

MÉTHODE GÉNÉRALE DE CALCUL DES CHAMBRES D'ÉQUILIBRE ALIMENTÉES PAR 2 CANAUX D'AMENÉE

par **V. GOUTKIN**, Ingénieur I.E.G. et E.I.H.

Dans le « GÉNIE CIVIL » des 1^{er} et 15 avril 1943, Monsieur L. ESCANDE a exposé une méthode de calcul des chambres d'équilibre dans le cas où l'aménagement hydroélectrique comporte 2 (ou plusieurs) canaux d'amenée. Cette méthode qui introduit la notion nouvelle de canal équivalent et permet une généralisation à tous les systèmes possibles, présente cependant à la base une hypothèse restrictive, les lacs d'alimentation devant nécessairement être à la même cote statique.

Nous avons donc repris l'étude de cette question en envisageant le cas général, souvent réalisé en pratique, où il existe une différence A entre les cotes des plans d'eau dans les 2 lacs, ces cotes étant supposées constantes pendant la durée des oscillations dans la chambre.

Nous bornerons le développement qui va suivre au **cas des 2 canaux d'amenée en V** (chambre d'équilibre située au confluent des 2 canaux), mais son application au cas de canaux d'amenée en Y ne présenterait aucune difficulté.

CHAPITRE I PRINCIPES DE CALCUL

Nous désignerons par :

f_1, f_2 les sections respectives d'écoulement dans les 2 canaux d'amenée.

L_1, L_2 les longueurs de ces canaux.

$P_1 = K_1 q_1^2, P_2 = K_2 q_2^2$ les pertes de charge pour les débits $q_1 = f_1 w_1, q_2 = f_2 w_2$ comptés positivement vers la chambre.

V la vitesse d'écoulement dans la chambre, comptée positivement vers le haut.

Z_1, Z_2 les cotes du plan d'eau dans la chambre rapportée aux niveaux respectifs 0 et $-A$ des 2 lacs.

Q le débit des conduites forcées à un instant quelconque t .

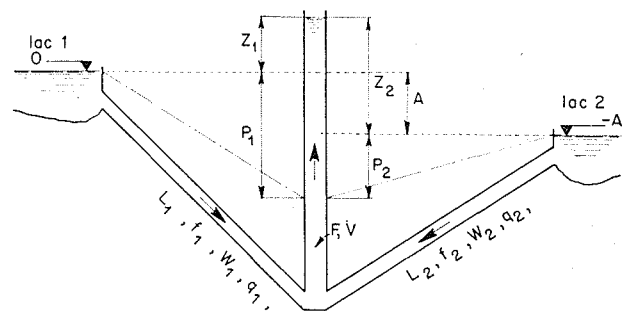


fig. 1

L'équation de continuité s'écrit immédiatement (fig. 1) :

$$q_1 + q_2 = f_1 w_1 + f_2 w_2 = FV + Q \quad (1)$$

ou en dérivant par rapport au temps :

$$f_1 \frac{dw_1}{dt} + f_2 \frac{dw_2}{dt} = \frac{F dV}{dt} + \frac{dQ}{dt} \quad (2)$$

Appliquons maintenant le théorème des quantités de mouvement à la masse d'eau contenue dans chacun des 2 canaux (1) et (2), en négligeant la variation de quantité de mouvement de l'eau à l'intérieur de la chambre d'équilibre.

Nous obtenons les relations suivantes :

$$\frac{L_1}{g} \frac{dW_1}{dt} + Z_1 + \varepsilon_1 P_1 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{L_2}{g} \frac{dW_2}{dt} + Z_2 + \varepsilon_2 P_2 = 0 \quad (4)$$

dans lesquelles ε_1 et ε_2 égaux à ± 1 , ont respectivement les signes de q_1 et q_2 (Il n'y a du reste lieu d'introduire ces facteurs de signe ε_1 et ε_2 que lorsque la perte de charge est considérée comme étant une fonction paire du débit).

Notre méthode de calcul est basée sur l'approximation consistant à admettre que la relation entre pertes de charge :

$$\varepsilon_1 P_1 = \varepsilon_2 P_2 + A \quad (5)$$

qui existe en régime permanent, demeure sensiblement valable pendant les oscillations.

Comme d'autre part on a constamment :

$$Z_2 = Z_1 + A \quad (6)$$

les relations (5) et (6) permettent d'écrire :

$$Z_1 + \varepsilon_1 P_1 = Z_2 + \varepsilon_2 P_2 \quad (7)$$

Il est alors possible, comme nous allons le voir ci-après, de résoudre le problème sans recourir à la méthode par différences finies, également exposée par M. ESCANDE, mathématiquement exacte, mais d'une application beaucoup plus longue.

CHAPITRE II

ÉTUDE DE LA FERMETURE COMPLÈTE INSTANTANÉE A PARTIR DU DÉBIT MAXIMUM Q₀ DES TURBINES

Le débit des conduites étant égal à 0 dès le début du phénomène, l'équation de continuité (2) devient :

$$f_1 \frac{dW_1}{dt} + f_2 \frac{dW_2}{dt} = F \frac{dV}{dt} \quad (2 \text{ bis})$$

Des équations (3) et (4) tirons les valeurs de $\frac{dW_1}{dt}$ et $\frac{dW_2}{dt}$ que nous porterons dans (1 bis).

Il vient successivement :

$$\frac{dW_1}{dt} = \frac{-g}{L_1} (Z_1 + \varepsilon_1 P_1)$$

$$\frac{dW_2}{dt} = \frac{-g}{L_2} (Z_2 + \varepsilon_2 P_2)$$

et en vertu de l'égalité : (7)

$$\frac{dW_2}{dt} = \frac{g}{L_2} (Z_1 + \varepsilon_1 P_1)$$

et enfin :

$$F \frac{dV}{dt} + g \left(\frac{f_1}{L_1} + \frac{f_2}{L_2} \right) Z + g \left(\frac{f_1}{L_1} + \frac{f_2}{L_2} \right) \varepsilon_1 P_1 = 0$$

Posons :

$$\frac{f}{L} = \frac{f_1}{L_1} + \frac{f_2}{L_2} \quad (8)$$

L'équation précédente s'écrit alors :

$$\frac{LF}{gf} \frac{dV}{dt} + Z_1 + \varepsilon_1 P_1 = 0$$

ou encore :

$$\frac{LF}{gf} V \frac{dV}{dZ} + Z_1 + \varepsilon_1 P_1 = 0 \quad (9)$$

L'expression (9) n'est autre que l'équation de mouvement obtenue avec un canal fictif équivalent, défini par l'égalité (8) et dans lequel la perte de charge serait constamment égale à celle P₁ créée par le canal 1.

La surélévation Z_{1,m} dans la chambre sera évidemment comptée à partir du niveau du lac 1.

De même, on pourrait écrire :

$$\frac{LF}{gf} V \frac{dV}{dZ} + Z_2 + \varepsilon_2 P_2 = 0 \quad (9 \text{ bis})$$

La surélévation maximum Z_{2,m} dans la chambre, comptée à partir du niveau statique (— A) du lac 2, serait celle obtenue avec un canal fictif équivalent, toujours défini par la relation (8) et où la perte de charge serait constamment égale à P₂.

INTÉGRATION GRAPHIQUE

1 — Equation différentielle :

L'équation (9) (ou 9 bis) n'est pas intégrale analytiquement, mais elle se prête, en revanche, à la méthode de résolution graphique.

En effet, posons pour simplifier :

$$C = \frac{gf}{FL} \quad (10)$$

L'équation (9) s'écrit :

$$\frac{dV}{dZ} = -C \frac{Z_1 + P_1}{V} \quad (11)$$

que nous intégrerons sous cette forme, après avoir examiné la perte de charge P₁ en fonction de V.

2 — Expression de la perte de charge :

L'égalité (5) s'écrit identiquement :

$$\varepsilon_1 K_1 q_1^2 = \varepsilon_2 K_2 q_2^2 + A \quad (5 \text{ bis})$$

et puisque : $q_1 + q_2 = FV$

$$\varepsilon_1 K_1 q_1^2 = \varepsilon_2 K_2 (FV - q_1)^2 + A \quad (5 \text{ ter})$$

La résolution de cette dernière expression conduit à :

$$q_1 = \frac{-\varepsilon_2 K_2 FV + \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 K_1 K_2 F^2 V^2 + A (\varepsilon_1 K_1 - \varepsilon_2 K_2)}}{\varepsilon_1 K_1 - \varepsilon_2 K_2} \quad (12)$$

D'où l'on tire :

$$P_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 K_1 K_2 (\varepsilon_1 K_1 + \varepsilon_2 K_2) F^2 V^2 + \varepsilon_1 K_1 (\varepsilon_1 K_1 - \varepsilon_2 K_2) A - 2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 K_1 K_2 FV \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 K_1 K_2 F^2 V^2 + A (\varepsilon_1 K_1 - \varepsilon_2 K_2)}}{(\varepsilon_1 K_1 - \varepsilon_2 K_2)^2} \quad (13)$$

On peut dès lors, tracer la courbe $P_1 = \phi(V)$, en remarquant que pendant le début de la 1^{re} montée, on a :

$$q_1 > 0 \quad q_2 > 0 \quad \varepsilon_1 = +1 \quad \varepsilon_2 = +1$$

jusqu'au moment où commence le remplissage du lac 2 par le lac 1, c'est-à-dire jusqu'à ce que :

$$P_1 = A = K_1 F^2 V^2, \quad q_1 = FV, \quad q_2 = 0, \quad V = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{A}{K_1}}$$

Ensuite q_2 et ε_2 deviennent négatifs.

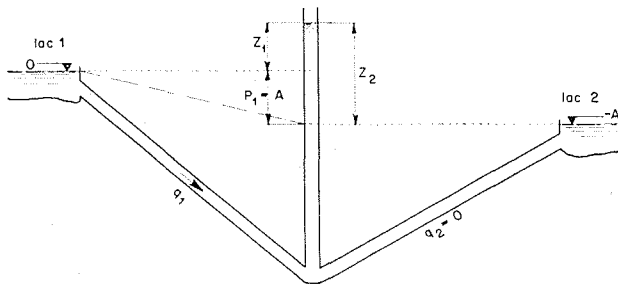


fig. 2

3 — Construction du Graphique :

Les relations précédentes (11 et 13) permettent de construire graphiquement, par le procédé habituel des normales, la courbe $Z_1 = f(V)$ et de déterminer en particulier la cote maximum Z_{1m} atteinte par l'oscillation dans la chambre, à la fin de la 1^{re} montée (fig. 3).

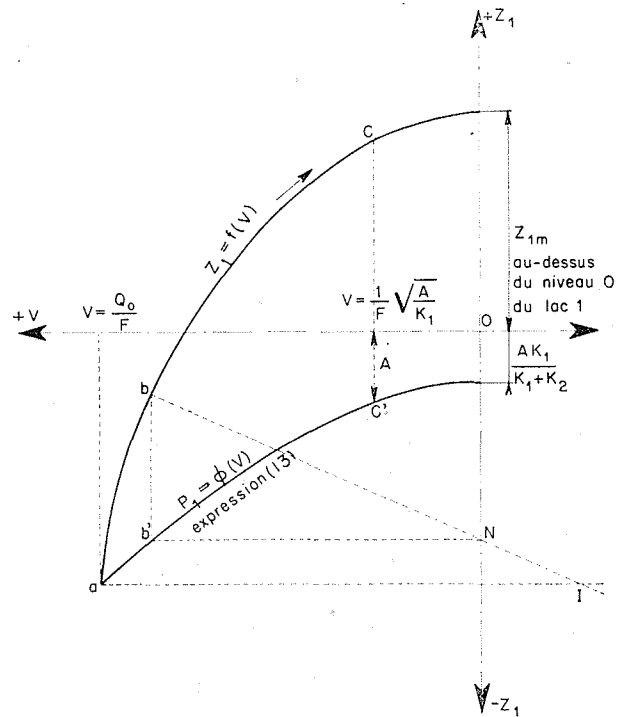


fig. 3

Les conditions initiales de mouvement sont :

$$V = \frac{Q_0}{F} \quad Z_1 = -P_1 \quad \frac{dV}{dZ} = 0$$

et le rayon de courbure :

$$\rho_0 = -\frac{Q_0}{g} \frac{1}{\frac{f_1}{L_1} + \frac{f_2}{L_2}}$$

Le rayon de courbure présente une discontinuité au point (c) d'abscisse

$$V = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{A}{K_1}}$$

4 — Variables sans dimensions :

Il y a toujours intérêt, pour la rapidité de la construction, à utiliser les valeurs relatives.

Ainsi, en posant :

$$v = \frac{V}{V_0} \quad z_1 = \frac{Z_1}{Z_*} \quad p_1 = \frac{P_1}{Z_*}$$

avec

$$z_* = v_0 \sqrt{\frac{F}{g} \frac{1}{\frac{f_1}{L_1} + \frac{f_2}{L_2}}}$$

l'équation (11) devient :

$$\frac{dv}{dz} = - \frac{z_1 p_1}{v} \tag{14}$$

et les conditions initiales de mouvement :

$$v = 1 \quad z_1 = - p_1 \quad \frac{dv}{dz} = 0 \quad \varphi_0 = - 1$$

En raison de la multiplicité des données, la méthode ne peut être généralisée, en ce sens qu'elle ne permet pas l'établissement d'un abaque classificatif.

Pour chaque cas étudié, il faut donc faire intervenir la solution graphique.

5 — Cas particulier :

Les 2 lacs sont au même niveau (A = 0)

En vertu de l'hypothèse de base (4) on a immédiatement :

$$P_1 = P_2 = P$$

En faisant A = 0 dans l'expression (13) de P₁, il résulte après quelques simplifications :

$$P = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{K_1}} + \frac{1}{\sqrt{K_2}}\right)} (FV)^2 \tag{15}$$

soit :

$$P = K F^2 V^2 \tag{15 bis}$$

On retrouve ainsi la formule proposée par Monsieur ESCANDE.

Exprimons la perte de charge P en fonction de P₀ correspondant au début permanent initial :

$$P = P_0 \left(\frac{FV}{FV_0} \right)^2 = P_0 v^2 \tag{16}$$

et en valeurs relatives :

$$p = p_0 v^2 \tag{16 bis}$$

L'équation différentielle de mouvement devient alors :

$$\frac{dv}{dz} = - \frac{z + p_0 v^2}{v} \tag{17}$$

La valeur maximum relative z_n ne dépendant que de celle de p₀, il est possible dans ce cas, d'utiliser l'abaque classificatif de fermeture figurant dans l'ouvrage de MM. CALAME et GADEN « Théorie des Chambres d'équilibre ».

CHAPITRE III

ÉTUDE D'UNE OUVERTURE COMPLÈTE INSTANTANÉE DE 0 à Q₀

L'équation de mouvement demeure :

$$\frac{dV}{dZ} = - C \frac{Z_1 + P_1}{V} \tag{11}$$

Vis-à-vis des relations précédentes, seule change l'expression de la perte de charge P₁.

En effet, en considérant l'égalité :

$$\varepsilon_1 K_1 q_1^2 = \varepsilon_2 K_2 q_2^2 + A \tag{5 bis}$$

et remarquant que cette fois :

$$q_1 + q_2 = FV + Q_0 \tag{1 bis}$$

on obtient :

$$P_1 = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 K_1 K_2 (\epsilon_1 K_1 + \epsilon_2 K_2) (FV + Q_0)^2 + \epsilon_1 K_1 (\epsilon_1 K_1 - \epsilon_2 K_2) A - 2 \epsilon_1 \epsilon_2 K_1 K_2 (FV + Q_0) \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 K_1 K_2 (FV + Q_0)^2 + A (\epsilon_1 K_1 - \epsilon_2 K_2)}}{(\epsilon_1 K_1 - \epsilon_2 K_2)^2} \quad (18)$$

Au début de la descente, on a :

$$q_1 > 0 \quad q_2 < 0 \quad \epsilon_1 = +1 \quad \epsilon_2 = -1$$

jusqu'au moment où cesse le remplissage du lac 2 par le lac 1, c'est-à-dire jusqu'à ce que :

$$P_1 = A = K_1 q_1^2 \quad q_1 = Q_0 + FV \quad q_2 = 0$$

$$V = \frac{1}{F} \left(\sqrt{\frac{A}{K_1}} - Q_0 \right)$$

Ensuite q_2 et ϵ_2 deviennent positifs.

L'intégration graphique s'effectue suivant les mêmes principes que pour la fermeture et permet de déterminer, en particulier, la descente maximum du plan d'eau dans la chambre.

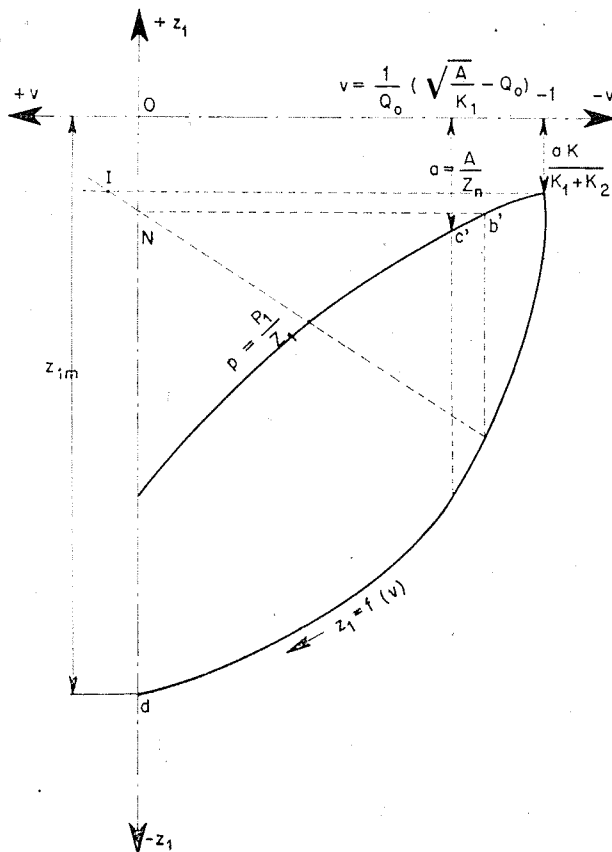


fig. 4

En passant aux valeurs relatives, l'équation de mouvement s'écrit toujours :

$$\frac{dv}{dz} = - \frac{z_1 + p_1}{v} \quad (14)$$

mais les conditions initiales sont :

$$z_1 = -p_1 \quad \frac{dv}{dz} = 0 \quad v = -1 \quad p_0 = 1$$

La construction graphique correspondante est indiquée sur la figure 4.

CAS PARTICULIER

Lacs au même niveau (A = 0)

L'expression de la perte de charge devient :

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{K_1}} + \frac{1}{\sqrt{K_2}} \right)^2} (FV + Q_0)^2 \quad (19)$$

ou bien, fonction de P_0 :

$$P_1 = P_0 (1 + v)^2 \quad (20)$$

et en valeurs relatives :

$$p_1 = p_0 (1 + v)^2 \quad (21)$$

L'équation de mouvement devient ainsi :

$$\frac{dv}{dz} = - \frac{z_1 + p_0 (1 + v)^2}{v} \quad (22)$$

La méthode s'applique sans difficultés aussi bien au cas des manœuvres partielles et linéaires de l'obturateur, qu'à l'étude des chambres à section multiples, à étranglement inférieur, etc...

Ainsi dans le **cas d'une chambre à étranglement inférieur, lors d'une fermeture totale instantanée, par exemple**, il suffirait pendant la 1^{re} phase de montée, d'intégrer suivant les mêmes principes, l'équation de mouvement :

$$\frac{dV}{dZ} = - C \frac{Z_1 + P_1 + R_0 v^2}{V} \quad (23)$$

dans laquelle R_0 représente la perte de charge créée par l'étranglement lorsque celui-ci est traversé par le débit permanent Q_0 avant fermeture.

En valeurs relatives, l'équation (23) prend la forme ci-après :

$$\frac{dv}{dz} = - \frac{z_1 + p_1 + r_0 v^2}{v} \quad (24)$$

Lors d'une ouverture, pendant la 1^{re} phase de

descente, l'équation de mouvement s'écrirait :

$$\frac{dv}{dz} = - \frac{z_1 + p_1 - r_0 v^2}{v} \quad (25)$$

En collaboration avec M. ESCANDE, nous justifierons, dans un prochain article, l'utilisation pratique de la méthode graphique que nous venons d'exposer, en comparant les résultats obtenus à l'aide de cette dernière et de la méthode aux Différences Finies, appliquées successivement au calcul de la Chambre d'Equilibre complexe de l'Usine de Bioge.

