique (3° cas de chacune des figures 8 et 9). Ce serait aussi celui d'un régulateur de vitesse dont l'action serait purement accélérométrique. Dès qu'un écart de vitesse se produirait, l'accéléromètre réagirait de manière à supprimer l'accélération, donc à limiter l'accroissement de l'écart ; il ne ferait pas disparaître l'écart de vitesse lui-même. Les diverses perturbations n'auraient sur la vitesse que des effets individuels limités, mais le cumul de ceux-ci aurait pour conséquence une « dérive » de vitesse que l'on ne saurait tolérer (fig. 13). Dans le langage adopté au cha-

fig. 13

Variations de la vitesse N dans un réglage purement accélérométrique, abstraction faite du coup de bélier.

Une perturbation au temps t_1 fait passer de manière apériodique la vitesse de N_0 à N_1 ; une autre à l'instant t_2 la fait passer de N_1 à N_2 ; une troisième la fait passer de N_2 à N_3 , et ainsi de suite.

pitre II, nous dirions que le délai a crû au delà de toute limite, et que c'est ce qui rend le régime inacceptable malgré une labilité finie.

2° **Racine purement imaginaire** (partie réelle nulle) : ce cas est le premier de chacune des figures 8 et 9 si les effets d'amortissement y sont négligés. A s'en tenir trop strictement aux termes de la définition classique, il devrait donc être réputé stable. En fait, il est instable, faute d'amortissement. Ici encore, le délai a crû au delà de toute limite, bien que la labilité soit restée finie. Une réalisation de ce cas, dans le problème qui nous intéresse, toujours avec l'hypothèse du coup de bélier négligeable, serait fournie par le réglage purement tachymétrique, c'est-à-dire ne recourant à aucun des moyens de stabilisation que constituent l'usage de l'accéléromètre ou de l'asservissement, ou simplement le réglage direct, qui, de ce point de vue, équivaut à un asservissement. La variation de vitesse dans ce réglage est représentée par la figure 14 : elle est une fonction modulée du temps, ou, si l'on préfère, subit des écarts qui sont fonction sinusoïdale du temps. BLONDEL a désigné ce fonctionnement sous le nom de « RÉGIME ÉOLIEN ». On remarquera que chacune des perturbations modifie, dans un sens ou dans l'autre, l'amplitude de modulation, à peu près comme dans le cas d'une racine réelle nulle elle modifierait l'écart ; entre les deux, il y a pourtant une différence : dans le réglage accélérométrique,

le sens de l'écart additionnel dépendant uniquement de celui de la variation de charge qui l'a provoqué, les écarts successifs ne peuvent être indéfiniment de même sens ; dans le réglage tachymétrique, au contraire, le sens de l'effet dépend de la phase de la cause relativement à la modulation antérieure : seule la loi des grands nombres interdit dès lors une addition arithmétique indéfinie.

3°, 4° **Racines à partie réelle infinie.** — Ces deux cas, dénués d'intérêt pratique, peuvent surprendre à raison de leur caractère paradoxal. Pour réaliser une grande stabilité, on modifierait un ou plusieurs paramètres convenablement choisis en vue d'augmenter l'amortissement ; celui-ci, pour une certaine combinaison limite des paramètres, croîtrait indéfiniment, ce qui semble être un résultat parfait quant à la stabilité ; mais à la même combinaison limite des paramètres, atteinte par une évolution inverse, correspondrait une racine à partie réelle positive croissant elle aussi indéfiniment, ce qui serait le comble de l'instabilité. Le paradoxe est levé par une révision des hypothèses faites ; les mouvements réels ne sont jamais infiniment rapides et ceux que l'on calcule n'apparaissent tels que parce qu'on a laissé de côté des effets d'inertie, sans doute négligeables à l'échelle où l'on travaille d'ordinaire, mais cessant de l'être au moins dans les conditions spéciales envisagées.

5° CRITÈRE DE NYQUIST

Au point de vue pratique, l'utilisation des conditions d'HURWITZ sous l'une ou l'autre de leurs présentations, souffre de deux difficultés essentielles :

1° elle convient seulement aux équations à coefficients constants ;

2° elle exige la connaissance individuelle des divers coefficients, donc le calcul ou la mesure d'un nombre souvent important de paramètres.

L'ingénieur américain NYQUIST a donné, en 1932, une méthode qui, dans une large mesure, échappe à ces contingences : il l'a étudiée pour les dispositifs utilisés en électricité dans la technique des courants faibles (amplificateurs notamment), mais elle s'étend sans difficulté sérieuse aux installations mécaniques. Nous nous bornerons à l'exposer pour ce dernier cas.

Supposons d'abord que nous désirions étudier la stabilité d'un mécanisme de régulation entiè-

fig. 14

Variation de la vitesse N dans un réglage purement tachymétrique, abstraction faite du coup de bélier.

Une perturbation au temps t_1 imprime à la vitesse une variation modulée entre N_1 et N'_1 ; une seconde perturbation à l'instant t_2 porte les limites de la modulation à N_2 et N'_2 ; il se peut qu'une troisième perturbation réduise l'amplitude de modulation.

rement monté sur le groupe qu'il gouverne, disons, pour fixer les idées sur un objet assez simple : un groupe turbo-alternateur à vapeur et son régulateur de vitesse. On connaît l'exposé classique du processus de réglage : lorsque la vitesse est trop élevée, les masses pendulaires du régulateur de vitesse s'écartent, et soulèvent le manchon du tachymètre ; celui-ci, par une tringlerie appropriée, déplace le tiroir du servomoteur dans un sens tel qu'il en résulte un mouvement de fermeture de l'obturateur, exactement comme nous l'avons exposé à propos de la figure 1 pour les turbines hydrauliques. La puissance motrice diminue alors et la vitesse revient vers sa valeur normale, la dépassant même d'ordinaire pour prendre un écart momentané de sens inverse au premier. Il y a là toute une cascade de causes et d'effets successifs formant une sorte de chaîne fermée sur elle-même : une variation de vitesse, cause déclenchante de tout le processus, se retrouve en effet comme résultat final du même processus ; la nouvelle variation s'ajoute alors algébriquement à la précédente pour un nouveau cycle, et ainsi de suite, jusqu'à réalisation d'un régime d'équilibre, soit directement et sans autre intervention, soit par entrée en jeu de phénomènes nouveaux et anormaux : bouts de courses, ruptures... La chaîne peut d'ailleurs avoir diverses ramifications : ainsi l'existence d'une came de statisme divise en deux l'effet du servo-moteur sur son propre tiroir : d'une part, l'action normale sur l'obturateur provoque une variation de puissance, donc de vitesse, et par là un déplacement du tachymètre entraînant un mouvement du tiroir ; d'autre part, une action spéciale directe qui, à tout déplacement de l'obturateur, fait correspondre immédiatement un mouvement du tiroir, effet spécial qui se superpose à l'effet normal précédent.

NYQUIST pratique une coupure dans cette chaîne, séparant par exemple la tige du tiroir de la bielle qui la commande, de manière à pouvoir observer comment la chaîne « répond » aux excitations qui lui sont imposées. Il utilise en particulier des variations sinusoïdales. Dans notre exemple, il imprimerait à la tige du tiroir un léger mouvement sinusoïdal, et provoquerait ainsi un mouvement de la bielle à laquelle se termine la chaîne ; ce mouvement deviendrait très vite sinusoïdal et de même période que celui qui l'exciterait, mais présenterait en général une amplitude et une phase différentes. Il appelle « RÉPONSE COMPLEXE » de la chaîne de régu-

lation un nombre complexe ayant pour module le rapport de l'amplitude de la réponse à celle de l'excitation, et pour argument la phase de la réponse rapportée à celle de l'excitation. Renouvelant l'expérience pour un nombre suffisant de valeurs distinctes de la pulsation excitatrice, il trace une « COURBE DE RÉPONSE COMPLEXE » dont les différents points ont pour affixes les diverses réponses complexes et portent en cote les valeurs de la pulsation correspondantes comme on peut le voir sur les figures 15 et 16.

fig. 15

Courbe de réponse d'une régulation par tachymètre et accéléromètre (Inertie du fluide moteur négligeable)

De telles courbes sont caractéristiques de la chaîne de régulation considérée et ne dépendent pas du point où la coupure a été pratiquée. On s'en rend compte facilement en remarquant que, si par deux coupures on scinde la chaîne en deux tronçons, une réponse partielle correspond à chacun de ceux-ci. La réponse globale obtenue alors par fermeture de l'une ou de l'autre des deux coupures est le produit des deux réponses partielles, effectué selon les règles habituelles du calcul symbolique, donc indépendant de l'ordre des facteurs, et par suite, de la position de la coupure restante.

On reconnaît l'existence d'un régime éolien au fait que la courbe de réponse rencontre l'axe réel au point A d'abscisse 1 ; la pulsation du régime auto-entretenu est la cote ω de la courbe en ce point. Ce résultat découle immédiatement du mode de construction de la courbe, et présente

un intérêt certain ; il serait toutefois insuffisant à lui seul, car il ne renseigne que sur une des composantes du mouvement libre, et ne dit rien des autres qui cependant peuvent être amplifiées ou amorties. Le critère de stabilité donné par NYQUIST s'énonce ainsi :

fig. 16

Courbe de réponse
d'une régulation par tachymètre et came de statisme.
(Inertie du fluide moteur négligeable)

« Une régulation caractérisée par une courbe de réponse complexe donnée est stable si cette courbe de réponse n'entoure pas le point A d'abscisse 1 de l'axe réel ».

6° UTILISATION DU CALCUL DANS L'ÉTABLISSEMENT DES COURBES DE RÉPONSE

Nous avons introduit la notion de réponse partielle pour montrer que la courbe de réponse est bien une caractéristique du mécanisme de régulation, en ce sens qu'elle est indépendante du point où a été faite la coupure. Dans certains cas, l'ingénieur chargé d'une étude de régulation a intérêt à recourir à cette division de la réponse globale en réponses partielles. Telle ou telle de celles-ci en effet, ne peut être obtenue commodément et avec une exactitude suffisante, qu'au plateau d'essais, et ceci en raison de la complexité des phénomènes mis en jeu. D'autres au contraire, correspondent à des phénomènes plus simples dont le calcul peut se faire avec une précision suffisante, tandis que diverses raisons

d'ordre matériel prohibent l'étude au plateau. Dans tous les cas où l'on sait mesurer correctement les paramètres, le calcul est facile, car la réponse cherchée n'est autre qu'une impédance généralisée.

Reprenons le schéma donné au chapitre I, figure 1, et étudions par exemple, la réponse du tiroir du servo-moteur aux variations de vitesse. Sa levée que nous appellerons z est la somme de deux mouvements dus à la variation de la vitesse angulaire ω et transmis, l'un par le tachymètre, l'autre par l'accéléromètre. Elle a pour expression :

$$z = \frac{1}{a+b} (ak_0 \Delta \omega + bk_1 \frac{d\omega}{dt})$$

Si nous imposons à ω une variation sinusoïdale

$$\Delta \omega = \Delta_0 \omega \sin \beta t \quad (3)$$

(nous désignons provisoirement la pulsation par β , simplement pour éviter la confusion avec la vitesse angulaire ω ; lorsqu'elle ne sera pas à redouter, nous nous en tiendrons à la notation courante ω), la levée z du tiroir subira une variation sinusoïdale de même période, mais en général, d'amplitude et de phase différentes :

$$z = R_1 \Delta_0 \omega \sin (\beta t + \varphi_1) \quad (4)$$

expression dans laquelle les constantes R_1 et φ_1 sont précisément le module et l'argument de la réponse complexe de l'ensemble : tachymètre, accéléromètre, tiroir, aux excitations de pulsation β . On les obtient par la méthode classique en reportant dans l'équation (2), la valeur de $\Delta \omega$ exprimée par (3) :

$$z = \frac{\Delta_0 \omega}{a+b} (ak_0 \sin \beta t + bk_1 \beta \cos \beta t)$$

et en identifiant l'expression obtenue à celle donnée par l'équation (4). Il vient :

$$\tan \varphi_1 = \frac{bk_1 \beta}{ak_0} \quad \text{et} \quad R_1 = \frac{1}{a+b} \sqrt{a^2 k_0^2 + \beta^2 b^2 k_1^2}$$

Plus rapidement, l'impédance $R_1 e^{i\varphi_1}$ ou $R_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ est la valeur que donnerait pour z l'expression (2), si l'on y remplaçait $\Delta \omega$ et ses dérivées successives, respectivement par :

$$(i\beta)^0 = 1, i\beta, (i\beta)^2 = -\beta^2 \dots$$

Il vient ainsi en effet :

$$R (\cos \phi + i \sin \phi) = \frac{1}{a+b} (ak_0 + bk_1 \beta i)$$

résultat qui s'identifie bien avec le précédent.

L'ouvrage complémentaire de M. CADEN, en collaboration avec MM. GERMOND, BOVET et DESBAILLETS, illustre bien cette possibilité de diviser le travail d'étude : les organes de régu-

lation sont essayés au plateau, tandis que la réponse de la turbine et l'effet du coup de béliet sont soumis au calcul.

7° EXTENSION DU CRITÈRE DE NYQUIST

Le critère de NYQUIST se justifie dans la mesure où il est équivalent à la condition générale de stabilité : « La résolvante ne doit pas avoir de racine à partie réelle positive ». Mais sous la forme simple que nous avons énoncée, il n'offre cette équivalence que dans certains cas. Dans les autres, heureusement les plus rares en pratique, il n'est pas applicable, du moins directement.

Partant des équations qui régissent le mouvement, on peut procéder à l'écriture de la résolvante de deux manières entièrement équivalentes. L'une, plus classique, consiste à éliminer d'abord, à l'aide de dérivations et substitutions, toutes les inconnues, sauf une, puis à remplacer cette inconnue, z par exemple, et ses dérivées successives, par $Z e^{pt}$, $p Z e^{pt}$, $p^2 Z e^{pt}$... et enfin à diviser par le facteur commun $Z e^{pt}$. L'autre, plus rapide, effectuée d'abord sur toutes les inconnues des substitutions de la forme $Z e^{pt}$, $Y e^{pt}$... supprime le facteur commun e^{pt} , puis élimine les coefficients Z , Y ... : elle est d'ailleurs seulement un cas particulier du calcul opérationnel d'HEAVISIDE. Plus simplement, on peut n'y voir qu'une variante du calcul des impédances, variante qui consiste d'une part à écrire p au lieu de $i\beta$, et d'autre part, à évaluer à l'unité l'impédance globale.

Au total, la résolvante écrite par ce procédé se présente sous la forme :

$$f(p) = 1 \quad (5)$$

tandis que la réponse complexe R_0 de NYQUIST a pour expression :

$$R_0 = f(i\beta) \quad (6)$$

On sait que si $F(p)$ est une fonction analytique uniforme, et que l'on fait décrire par la variable p , une fois dans le sens direct, un contour fermé simple C , contenant des racines et des pôles de $F(p)$ tels que la somme des ordres de multiplicité des racines soit m et la somme des ordres des pôles n , la fonction $F(p)$ décrira un contour fermé entourant $m-n$ fois l'origine dans le sens direct ($n-m$ fois dans le sens rétrograde, si n est supérieur à m). Si nous posons : $f(p) = 1 + F(p)$, dans le même temps $f(p)$ entourera le point $A(1,0)$ un nombre égal de fois dans le même sens. Dès lors, pour exprimer que l'équation (5) :

$f(p) = 1$ n'a pas de racine dans le demi-plan positif, il suffit de :

1° Choisir pour C un contour qui entoure ce demi-plan, par exemple le contour de BROMWHICH (figure 17), composé de l'axe imaginaire parcouru de $+i\infty$ à $-i\infty$, et d'un demi-cercle de rayon infiniment grand, joignant $-i\infty$ à $+i\infty$ dans le sens direct.

2° Déterminer le nombre n correspondant à $f(p)$ à l'intérieur de ce contour.

3° Ecrire que $f(p)$ entoure n fois le point A dans le sens rétrograde.

fig. 17
Contours employés dans l'étude de la stabilité. (Les traits fins représentant des portions de contour doivent être rejetés à l'infini).

Très ordinairement, le nombre n est nul, et $f(p)$ prend une valeur unique (le plus souvent nulle), lorsque le module de p est infiniment grand. La courbe décrite par $f(p)$ n'est alors que la courbe de réponse complétée par symétrie par rapport à l'axe réel pour les valeurs négatives de β , et parcourue dans le sens des β décroissants, de $+\infty$ à $-\infty$; elle doit ne pas décroiser A . C'est ce qu'exprime le critère de NYQUIST : « Il faut que la courbe de réponse n'entoure pas A ». On voit immédiatement quelles sont ses conditions de validité.

Si ces conditions ne sont pas réalisées, il faut modifier le critère en tenant compte du nombre n et de l'évolution de $f(p)$ lorsque p décrit la partie située à l'infini du contour C . On pourra d'ailleurs utiliser un contour différent de celui de BROMWHICH, par exemple le contour rec-

tangulaire (fig. 17) joignant les points : $M, M' (O \pm i \infty), N, N' (+ \infty, \pm i \infty)$; on pourra même faire parcourir ce contour dans le sens négatif afin que $f(p)$ chemine sur la courbe de réponse dans le sens positif (β croissants) ; enfin, il y aura parfois intérêt à modifier encore le contour pour exclure telle ou telle catégorie de pôles, surtout si ceux-ci sont en nombre infini. Nous aurons, au cours de notre travail, à utiliser ces divers artifices.

8° ÉTUDE QUANTITATIVE DE LA STABILITÉ

La certitude de la stabilité du réglage étant acquise, ou s'il s'agit d'une étude générale, les conditions d'existence d'un régime stable étant définies, on peut utilement poursuivre le travail et apprécier le degré de stabilité en déterminant ses deux éléments caractéristiques ; délai et labilité. Il faut pour cela amorcer, sinon achever, la résolution du système d'équations différentielles. De ce travail, la phase la plus importante est le calcul des racines ; il fournit les pulsations et les amortissements des composants du mouvement libre. Les considérations précédentes suggèrent un moyen de l'effectuer rapidement.

Au lieu d'utiliser le contour $M'_1 M_1 N N' M'_1$ qui ne doit contenir aucune racine, nous pouvons utiliser des contours tels que $m'_1 m_1 n n' m'_1$; $m'_2 m_2 n n' m'_2$,... (fig. 17) qui doivent les contenir toutes si l'on veut que tous les composants du mouvement libre aient des amortissements supérieurs à λ_1, λ_2 ,... abscisses changées de signe, respectivement de $m'_1 m_1$ et $m'_2 m_2$,... On reconnaîtra qu'une racine a pour partie réelle $-\lambda$ au fait que la courbe R_λ correspondant au contour $m'_1 \lambda m_1 n n' m'_1 \lambda$ passera par A. On lira en même temps en cote sur R_λ la valeur de β au point A, ce qui achèvera de déterminer la racine. Il suffit pour trouver toutes les racines, de balayer le demi-plan négatif par les droites $m'_1 \lambda m_1 \lambda$.

On peut améliorer beaucoup le procédé et ne tracer que quelques courbes R_λ . Ces courbes et leurs trajectoires orthogonales ($\beta = \text{Cte}$) constituent en effet dans le plan des $f(p)$ un quadrillage curviligne qui se déduit par transformation conforme directe du quadrillage $\lambda = \text{Cte}, \beta = \text{Cte}$ du plan des p . Il est donc facile, à partir d'un tronçon d'une courbe R_λ , de reconstituer le réseau des courbes $\lambda = \text{Cte}$ et $\beta = \text{Cte}$ dans son voisinage. Dès lors, il suffit qu'une courbe

passe près de A pour que l'on puisse en situant ce point dans un quadrillage curviligne, déterminer une racine avec l'approximation convenable.

Parmi les diverses racines, l'amortissement le plus faible devra toujours retenir notre attention, car le délai dépendra surtout de lui, sauf si le coefficient d'amplitude qui lui correspond est faible, fait dont on ne peut avoir une véritable assurance que dans la seconde phase de la résolution (Calcul des constantes d'intégration) mais sur lequel on est pourtant renseigné par la valeur de la pulsation correspondante ; il est en effet assez rare que les composantes à fréquence élevée aient une grande amplitude.

La dernière partie du calcul détermine l'amplitude, et éventuellement la phase, de chacun des mouvements composants. Elle permet donc de tracer l'évolution dans le temps, de chacune des grandeurs, dans notre étude par exemple, l'évolution de la vitesse du groupe, celle de la pression dans la conduite, celle de l'ouverture du vannage..., et en définitive de déterminer complètement le délai et la labilité. Au point de vue mathématique, on n'y rencontre aucune difficulté sérieuse. Par contre, elle suppose une option dont dépend son résultat, et qui doit par conséquent être judicieuse, si l'on veut que les conclusions aient une valeur objective. On admet couramment que le fonctionnement d'un mécanisme de régulation est bien caractérisé par la manière dont le groupe qu'il conduit retrouve son équilibre après une variation petite et brusque de sa charge. Nous adopterons l'hypothèse d'une telle variation pour nos calculs et mesurerons donc la labilité en rapportant à la valeur relative de cet écart de charge la valeur relative de l'écart maximum de vitesse qui en résulte.

9° REMARQUE

Entre les deux types extrêmes d'étude de la stabilité : étude purement qualitative et étude quantitative complète, il convient de signaler certaines recherches intermédiaires relativement simples, et dont l'intérêt demeure très réel.

Parmi elles, la plus proche de l'étude qualitative consiste à rechercher à quelles conditions les parties réelles de toutes les racines seront négatives et de valeur absolue supérieure à tel nombre λ_0 donné : on assure ainsi un coefficient d'amortissement au moins égal à λ_0 . Il suffit de

déduire de l'équation résolvante dont les racines sont $p_1, p_2, \dots$ une équation auxiliaire admettant pour racines : $p_1 + \lambda_0, p_2 + \lambda_0, \dots$ et de lui appliquer soit les conditions d'HURWITZ, soit le critère de NYQUIST.

LUTHI cherche à s'assurer à la fois un amortissement et un décrétement logarithmique supérieurs à des minima donnés. Pour cela, il doit exiger que les racines de la résolvante soient enfermées dans une zone du plan complexe dont la forme est celle qu'indique la figure 18 : elle est limitée par une parallèle à l'axe imaginaire, et par deux droites symétriques passant par l'origine. En fait, il utilise bien les deux

fig. 18

Zone où doivent se trouver les points représentant les racines $p = -\lambda_0 i$ de la résolvante pour répondre au but poursuivi par Luthi.

droites passant par l'origine, mais il substitue à la parallèle à l'axe imaginaire un arc de circonférence ayant l'origine pour centre. En outre, il ferme la zone du côté des grands amortissements par un autre arc de circonférence. La zone prend alors la disposition représentée par la figure 19 admettant pour limites deux lignes où l'affixe a un argument constant, et deux autres où il a un module constant. La méthode employée pour exprimer cette condition est apparentée à celle de NYQUIST ; au lieu de parcourir l'axe imaginaire, l'observateur parcourt le périmètre de la zone.

fig. 19

Zone substituée par Luthi à celle qui est indiquée par la fig. 18. (Il simplifie ses calculs en remplaçant par des arcs de circonférence la droite AB et la droite de l'infini).

CHAPITRE IV

EQUATIONS DU RÉGLAGE TACHYACCÉLÉROMÉTRIQUE DES TURBINES HYDRAULIQUES

1° NOTATIONS

Dans l'ensemble, nous reprendrons les notations de M. ALMERAS, parce qu'elles nous ont paru les mieux choisies, mais nous devons les compléter pour les phénomènes laissés par lui de côté. Le tableau suivant indique celles que nous utiliserons. L'intérêt de telle ou telle d'entre elles n'y apparaît pas ; il se manifestera seulement dans la suite du travail au moment où nous l'introduirons ; nous la rappellerons alors et, au besoin, la justifierons, mais, malgré tout, nous croyons bon de la joindre ici aux autres.

t Temps.

ω Vitesse au temps t .

ω_0 Vitesse de régime.

$x = \frac{\omega}{\omega_0}$ Vitesse relative au temps t .

$\xi = x - 1$ Ecart relatif de vitesse au temps t .

H Chute au temps t .

H_0 Chute nette.

$\xi = \frac{H - H_0}{H_0}$ Surpression relative totale,

somme de la surpression en amont du distributeur (dépression dans le cas d'un mouvement inverse) et de la dépression en aval. (Surpression lorsqu'il y a dépression en amont). En hautes chutes, l'influence de la partie aval sera négligée.

y Ouverture relative du vannage au temps t .

y_0 Ouverture relative correspondant à la puissance demandée par le réseau, la chute ayant sa valeur nette H_0 .

$\varepsilon = \frac{y}{y_0} - 1$ Ecart relatif d'ouverture au temps t .

K_0 Rapidité de réponse du régleur tachymétrique.

K_1 Rapidité de réponse du régleur accélérométrique.

K_2 Rapidité de réponse du détecteur manométrique différentiel.

τ Temps de lancer progressif sous couple maximum (constante d'accélération).

L Longueur de la conduite (augmentée, surtout en basse chute, de la demi-longueur développée de la bêche et de la longueur de l'aspirateur).

$\theta = \frac{L V}{g H_0}$ Temps caractéristique de la conduite.

a Célérité des ondes dans la conduite (de l'ordre de 1.000 m/sec.).

g Accélération de la pesanteur.

$\rho = \frac{a V}{2 g H}$ paramètre caractéristique de la conduite, indiqué par ALLIEVI.

l Abscisse relative du point courant de la conduite, comptée 0 au vannage et 1 au point à pression constante, retenue ou chambre d'équilibre.

h surpression relative, au même point ; sa valeur est ξ au point où $l = 0$, et 0 où $l = 1$.

v Survitesse relative, au même point ;

$v = \frac{V_1 - V}{V}$. Nous noterons v sa valeur au vannage.

α Indice d'autorégulation. L'autorégulation peut être dû simplement au fait que la puissance absorbée par le réseau varie comme la puissance α de la fréquence. S'il est plus complexe et comporte par exemple une variation de rendement de la turbine ou un statisme du régulateur de tension par rapport à la fréquence, α est choisi pour tenir compte de l'ensemble.

$A = \frac{K_1 L}{\tau a}$ Paramètre caractéristique de l'efficacité de l'accéléromètre dans l'étude générale.

$A' = 2 \rho A = \frac{K_1 \theta}{\tau}$ Paramètre caractéristique de l'efficacité de l'accéléromètre.

$$B = \frac{K_0 L^2}{\tau a^2} \text{ et } B' = 4 \rho^2 B = \frac{K_0 \theta^2}{\tau}$$

Paramètres caractéristiques de l'efficacité du tachymètre.

$$C = \frac{\alpha L}{\tau a} \text{ et } C' = \frac{\alpha \theta}{\tau}$$

Paramètres caractéristiques de l'efficacité de l'autorégulation.

$p = -\lambda + \omega i$ Racine de la résolvante principale.

λ Amortissement de la composante correspondante du mouvement libre.

ω Pulsation de la même composante.

$r = \frac{p L}{a} = -\gamma + \varphi i$ Racine de la résolvante auxiliaire dans l'étude générale.

γ Coefficient sans dimension caractérisant l'amortissement dans l'étude générale.

φ Coefficient sans dimension caractérisant la pulsation dans l'étude générale.

$r' = 2 \rho r = p \theta = -\gamma' + \varphi' i$ Racine de la résolvante auxiliaire dans l'étude supposant le mouvement en masse.

γ' et φ' Coefficients sans dimension caractérisant l'amortissement et la pulsation dans le même cas.

$$\Xi = \frac{\xi}{\epsilon_0}, Z = \frac{\zeta}{\epsilon_0}, E = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

Taux d'écart de vitesse, de pression et d'ouverture pendant la période de retour à l'équilibre à la suite d'un petit dérèglement d'ouverture chiffré par ε_0 .

Nous supposerons en général $y_0 = 1$, c'est-à-dire que nous étudierons la stabilité à pleine puissance, ou, si l'on préfère, nous supposerons que les paramètres $\tau, \theta, K_0, K_1, \rho$, utilisés ont été calculés pour le régime étudié. Si nous ne disposons que des paramètres $\tau', \theta', K'_0, K'_1, \rho'$, calculés pour la toute puissance, nous en déduirons ceux que nous utilisons par les relations :

$$\tau = \frac{\tau'}{y_0}, \theta = y_0 \theta', K_0 = \frac{K'_0}{y_0}, K_1 = \frac{K'_1}{y_0}, \rho = y_0 \rho'$$

2° ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE L'EAU DANS LA CONDUITE

En considérant un court tronçon de conduite, on peut écrire les deux équations suivantes :

$$\text{Forces : } \frac{\delta h}{\delta l} = \frac{LV}{gH} \times \frac{\delta v}{\delta t}$$

$$\text{Continuité : } \frac{\delta v}{\delta l} = \frac{LV}{V} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{D}{Ee} \right) \frac{\delta h}{\delta t}$$

en désignant par ϵ le coefficient d'élasticité de l'eau, E le coefficient d'élasticité du matériau de la conduite, D et e le diamètre et l'épaisseur de cette conduite.

$$\text{Nous poserons : } \frac{1}{\epsilon} + \frac{D}{Ee} = \frac{g}{a^2}$$

et nous vérifierons, au cours du calcul, que la vitesse a ainsi définie est identique à la célérité des ondes à laquelle ce symbole est habituellement réservé. Nous écrirons donc :

$$\frac{LV}{V} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{D}{Ee} \right) = \frac{LgH}{a^2 V} = \frac{L}{2\alpha\rho}$$

et nos équations deviendront :

$$\frac{\delta h}{\delta l} = 2\rho \frac{L}{a} \frac{\delta v}{\delta t}$$

$$\frac{\delta v}{\delta l} = \frac{L}{2\rho a} \frac{\delta h}{\delta t}$$

NOTA. — Elles supposent une conduite à caractéristique unique, c'est-à-dire où D , E et e sont constants, faute de quoi ρ et a ne seraient plus des paramètres, mais des fonctions de l . Dans les hautes chutes, cette condition n'est qu'imparfaitement réalisée, si l'on considère l'ensemble de la conduite. Les équations restent utilisables si l'on prend la précaution de diviser

celle-ci en tronçons suffisamment homogènes, ordinairement 3 au plus. On doit alors étudier chacun des tronçons comme nous allons étudier l'ensemble ; les conditions aux limites et les paramètres ρ et a varient d'un tronçon au suivant. Une telle précision peut être utile dans l'étude des mouvements de grande amplitude tendant par exemple à déterminer le maximum de la contrainte subie par le métal de la conduite. Ici, elle serait une pure gêne sans intérêt, puisque nous visons avant tout à déterminer des ordres de grandeur ; nous nous arrêtons moins à l'individualité des résultats numériques qu'à leurs différences, c'est-à-dire à la variation de tel résultat consécutive à telle modification de tel paramètre.

3° ACCÉLÉRATION DU MOBILE

Le temps τ caractéristique de l'inertie du mobile est le rapport des variations relatives de puissance qui lui sont appliquées aux variations relatives d'accélération qui en résultent. Les variations relatives de puissance ont donc pour

$$\text{expression : } \tau \frac{d\zeta}{dt}$$

Par ailleurs, la puissance livrée par la conduite est mesurée par le produit de la chute :

$$H = H_0 (1 + \zeta) \text{ par le débit } Q = Q_0 (1 + \nu).$$

Ses variations sont donc mesurées par :

$$H_0 Q_0 (1 + \zeta) (1 + \nu) - H_0 Q_0, \text{ ou en valeurs relatives par : } (1 + \zeta) (1 + \nu) - 1, \text{ d'où l'équation :}$$

$$\tau \frac{d\zeta}{dt} = \zeta + \nu$$

Le produit $\zeta\nu$ est en effet négligeable devant les termes conservés, car ceux-ci sont eux-mêmes petits ou infiniment petits, puisqu'il s'agit, ainsi que nous l'avons dit au Chapitre II, d'étudier la naissance éventuelle d'oscillations dues au système de réglage, afin de déterminer les moyens propres à les empêcher ; secondairement, les résultats s'appliqueront à l'appréciation de l'amortissement des petites oscillations de réglage, et vaudront d'autant plus exactement qu'il s'agira de mouvements de réglage de moindre amplitude.

REMARQUE 1. — Autoréglage ou effet stabilisateur du réseau. — L'équation suppose implicitement que la « demande » du réseau se pré-

sente comme l'exigence d'une puissance constante indépendante de la fréquence ou du moins ne suivant les variations de celle-ci qu'avec un retard et un amortissement importants. Cette hypothèse est assez bien vérifiée lorsque le groupe se trouve seul à l'origine d'une longue ligne de transport. Elle cesse de l'être dans le cas contraire si par exemple :

1° l'inertie de l'ensemble des moteurs alimentés n'est pas négligeable devant celle du groupe étudié ;

2° les moteurs à faible inertie alimentés entraînent des machines dont le couple résistant varie instantanément avec la vitesse ;

3° les générateurs couplés en parallèle avec lui sont munis de régulateurs de vitesse plus rapides que le sien (groupes thermiques par exemple) ;

4° le régulateur de tension de l'alternateur présente, par rapport à la fréquence, un statisme notable (demande de M. GADEN) (1).

En général, la puissance demandée est une fonction de la fréquence que l'on exprime sous

la forme $P = P_0 \left(\frac{f}{f_0} \right)^\alpha$ de telle sorte que les

variations relatives ont pour valeur :

$$\frac{\Delta P}{P} = \alpha \xi$$

et que l'équation (3) devient en principe :

$$\tau \frac{d\xi}{dt} + \alpha \xi = \xi + \nu$$

mais il faut prendre garde que la valeur de α à utiliser ici est extrêmement mal déterminée. Elle n'est même pas, à strictement parler, déterminable, pour les raisons suivantes :

1° Pour un ensemble rigide, réseau de faible étendue, alimenté par un seul générateur, ou des générateurs identiques, α serait nul si la consommation était due à de l'éclairage desservi par un régulateur de tension astatique et instantané ; il serait voisin de 2 si elle était imputable à des pompes ou ventilateurs ; il est en pratique de l'ordre de 1 à 1,5 pour la Région Parisienne.

2° Pour un ensemble comportant en outre des générateurs sans régulateur, et de rendement

indépendant de la vitesse, le coefficient α précédent doit être majoré dans le rapport de la puissance totale installée à la puissance des groupes réglés. L'influence correspondante est connue sous le nom d'effet stabilisateur des groupes sur limiteur d'ouverture (cf. ALMERAS, « Houille Blanche », mai 1946, pp. 192, 193). Si les générateurs non soumis au réglage ont un rendement variable avec la vitesse, ou si, au lieu de générateurs non réglés, on a seulement des générateurs à réglage lent, la majoration de α est différente, mais reste positive.

3° Dans un ensemble constitué par l'addition au précédent de groupes à réglage plus rapide, l'effet stabilisateur de la consommation irait surtout à ces groupes rapides, dans la mesure où leur rapidité même ne les empêcherait pas d'en profiter ; le groupe de base sur lequel porte notre étude se trouverait par contre stabilisé par l'influence des nouveaux groupes. Sans doute pourrait-on encore parler d'une majoration de α ; (elle serait même infinie, si les groupes nouveaux avaient un délai de réglage et un statisme nuls) ; il serait pourtant plus exact d'étudier directement le système couplé, l'autorégulation n'étant plus ici qu'une approximation imagée, mais grossière.

4° Des considérations précédentes, on peut tout de même induire que le couplage de groupes dont les régulateurs ont des célérités d'action différentes, a un effet stabilisateur même lorsque ces célérités sont comparables. Ici, plus encore que dans le cas où les célérités sont nettement différentes, l'artifice qui consiste à utiliser un coefficient α cesse d'être applicable, et l'on doit étudier l'ensemble formé par les divers groupes, et non chacun d'eux séparément. L'ordre des équations s'en trouve élevé, et le calcul devient vite inextricable. M. ALMERAS, dans le numéro de « La Houille Blanche » que nous venons de citer, l'a tenté pour un cas particulier simple, mais intéressant (pp. 193, 194). Il étudie deux groupes hydrauliques dont les conduites ont des temps caractéristiques θ_1 et θ_2 différents, et dont les régulateurs sont à asservissement permanent. Leurs statismes σ_1 et σ_2

sont égaux respectivement à $\frac{\tau_1}{\theta_1}$ et $\frac{\tau_2}{\theta_2}$, de

telle sorte que les deux groupes se trouvent juste à la limite de stabilité lorsqu'ils fonctionnent séparément. Il cherche dans cette hypothèse à quelle condition l'ensemble des deux groupes couplés sera stable. Malheureusement, une erreur

(1) Conférence faite à la S. F. E. le 21 février 1947.

matérielle s'est glissée à la dernière ligne de son calcul, le faisant aboutir à la condition :

$$\left(\frac{\theta_1}{\theta_2} - 1\right) \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) > 0$$

au lieu de

$$\left(\frac{\theta_1}{\theta_2} - 1\right)^2 > 0$$

qui est toujours satisfaite. La conclusion ainsi rétablie se trouve donc conforme à ce que nous induisions directement : le couplage de groupes nettement divers a un effet stabilisateur ; pour des groupes moins divers, l'effet est moindre et peut même se trouver nul, mais non négatif.

5° Enfin, l'interconnexion fait jouer d'autres consommateurs et d'autres générateurs dans la mesure où elle est assez rigide pour assurer le synchronisme sous un délai faible vis-à-vis de la période des oscillations du régulateur étudié.

De tout ceci, nous retiendrons qu'il existe un coefficient α positif, mais généralement difficile à préciser. Nous pourrions retenir aussi qu'un groupe aide d'autant plus les autres que ses oscillations s'amortissent plus vite, et qu'inversement il est aidé d'autant plus facilement que la pulsation de ses propres oscillations est plus faible ; d'où il suit qu'il y a toujours intérêt, pour la stabilité générale du réseau, à ce que le réglage de chaque groupe s'achève en une, ou tout au plus en quelques oscillations. Nous aboutirons d'ailleurs à la même conclusion, pour d'autres raisons, en étudiant la célérité de réglage de groupes isolés.

REMARQUE 2. — Effet des variations de rendement. — Le rendement d'un groupe générateur n'est jamais indépendant de sa vitesse, mais on s'arrange, autant que possible, pour qu'il soit maximum à la vitesse de régime. Dans les cas où il en irait autrement, un calcul rigoureux de la stabilité devrait en tenir compte ; la croissance du rendement avec la vitesse a un effet défavorable et réduit par conséquent le coefficient α à utiliser ; au contraire, un rendement décroissant l'augmenterait.

4° DÉPLACEMENT DU VANNAGE

Le régulateur déplace le vannage sous l'influence de deux détecteurs, l'un mesurant l'écart de vitesse, donc ξ et l'autre l'accélération, donc $\frac{d\xi}{dt}$. Chacun d'eux, s'il était seul, imprimait

au vannage une vitesse proportionnelle à l'écart qu'il enregistre. La disposition est telle que ces deux effets s'ajoutent :

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -K_0\xi - K_1\frac{d\xi}{dt}$$

K_1 et K_0 étant des paramètres positifs ; il faut, en effet, fermer lorsque le groupe accélère et lorsque sa vitesse est trop grande.

5° DÉBIT AUTORISÉ PAR LE VANNAGE

Nous admettons que les variations d'ouverture du vannage, donc, à pression constante, celles du débit d'eau, ont même mesure, en grandeurs relatives, que les variations ϵ de position imprimées par le servo-moteur. Nous admettons en outre qu'à ouverture constante, le débit varie comme la racine carrée de la pression, et par suite :

$$1+v = (1+\epsilon)\sqrt{1+\xi} \text{ ou } v = \epsilon + \frac{\xi}{2}$$

6° RÉOLUTION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Les équations (8) à (12) que nous venons d'écrire admettent des solutions de la forme :

$$\xi = X_1 e^{p_1 t}, \epsilon = Y_1 e^{p_1 t}, \dots, h = H_{(1)} e^{p_1 t}, v = V_{(1)} e^{p_1 t}$$

où p_1 est un nombre complexe que nous devons déterminer.

X_1, Y_1 sont des constantes d'intégration.

$H(l), V(l)$, sont des fonctions de l .

Ces fonctions s'écrivent :

$$H_{(1)} = H_1 e^{r_1 l} + H_2 e^{r_2 l}$$

$$V_{(1)} = V_1 e^{r_1 l} + V_2 e^{r_2 l}$$

On a donc :

$$\begin{cases} h = (H_1 e^{r_1 l} + H_2 e^{r_2 l}) e^{p_1 t} \\ \frac{\delta h}{\delta t} = p_1 (H_1 e^{r_1 l} + H_2 e^{r_2 l}) e^{p_1 t} \\ \frac{\delta h}{\delta l} = (r_1 H_1 e^{r_1 l} + r_2 H_2 e^{r_2 l}) e^{p_1 t} \end{cases} \quad \begin{cases} v = (V_1 e^{r_1 l} + V_2 e^{r_2 l}) e^{p_1 t} \\ \frac{\delta v}{\delta t} = p_1 (V_1 e^{r_1 l} + V_2 e^{r_2 l}) e^{p_1 t} \\ \frac{\delta v}{\delta l} = (r_1 V_1 e^{r_1 l} + r_2 V_2 e^{r_2 l}) e^{p_1 t} \end{cases}$$

et, en portant ces valeurs dans les équations (8) et (9) :

$$r_1 H_1 = 2\rho \frac{L}{a} V_1 p_1$$

$$r_1 H_1 = \frac{L}{2\rho a} H_1 p_1$$

système d'équations à deux inconnues :

$$r_1 \text{ et } \frac{H_1}{V_1}$$

Les autres inconnues, r_2 et $\frac{H_2}{V_2}$ sont racines d'un système identique, à la permutation des indices près :

$$\frac{H_1}{V_1} = \frac{2\rho}{L} \frac{r_1}{p_1} \quad r_1^2 = \left(\frac{L p_1}{a}\right)^2$$

$$r_1 = -r_2 = \frac{L p_1}{a} \quad \frac{H_1}{V_1} = -\frac{H_2}{V_2} = 2\rho$$

Reportant ces valeurs dans le système (13), on trouve :

$$h = H_1 e^{(1+\frac{L}{a}) p_1 t} + H_2 e^{(1-\frac{L}{a}) p_1 t}$$

ce qui montre que h est la somme de deux surpressions se propageant en sens inverses, et parcourant la longueur de la conduite dans le temps L/a , fait qui justifie la dénomination donnée à a . Ecrivant ensuite que $h = 0$ lorsque $t = 1$, il vient :

$$H_2 = -H_1 e^{2r_1}$$

$$V_2 = V_1 e^{2r_1}$$

A l'autre extrémité, $t = 0$, $h = \xi$, $v = v$

Les trois autres équations :

$$\xi = (H_1 + H_2) e^{p_1 t} = H_1 e^{p_1 t} (1 - e^{2r_1})$$

$$v = (V_1 + V_2) e^{p_1 t} = V_1 e^{p_1 t} (1 + e^{2r_1})$$

$$\frac{\xi}{v} = -2\rho \tanh r_1$$

$$\tau \frac{d\xi}{dt} + \epsilon \xi = \xi + v$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -K_0 \xi - K_1 \frac{d\xi}{dt}$$

$$v = \epsilon + \frac{\xi}{2}$$

donnent une autre expression du même rapport $\frac{\xi}{v}$

Posons, pour simplifier, l'écriture :

$$\xi = H_0 e^{p_1 t}$$

$$v = V_0 e^{p_1 t}$$

Il vient :

$$(a + \tau p_1) X_1 = H_{(0)} + V_{(0)}$$

$$p_1 Y_1 = -(K_0 + K_1 p_1) X_1$$

$$V_{(0)} = Y_1 + \frac{H_{(0)}}{2}$$

et en éliminant Y_1 :

$$p_1 (a + \tau p_1) X = \frac{3}{2} p_1 H_{(0)} - (K_0 + K_1 p_1) X_1$$

$$p_1 V_{(0)} = \frac{p_1}{2} H_{(0)} - (K_0 + K_1 p_1) X_1$$

puis, en éliminant X_1 :

$$\frac{p_1 (a + \tau p_1) \left(\frac{H_{(0)}}{2} - V_{(0)} \right)}{K_0 + K_1 p_1} = H_{(0)} + V_{(0)}$$

d'où le rapport cherché :

$$\frac{H_{(0)}}{V_{(0)}} = \frac{\tau p_1^2 + (K_1 + a) p_1 + K_0}{\frac{\tau p_1^2}{2} - (K_1 - \frac{a}{2}) p_1 - K_0} = \frac{\xi}{v}$$

soit, en rapportant tout à l'inconnue r_1 :

$$\frac{\xi}{v} = \frac{\frac{\tau a^2 r_1^2}{L^2} + \frac{(K_1 + a) a r_1}{L} + K_0}{\frac{\tau a^2 r_1^2}{2 L^2} - \frac{(2 K_1 - a) a r_1}{2 L} - K_0}$$

et finalement :
$$\frac{\xi}{v} = \frac{r_1^2 + (A+C) r_1 + B}{\frac{r_1^2}{2} - (A - \frac{C}{2}) r_1 - B}$$

en posant $A = \frac{K_1 L}{\tau a}$ $B = \frac{K_0 L^2}{\tau a^2}$ $C = \frac{a L}{\tau a}$

et lorsque nous négligerons C :

$$\frac{\xi}{v} = \frac{r_1^2 + A r_1 + B}{\frac{r_1^2}{2} - A r_1 - B}$$

La résolvante est fournie par le rapprochement des équations (14) et (15) ou (14) et (16) et s'écrit :

soit :
$$\frac{r^2 + (A+C) r + B}{\frac{r^2}{2} - (A - \frac{C}{2}) r - B} = -2\rho \tanh r$$

soit :
$$\frac{r^2 + A r + B}{\frac{r^2}{2} - A r - B} = -2\rho \tanh r$$

A ses racines réelles, $r = -\gamma$ par exemple, correspondent des mouvements de réglage apé-

riodiques de la forme : $M e^{-\lambda t}$, dont l'amortissement λ a pour valeur $+\frac{\gamma a}{L}$ et constitue un

véritable amortissement si la racine $-\gamma$ est négative ; au contraire, le mouvement s'amplifie, et le régime est par conséquent instable si λ est négatif, donc si la racine $-\gamma$ est positive.

Aux racines imaginaires, que nous écrirons : $r = \pm \gamma i - \gamma$, correspondent des mouvements pseudo-périodiques s'amortissant ou s'amplifiant suivant que γ est positif ou négatif : leur pulsa-

tion est mesurée par $\frac{\gamma a}{L}$ que nous désignerons

au besoin par ω , aucune confusion n'étant à redouter entre cette pulsation et la vitesse angulaire du groupe que l'on désigne habituellement par la même lettre ω .

En étudiant les racines de cette équation, nous pourrons donc apprendre :

- 1° si le fonctionnement est stable ou non ;
- 2° quelle est la pulsation des oscillations de réglage ;

3° quelle est la rapidité de leur amortissement.

Nous devons remarquer toutefois que, malgré la forme transcendante de l'équation, forme qui implique l'existence d'un nombre infini de racines, seules les plus faibles parmi celles-ci doivent être retenues, car les hypothèses admises dans l'établissement de l'équation ne permettent pas de tenir compte des mouvements à fréquence élevée ; nous savons par ailleurs, qu'en pratique, ceux-ci sont suffisamment amortis. Donnons un chiffre pour fixer les idées ; le délai nécessaire au réglage des turbines est toujours de plusieurs secondes ; celui qu'exige la stabilisation des appareils détecteurs, tachymètre et accéléromètre approche souvent de l'ordre de la seconde. Nous devons négliger les mouvements de réglage dont la pseudo-période serait du même ordre que ces temps de stabilisation dont nous n'avons pas tenu compte : aussi les pulsations qui atteindraient ou dépasseraient 6 sec.⁻¹ ne retiendront-elles pas notre attention ; nous nous limiterons à : $0 < \omega < 6$, c'est-à-dire

$$> 0? < \frac{6L}{a}$$

(à suivre).