NOTULES HYDRAULIQUES

SUR LA FORMULE DE BLASIUS

Pour calculer l'effort subi par un obstacle formant ligne de courant dans un écoulement plan à potentiel de vitesse, on se sert de l'intégrale de BLASIUS :

$$X - iY = \frac{\rho i}{2} \int_c w^2 dz$$

(où X et Y sont les composantes de l'effort et w la vitesse complexe)

On peut se demander ce que signifie cette intégrale lorsqu'on la calcule sur un arc de courbe qui n'est pas ligne de courant ; on en a l'explication si l'on se réfère au théorème des quantités de mouvement.

Soit dans un écoulement plan, un arc orienté AB ; pour chaque élément M'M'', nous considérons l'effort de pression MP, le flux de quantités de mouvement MQ et le vecteur résultant, que nous appellerons **poussée** (fig.).

Il y a lieu de préciser, comme suit, les conventions de signe ; de M'M'' on déduira une normale positive de vecteur unitaire $\vec{n}$ par rotation de $+\frac{\pi}{2}$; l'expression vectorielle de l'élément de poussée sera alors :

$$d\vec{P} = [\rho \vec{n} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \vec{V}] ds$$

On remarquera que pour un circuit fermé, orienté dans le sens direct $\vec{n}$ est avec ces conventions la normale intérieure, l'effort de pression est celui que **subit** le volume délimité,

et le flux des quantités de mouvement est le flux **rentrant**.

La poussée sur un arc AB ne dépend que de ses extrémités, autrement dit, cette résultante est nulle pour un circuit fermé, n'enfermant pas de singularités ; appelons, en effet, $\vec{F}$ la force de pression subie par le circuit et $\vec{H}$ la variation dans l'unité de temps de la quantité de mouvement : il résulte du théorème des quantités de mouvement que l'on a $\vec{F} = \vec{H}$, soit $\vec{P} = 0$.

Cette propriété ne suppose nullement l'écoulement irrotationnel ; elle traduit simplement les équations d'EULER ce qu'on vérifie aisément en transformant en intégrale double, l'intégrale de la poussée.

Introduisons maintenant l'hypothèse d'un potentiel des vitesses, la pression peut alors être remplacée à une constante près, par $-\rho \frac{V^2}{2}$ et la poussée s'écrit :

$$d\vec{P} = \rho \left[-\frac{V^2}{2} \vec{n} + (\vec{V} \cdot \vec{n}) \vec{V} \right] ds$$

soit $Z = \Phi + i\Psi$ le champ et

$w = u - i v = \frac{dZ}{dz}$ la vitesse complexe.

Nous traduirons les vecteurs intervenant dans la formule (1') par des imaginaires (un trait sur une variable complexe désignera l'imaginaire conjuguée).

Le vecteur $\vec{V}$ est représenté par $\bar{w}$

Le scalaire V^2 s'écrit aussi $\bar{w}w$

Le flux $\vec{V} \cdot \vec{n} ds$ n'est autre que $-d\Psi$

Le vecteur $\vec{n} ds$ se traduit par $i dz$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} dP &= -\rho \bar{w} \left[\frac{i}{2} w dz + d\Psi \right] = -\rho \bar{w} \left[\frac{i}{2} (d\phi + i d\psi) + d\psi \right] \\ &= -i\rho \frac{\bar{w}}{2} dZ \end{aligned}$$

Prenant l'imaginaire conjuguée des deux membres, il vient :

$$\overline{dP} = \frac{i}{2} \rho w dZ = \frac{i}{2} \rho w^2 dz$$

Si donc X et Y désignent les composantes de la **poussée**, on voit que l'intégrale de BLASIUS a

pour signification dans le cas général :

$$X - iY = \int_c \frac{i}{2} \rho w dz$$

La remarque simple qui précède n'étant pas formulée dans les classiques sur la question, il nous a semblé qu'elle pouvait intéresser le lecteur.

A. CRAYA.

VITESSES LIMITES COMPARÉES DES BULLES D'AIR DANS L'EAU ET DES GOUTTES D'EAU DANS L'AIR

Une sphère solide, lâchée dans un fluide indéfini subit une résistance fonction croissante de sa vitesse. Elle atteint une vitesse limite lorsque la résistance rencontrée est égale à son poids apparent. La loi de variation de la résistance en fonction de la vitesse est complexe quoique définie par un seul coefficient c , fonction du nombre de Reynolds R de l'écoulement. La courbe $c = f(R)$ a été déterminée expérimentalement par l'école de Göttingen (Prandtl, Wieselberger). Lorsque R est très faible le problème peut être abordé par les mathématiques et Stokes a démontré que la vitesse limite est alors proportionnelle au carré du rayon. Les expériences sont en accord avec cette formule tant que R demeure inférieur à 0,6 environ. Il en résulte qu'il existe une valeur critique du rayon des sphères au-delà duquel l'écoulement ne peut plus être représenté par les équations de Stokes.

Pour des bulles gazeuses montant dans un liquide, ou des gouttes liquides montant ou descendant dans un autre fluide, le problème est encore plus complexe. Le rayon critique des globules est très faible : à 20°, 0 cm. 004 pour des gouttes d'eau tombant dans l'air, 0 cm. 005 pour des bulles d'air s'élevant dans l'eau. Allen a étudié des bulles ne dépassant pas trois fois le rayon critique à la température considérée. La tension superficielle est alors assez grande pour conserver à la bulle une forme sensiblement sphérique et la vitesse limite est la même que celle que prendrait une sphère solide de même taille et de même densité. Lorsque le mouvement est assez lent pour ne pas être turbulent, la

vitesse des bulles vérifie donc la loi de Stokes ; au-delà Allen a donné une formule empirique d'après laquelle la vitesse limite varie en fonction linéaire du rayon.

Même si le globule reste bien sphérique, le calcul de Stokes n'est applicable qu'à des sphères solides dont les molécules sont immobiles. Si la sphère est liquide ou gazeuse, les molécules superficielles sont entraînées par le frottement en sens inverse du mouvement de translation. Le problème a été traité théoriquement par Rybszinski, Hadamard et Bond pour les rayons inférieurs au rayon critique. La formule obtenue, vérifiée par Bond, conduit à la même vitesse limite que la formule de Stokes pour les gouttes d'eau, et à une vitesse une fois et demi plus grande pour les bulles d'air.

D'après tous ces résultats, il semblerait que la vitesse limite augmente sans cesse lorsque le rayon augmente. Il n'en est rien, comme l'ont montré les expériences de Lenard et de Miyagi, qu'il est intéressant de comparer.

Pour des bulles d'air s'élevant dans l'eau à 18° C., Miyagi trouve une vitesse maximum de 27,8 cm./sec. correspondant à un rayon d'environ 0,165 cm. Ensuite, la vitesse limite varie en sens inverse du rayon et tend vers une valeur constante de 23,1 cm./sec. pour des bulles de rayon supérieur à 0,33 cm. L'expérience montre que, si la bulle est très petite, sa forme est sensiblement sphérique. Plus grosse, elle s'applatit, son grand axe étant toujours normal au déplacement, cette forme n'est d'ailleurs jamais symétrique du

Fig. 1

fait des perturbations initiales qu'il est impossible d'éviter ; aussi la trajectoire n'est plus rectiligne mais forme une sorte d'hélice autour de la verticale. Lorsque la bulle est très grosse, enfin, elle devient instable et a tendance à se diviser en bulles plus petites.

Pour les gouttes d'eau tombant dans l'air, Lenard trouve une vitesse maximum de 8 m./sec. pour des gouttes de 0,25 cm. de rayon. Au-delà, la vitesse limite tend à décroître lorsque le rayon augmente car la goutte se déforme, s'écrase, ce

Fig. 2

qui accroît la résistance de l'air. Pour des gouttes de rayon supérieur à 0,30 cm., la déformation est suffisante pour que la goutte se brise avant d'atteindre sa vitesse limite.

Ces rapides indications permettent d'apprécier la complexité du phénomène. Les globules fluides sont soumis à leur poids apparent, à la résistance du fluide ambiant, et à la tension superficielle. Lorsque le rayon est très faible, l'action de cette dernière force est prépondérante, le globule demeure sphérique et suit les mêmes lois que les particules solides, compte-tenu d'une correction simple pour les bulles gazeuses. Si le rayon du globule augmente, l'écoulement du fluide devient turbulent, de plus, la pression dynamique de ce fluide prend une valeur de l'ordre de celle que contrebalance la courbure du globule.

Les courants internes de convection déterminés par le frottement superficiel et les variations de la pression intérieure doivent augmenter d'intensité. La forme du globule s'adapte à ces influences complexes, elle s'applatit, corrélativement la résistance du milieu augmente beaucoup ce qui conduit à un maximum de la vitesse limite, puis à une instabilité de forme du globule.

Il est intéressant de noter que des gouttes d'eau ne peuvent tomber dans un courant d'air ascendant de vitesse supérieure à 8 m./sec., tout comme des bulles d'air ne peuvent remonter un courant d'eau descendant de plus de 0,28 m./sec. Enfin Miyagi a utilisé le fait que les bulles de rayon suffisant ont une vitesse d'ascension pratiquement constante pour mettre au point une méthode de mesure des faibles vitesses d'écoulement.

G. HALBRONN.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

- WIESELSBERGER, BETZ et PRANDTL - Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Goettingen - II Lieferung, p. 29.
 RYBSZINSKI : Bull. Acad. Cracovie, 1911.
 HADAMARD : Comptes rendus, t. 152, p. 1735 (1911).
 BOND : Phil. Mag., t. 4, p. 889 (1927).
 ALLEN : Phil. Mag. 55, vol. 50, N^{os} 304 et 300, sept. et nov. (1929), p. 523 et 519.
 LENARD (P.) : Met. Z. Braunschweig. 21 1904, p. 249-62.
 MIYAGI : Phil. Mag. 56, vol. 50, N^o 295 (juillet 1925), p. 112.
 MIYAGI : Technology Reports of the Tôhoku Imperial University, vol. VIII (1929), N^o 4.