

SIMILITUDE DES MODÈLES FLUVIAUX A FOND FIXE

par M. CRAYA

Les premières recherches d'hydraulique fluviale par le moyen de modèles réduits remontent sans doute aux expériences entreprises vers 1875 sur « la petite rivière artificielle de Bordeaux ». Fargue avait énoncé quelques années auparavant ses célèbres lois tirées de l'observation de la Garonne ; ces lois avaient été accueillies avec quelque scepticisme et l'idée s'était alors fait jour de les expérimenter en petit.

Deux ans après, O. Reynolds étudiait en modèle réduit l'estuaire de la Mersey avec des vues un peu plus précises sur la similitude.

Depuis 1898, de grands laboratoires hydrauliques se sont créés ; la méthode expérimentale a été appliquée aux problèmes les plus variés parmi lesquels la branche de l'hydraulique fluviale et maritime n'a cessé de croître en importance.

Cette branche demeure cependant l'une des plus délicates du point de vue similitude ; on s'y intéresse en effet, non seulement au mouvement de l'eau, mais aussi à son action sur un fond et des rives affouillables ; or, si les lois de la suspension ont pu être éclairées par une meilleure connaissance de la diffusion turbulente, le mécanisme de l'entraînement du fond demeure encore assez éloigné d'une expression vraiment rationnelle.

Mais, même en réservant ce problème essentiel (ce que nous ferons ici) et en se limitant aux modèles fluviaux à fonds fixes, un certain nombre de particularités distinguent de la similitude classique de Froude la similitude applicable à ces modèles.

C'est d'abord l'influence prépondérante de la rugosité du lit et de la nature généralement turbulente du courant.

C'est encore le développement considérable en plan des écoulements à étudier, comparé à une hauteur d'eau relativement très faible ; il en résulte que si l'on veut avoir un modèle de dimensions raisonnables avec une hauteur d'eau qui ne soit pas infime, on est amené à adopter une échelle verticale différente de l'échelle en plan ; c'est ainsi que le modèle de la Mersey comportait déjà une distorsion de 60.

Nous voudrions dans ces lignes analyser d'un

peu plus près cette similitude spéciale des modèles fluviaux (et de quelques modèles maritimes) à fond fixe.

Certes, du point de vue de la technique des modèles, ce n'est là, en général, qu'un aspect partiel de la question ; mais cet aspect est suffisant pour un certain nombre de problèmes où la mobilité du lit n'est pas en cause ; et pour les autres, il constitue un cadre où viendront s'ordonner les exigences supplémentaires de l'entraînement du fond.

D'autre part, il faut reconnaître qu'il subsiste dans la littérature quelque flou ou quelques discordances, notamment sur la légitimité de la distorsion ; universellement appliquée, celle-ci est considérée par certains comme un pis-aller, alors que pour d'autres elle ne trahit pas la réalité ; en fait, on sait qu'il n'est pas de similitude complète et, à plus forte raison, la distorsion ne peut-elle s'accommoder que de certains aspects de l'écoulement dont tout le problème est précisément de tracer la frontière.

Les quelques remarques qui précèdent légitimeront, nous l'espérons, cette petite méditation à laquelle nous convions le lecteur, en même temps qu'elles en fixent le cadre.

Bien que très connues, nous croyons utile tout d'abord, de rappeler succinctement les similitudes classiques.

Nous passons ensuite à l'examen de la similitude spéciale des modèles fluviaux à fond fixe.

Dans une dernière partie, enfin, nous abordons ce qu'en termes photographiques on pourrait appeler la profondeur de champ du modèle, c'est-à-dire le point à partir duquel l'image qu'il donne de la réalité devient moins précise et fidèle.

I. — LES SIMILITUDES

Les exposés sur la similitude font appel principalement à deux méthodes ; la première, rapide et élégante, coïncide avec l'Analyse dimensionnelle et se fonde sur le théorème des π ; cette facilité n'est malheureusement qu'apparente et cache bien des points délicats comme on peut le voir dans l'ouvrage classique de BRIDGMANN, et dans les controverses sans fin qu'a suscitées la question.

La seconde méthode, plus sûre, consiste à énoncer les lois élémentaires du phénomène que l'on a en vue et, mieux encore lorsque cela est possible, à en écrire les équations en s'arrêtant juste au seuil de l'intégration.

Écoulements en fluide parfait pesant

D'une manière générale, le mouvement de tout fluide est régi par la loi fondamentale :

$$F = m \gamma$$

écrite pour un volume arbitrairement découpé dans ce fluide.

Tout est de bien dénombrer dans chaque cas les forces qui entrent en jeu, plus précisément celles que l'on estime prépondérantes.

Arrêtons-nous d'abord au cas où l'on fait entrer en compte, d'une part la pesanteur, d'autre part les forces de contact sous la forme d'une simple pression normale à chaque coupe pratiquée dans le liquide ; c'est le schéma du fluide parfait que par surcroît nous supposons ici incompressible.

Si l'on découpe un petit élément prismatique entre deux surfaces d'égale pression, on voit

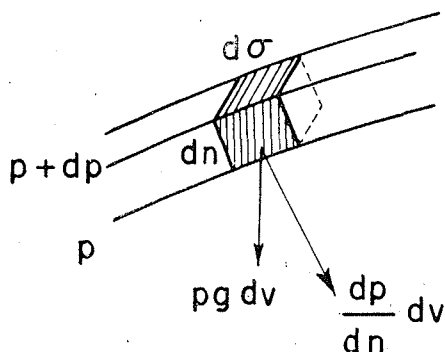


Fig. 1

(fig. 1) que la résultante des forces de pression qu'il subit est :

$$\frac{dp}{dn} dn d\sigma = \frac{dp}{dn} d v$$

Par ailleurs, son poids est $\rho g d v$.

Enfin, la quantité d'accélération de l'élément s'écrit :

$$\rho d v \frac{d v}{d t}$$

Supposons qu'il existe deux écoulements où toutes les trajectoires soient géométriquement semblables dans le rapport λ et cinématiquement dans le rapport τ .

Il s'ensuit que toutes les accélérations seront dans le rapport $\frac{\lambda}{\tau^2}$.

Ce rapport sera aussi celui des forces par unité

de masse, et notamment de g qui lui, est le même dans les deux cas, donc :

$$\frac{\lambda}{\tau^2} = 1 \quad \tau = \sqrt{\lambda}$$

Le rapport des vitesses étant $\frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\lambda}$ on peut dire aussi que deux quantités homologues quelconques sont égales, c'est-à-dire qu'une $g L$

telle grandeur est un invariant de la similitude (tout comme l'accélération) ; c'est le nombre de Froude.

Le même raisonnement montre que le groupement $\frac{\Delta p}{\rho g L}$ ne varie pas, c'est-à-dire que les différences de pression, exprimées en hauteur de liquide, suivent la similitude des longueurs λ .

Ces conditions devront en particulier être réalisées aux frontières de l'écoulement ; les parois solides seront géométriquement semblables ; aux sections d'entrée et de sortie, doivent être respectées les similitudes des niveaux et des vitesses.

Le degré d'approximation requis est dans chaque cas affaire de jugement ; parfois, les choses se trouvent facilitées ; par exemple pour l'étude d'une entrée d'évacuateur de crue, on commence le modèle dans une zone de vitesses négligeables en amont, où le niveau est la donnée essentielle, et quant à la section terminale en écoulement torrentiel, son influence ne réagit que localement.

Nous n'insisterons pas sur cette similitude qui est la plus connue et qui trouve une large application dans les Laboratoires pour l'étude de certains ouvrages ; il s'agit d'écoulements où les pertes de charge peuvent être négligées, et où le phénomène principal est une surface libre incurvée par le jeu de la pesanteur et des parois.

Les lois de la similitude que nous avons rappelées brièvement peuvent s'établir avec plus de rigueur en écrivant les équations d'Euler (dont nous nous sommes implicitement servis), ainsi que l'équation de continuité et en précisant les données qui achèvent de définir mathématiquement le problème.

Écoulements visqueux

Dans les liquides naturels en mouvement l'expérience montre que pour toute coupe virtuelle, il faut considérer en plus de la pression normale, une composante tangentielle qui dépend de la déformation locale du fluide et d'une constante physique qui est la viscosité μ .

Dans le cas très simple d'un écoulement parallèle (fig. 2) la composante relative à une coupe

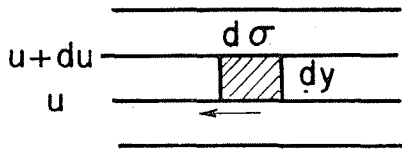


Fig. 2

pratiquée suivant le courant est donnée par la loi élémentaire de Newton.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Il s'ensuit qu'un petit élément prismatique compris entre deux lignes de courant est soumis à une force de viscosité.

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} d\sigma dy = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} d v$$

La force par unité de masse est alors $\nu \frac{d^2 u}{dy^2}$

en désignant par ν la viscosité cinématique.

Si nous considérons encore deux écoulements semblables avec les rapports λ et τ pour les longueurs et pour les temps, la quantité précédente doit suivre la similitude des accélérations, c'est-à-dire varier comme $\frac{\nu}{\tau^2}$

En appelant r_ν le rapport des viscosités des deux liquides en expérience, on doit donc avoir:

$$r_\nu \frac{\lambda/\tau}{\lambda^2} = \frac{\lambda}{\tau^2} \quad \tau = \frac{\lambda^2}{r_\nu}$$

Le rapport r_ν des vitesses homologues s'en déduit par :

$$r_\nu = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{r_\nu}{\lambda}$$

VL

On voit que le groupement $\frac{VL}{\nu}$ ne varie pas ;

cet invariant de la similitude en question est le nombre de Reynolds.

Naturellement, pour un fluide pesant, on devrait avoir par surcroît l'invariance du nombre de Froude et il est devenu banal de constater que ces conditions seront en général incompatibles.

L'examen sommaire de la similitude qui vient d'être fait peut être établi avec toute la rigueur désirable au moyen des équations de Navier-Stokes ; ce n'est qu'une extension au cas général de ce qui vient d'être établi pour un exemple très particulier et on retrouve toujours l'invariant de Reynolds.

Nous ne nous sommes pas ici appesantis sur la question, parce que cette « similitude » de

Reynolds est, du point de vue des essais hydrauliques, le plus souvent sans objet.

Le champ d'application en serait l'étude de quelques phénomènes où la viscosité seule serait prépondérante.

En hydraulique, la viscosité joue un rôle complexe ; parfois, elle est entièrement négligeable et l'on peut sans crainte employer la similitude de Froude ; le plus souvent, l'écoulement étudié est turbulent et c'est une toute autre affaire ; dans les deux cas, il n'y a pas à proprement parler de similitude de Reynolds à réaliser ; le nombre de REYNOLDS permet, en revanche, de « prendre la température » du phénomène et de marquer des frontières où les choses prennent tel ou tel aspect.

Ecoulements turbulents

Dans la plupart des écoulements qu'étudie l'hydraulicien, les caractéristiques locales : vitesses, pressions, fluctuent de manière désordonnée autour d'une valeur moyenne ; c'est à ces moyennes qu'on s'intéresse essentiellement et l'on fermerait volontiers les yeux sur le détail de l'agitation qui s'y surajoute.

Seulement, à qui veut l'ignorer, dans sa structure fine, l'agitation turbulente apparaît comme une source apparente de pressions obliques (analogues à celles de la viscosité mais uniquement liées, ici, aux échanges incessants des quantités de mouvement).

Il faut reconnaître malgré les progrès qui ont été réalisés depuis Boussinesq et Reynolds que la théorie de la turbulence en est toujours à ses débuts.

Parmi les résultats obtenus qui intéressent le plus notre objet, il faut mentionner les recherches expérimentales sur l'écoulement turbulent en conduite et les notions qu'elles ont permis de dégager ; notamment l'existence de deux régimes, l'un sous la dépendance directe de la viscosité, l'autre réglé principalement par la rugosité de la paroi, et le rôle de la couche limite laminaire dans le passage de l'un à l'autre.

Nous reviendrons sur cette question des pertes de charge turbulentes à propos de la similitude des rivières.

Effets de la tension superficielle

A la surface libre d'un liquide, l'action de la tension superficielle est équivalente à une modification de la pression imposée, proportionnelle à

la courbure
$$\Delta p = A \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]$$

Considérons pour simplifier un écoulement plan (fig. 3) et un petit élément de hauteur dy

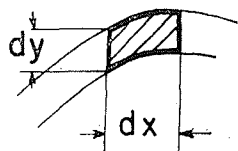


Fig. 3

parallèle à la surface libre (et d'épaisseur unité).

Les forces capillaires introduisent entre les forces verticales extrêmes une force différentielle :

$$A \frac{dR}{dx} dx dy$$

Cela fait une force par unité de masse

$$\frac{A}{\rho} \frac{dR}{dx}$$

Appelons r_A et r_ρ les rapports de constante capillaire et de densité des deux liquides et supposons encore l'existence d'une similitude cinématique caractérisée par λ et τ .

On devra avoir cette fois :

$$\frac{r_A}{r_\rho} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\lambda}{\tau^2} \quad \tau = \sqrt{\lambda^3 \frac{r_\rho}{r_A}}$$

Compte tenu de $r_v = \frac{\lambda}{\tau}$, on en déduit pour

$$\text{le rapport des vitesses} \quad r_v^2 = \frac{r_A}{\lambda r_\rho}$$

Il revient au même de dire que le groupement

$$\frac{v^2}{A/\rho L}$$

cet invariant est le nombre de Weber.

On pourrait reprendre ici des remarques analogues à celles qui ont été faites pour le nombre de Reynolds.

Généralement, les effets de la tension superficielle sont négligeables et il n'y a pas lieu de se préoccuper de réaliser leur similitude ; il faut simplement s'assurer que l'échelle d'un modèle n'est pas trop petite pour que la capillarité y devienne sensible ; le nombre de WEBER peut servir de critérium à cet égard.

Remarque d'ensemble

Ce rapide coup d'œil qui a été volontairement très abrégé aura montré, nous l'espérons, qu'il n'y a que des similitudes particulières pour des effets particuliers.

Est-il besoin d'ajouter qu'aucune de celles

que nous avons examinées ne convient strictement pour l'étude des écoulements en rivière qui sont essentiellement sous la dépendance des pertes de charge turbulentes.

Parler ici du critérium de Reynolds et de son incompatibilité avec celui de Froude n'est pas entièrement adéquat au problème.

Il n'y a qu'une manière d'opérer : préciser et limiter ses ambitions et voir si pour certaines caractéristiques principales de l'écoulement, les choses ne se présenteront pas de façon plus favorable.

Nous allons analyser à cet effet, les lois des écoulements en rivière.

II. — EQUATIONS ET SIMILITUDE DU MOUVEMENT MOYEN DES RIVIERES

Écoulement graduellement varié

Précisons les hypothèses dans lesquelles nous nous placerons d'abord, hypothèses qui se résument dans la notion de courant graduellement varié et qui sont très convenablement vérifiées dans les écoulements fluviaux.

Le profil en travers de la rivière sans être nécessairement de forme géométrique simple sera assez régulier ; il pourra varier d'une section à la suivante mais graduellement ; le profil en long du fond ne présentera que des courbures peu sensibles et très progressives ; même hypothèse en ce qui concerne la surface libre qui sera supposée très peu incurvée et faisant avec le fond un angle faible ; la pente moyenne du fond comme de la surface libre pourrait d'ailleurs être quelconque, mais il se trouve qu'elle est généralement faible et c'est ce qu'on admettra ici.

La conséquence fondamentale qui se déduit de ces hypothèses est que sur tout profil en travers la répartition de la pression est pseudo-hydrostatique ; nous entendons par là (fig. 4) qu'elle est la même que celle qui s'établirait si la section était une paroi avec un niveau statique NN.

Considérons en effet un petit prisme liquide adjacent au profil ; les hypothèses faites reviennent à admettre que les trajectoires des différentes particules d'eau ont une courbure insensible et par conséquent une composante de l'accélération suivant le profil négligeable ; il en résulte que la pression sur les deux faces f, f' du prisme équilibre la composante suivant sn de son poids (fig. 4) exactement comme pour une eau au repos, de niveau NN.

La pente de la surface libre à un instant donné, a dans ces conditions, une signification dynamique, particulièrement simple.

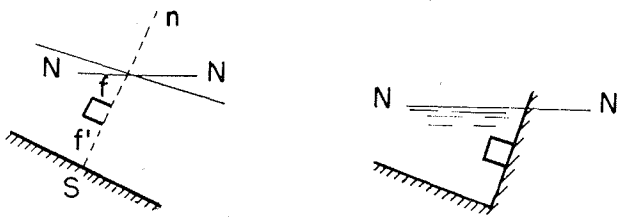


Fig. 4

Découpons en effet par la pensée un volume liquide V (fig. 5) dans le courant, et cherchons

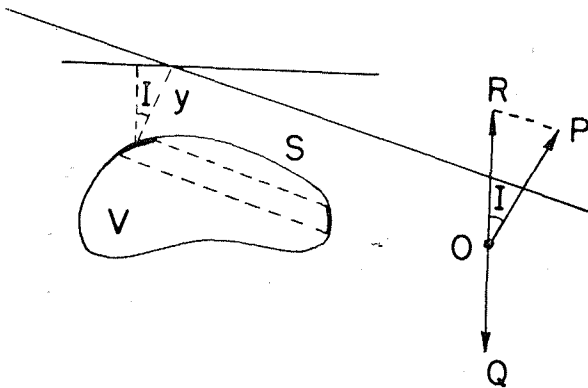


Fig. 5

la résultante de pressions auxquelles il est soumis, c'est-à-dire une sorte de généralisation à notre cas du principe d'Archimède.

La pression en un point quelconque étant comme il vient d'être dit $\rho g y \cos I$, tout se passe au facteur $\cos I$ près, comme pour une surface libre horizontale de l'hydrostatique ordinaire ; c'est-à-dire que la surface fermée S subit une pression $\rho g V \cos I$ qui est perpendiculaire à la surface libre.

Cherchons enfin la résultante de cette poussée et du poids (fig. 5) ; la poussée OP n'est autre que la projection sur la normale à la surface libre d'un vecteur OR opposé au poids ; la résultante cherchée n'est autre par conséquent que la projection de ce poids sur la surface libre ;

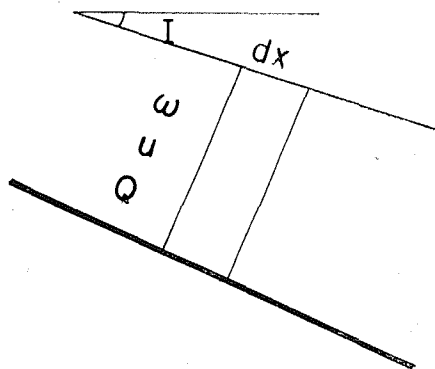


Fig. 6

celle-ci joue on le voit, pour les particules liquides, un rôle très comparable à un plan incliné.

Equations du mouvement moyen

Considérons maintenant une tranche de courant d'épaisseur dx (fig. 6) ; à ne considérer que les forces précédentes, celle-ci prendrait une accélération $g \sin I$; il faut y ajouter cependant les forces de frottement, soit $\tau \times dx$ (τ effort tangentiel moyen par unité de surface, χ périmètre mouillé) qui correspondent à une accélération négative $-\frac{\tau}{\rho R}$ (R rayon hydraulique).

Soit U la vitesse moyenne de débit, si tous les éléments de la tranche avaient la même vitesse U, son accélération s'écrirait

$$\gamma = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}$$

En raison de l'inégale répartition des vitesses, il faudrait en réalité considérer la moyenne des accélérations, mais la différence est généralement assez faible et nous la négligerons ici.

L'équation du mouvement s'écrit dans ces conditions $g \sin I - \frac{\tau}{\rho R} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}$

Il faut y ajouter l'équation de continuité qui exprime le bilan de l'eau entrée, sortie, et accumulée dans une tranche fixe, soit Q désignant

le débit et ω la section : $\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$

La grandeur τ/ρ est homogène au carré d'une vitesse (généralement appelée frottement vitesse u_*).

On peut donc poser : $\frac{\tau}{\rho} = u_*^2 = f U^2$

Par ailleurs si la pente I est faible comme nous l'avons supposé, on peut confondre le sinus avec l'angle, et en appelant i la pente du fond

$$I \approx i = - \frac{\partial h}{\partial x}$$

Similitude du mouvement moyen

Considérons une rivière dont nous nous proposons d'étudier le comportement et, d'autre part un modèle établi suivant les règles suivantes.

Pour la reproduction du lit on aura adopté trois échelles différentes.

Deux sont relatives aux profils en travers ; nous appellerons μ l'échelle des distances transversales, et ζ l'échelle des distances verticales.

La troisième échelle des longueurs concernera les distances longitudinales de la rivière et sera désignée par λ .

On désignera enfin par r_f le rapport des coefficients de frottement des deux canaux ; on sait qu'en régime turbulent « rugueux » f dépend principalement de la rugosité du fond, d'une dimension linéaire de la section transversale, et de la forme même de cette section ; nous admettrons qu'en prenant pour dimension caractéristique le rayon hydraulique, on englobe aussi dans une large mesure le coefficient de forme de la section.

Ceci dit, nous nous posons la question suivante : est-il possible de réaliser sur le modèle un écoulement reproduisant les caractéristiques moyennes de l'écoulement originel (niveau dans chaque profil, temps de parcours, vitesse, débits) conformément à la correspondance ci-après.

Rapport des distances longitudinales	λ
Rapport des hauteurs d'eau	ζ
Rapport des temps	τ
Rapport des vitesses	r_v
Rapport des débits	r_Q

Les vitesses dont il s'agit étant des vitesses longitudinales, nous remarquerons d'abord que

$$r_v = \frac{\lambda}{\tau}$$

Le rapport de deux sections transversales pour des niveaux homologues est d'autre part

$$r_Q = \mu \zeta$$

On en déduit le rapport des débits par

$$Q = U\omega \text{ soit } r_Q = \frac{\lambda \mu \zeta}{\tau}$$

Remarquons encore que deux pentes longitudinales (pente de fond par exemple) sont dans

$$\text{le rapport } r_f = \frac{\zeta}{\lambda}$$

En revanche, le rapport de deux longueurs homologues d'un profil en travers et notamment du périmètre mouillé, n'a pas une valeur fixe, du moins lorsque les échelles μ et ζ ne sont pas les mêmes, c'est-à-dire lorsque les profils en travers sont distordus ; il en résulte que, en principe, il n'y a pas une échelle unique pour le rayon hydraulique ; nous appellerons r_R le rapport de deux rayons homologues (ce rapport variant avec le niveau).

Si nous distinguons par un indice prime les grandeurs relatives au modèle, elles seront si les choses se passent comme nous le désirons, égales aux grandeurs homologues de la rivière, multipliées par le facteur de réduction correspondant.

Comme les grandeurs du modèle vérifient les équations de Saint-Venant, on aura en ce qui les concerne, les relations

$$3) \quad \begin{aligned} g I' &= \frac{dU'}{dt'} + f' \frac{U'^2}{R'} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} + \frac{\partial \omega'}{\partial t'} &= 0. \end{aligned}$$

Elles devraient alors entraîner pour les grandeurs homologues du prototype, les relations

$$3') \quad \begin{aligned} \frac{\zeta}{\lambda} g I &= \frac{\lambda}{\tau^2} \frac{dU}{dt} + \frac{r_f}{r_R} \frac{\lambda^2}{\tau^2} f \frac{U^2}{R} \\ \frac{\mu \zeta}{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\mu \zeta}{\tau} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Mais ce prototype vérifie lui-même les équations du mouvement $gI = \frac{dU}{dt} + f \frac{U^2}{R}$

$$4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

Pour que nos hypothèses de similitude soient fondées, il faut donc que les équations (3') et (4) soient compatibles, c'est-à-dire que les multiplicateurs par lesquels les premières diffèrent des secondes, soient tous égaux pour une même équation.

Ceci est automatiquement vérifié pour l'équation de continuité ; quant à l'équation dyna-

$$\text{mique, elle impose } \frac{\zeta}{\lambda} = \frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{r_f}{r_R} \frac{\lambda^2}{\tau^2}$$

La première égalité fixe l'échelle des temps

$$\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{\zeta}}$$

La seconde définit le rapport des coefficients

$$\text{de résistance } r_f = \frac{r_R}{\lambda}$$

Si l'on considère notamment une section de forme très plate, le rayon hydraulique diffère peu de la hauteur moyenne, et l'on a $r_R = \zeta$.

On voit que dans ce cas le coefficient f doit suivre la même similitude que les pentes longitudinales.

En résumé, nous disposons arbitrairement de trois échelles λ , μ et ζ .

Les échelles suivantes s'en déduisent obligatoirement :

$$\text{Echelle des temps } \tau = \frac{\lambda}{\sqrt{\zeta}}$$

$$\text{Echelle des vitesses } r_u = \sqrt{\zeta}$$

$$\text{Echelle des débits } r_Q = \mu \zeta^{3/2}$$

De plus, les rugosités doivent être ajustées de telle sorte que (dans le cas d'un lit très plat) les coefficients de résistance soient dans le rapport des pentes ζ/λ .

Il existe bien des formules plus ou moins empiriques qui séparent dans ce coefficient de résistance ce qui est dû à la nature de la paroi et ce qui dépend des dimensions du canal.

Les formules monômes du type Manning

s'écrivent : $f = \frac{K}{R^{1/3}}$

et on en déduit $r_K = r_f \zeta^{1/3} = \frac{\zeta^{4/3}}{\lambda}$

Il y aurait certes beaucoup à dire sur les différentes formules de perte de charge et en explicitant celle de Manning nous avons simplement voulu montrer qu'on peut satisfaire au moins approximativement à la similitude des rugosités.

Extension aux écoulements profonds à deux dimensions

Nous venons donc de conclure non seulement à la possibilité d'une similitude des rivières, mais encore à une latitude assez grande dans le choix de ses caractéristiques.

Cette latitude est due évidemment à ce qu'on a borné ses ambitions aux grandeurs moyennes de l'écoulement et qu'on a volontairement ignoré ce qui se passe en détail dans chaque section.

Nous examinerons tout à l'heure d'un peu plus près les possibilités et les limites de notre similitude ; mais nous pouvons, dès maintenant, en signaler une extension intéressante.

L'hypothèse de base restera la même, savoir la possibilité de négliger la composante verticale de l'accélération circonstance qui entraîne, comme précédemment, la distribution hydrostatique des pressions sur chaque verticale ; ceci exige notamment que la surface libre demeure constamment peu incurvée, notion qui sera précisée ultérieurement ; nous admettrons aussi que la pente de fond et de la surface demeure partout faible (suffisamment pour pouvoir confondre le sinus avec l'arc) ; mais cette fois, nous supposons que l'écoulement a lieu dans toutes les directions et nous ne confondons que les vitesses le long d'une verticale que nous remplaçons par leur valeur moyenne ; pour fixer les idées, notre schéma concernera par exemple le problème d'un port soumis à l'influence de la marée, ou l'étude des seiches d'un lac, ou un écoulement torrentiel courbe dans un canal très plat.

Les lois du mouvement s'obtiennent dans cette approximation par une extension immédiate de ce qui a été dit pour les rivières.

La pesanteur, pour sa part, imprime à chaque élément liquide une accélération égale en grandeur et direction à la projection de g sur la surface libre.

Pour le frottement si τ est la force tangentielle (fig. 7) pour un élément de surface unité

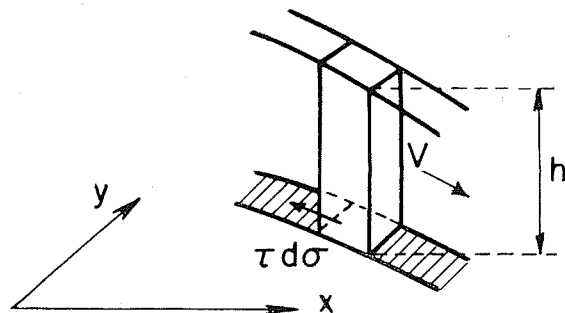


Fig. 7

du fond, un prisme de base $d \sigma$ subit un effort résistant $\tau d \sigma$, ce qui correspond étant donné sa masse $\rho \lambda d \sigma$, à une accélération $\tau / \rho h$ on peut admettre au moins en première approximation, que l'on a

$$\frac{\tau}{\rho} = f v^2$$

(V étant vitesse moyenne sur une verticale).

Les équations de mouvement s'écrivent alors :

$$\begin{cases} g I_x = \frac{du}{dt} + f \frac{Vu}{h} \\ g I_y = \frac{dv}{dt} + f \frac{Vv}{h} \end{cases}$$

auxquelles il faut adjoindre l'équation de continuité qui exprime le bilan du volume d'eau dans

un prisme fixe, soit : $\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$

Il est entendu que le symbole $\frac{d}{dt}$ désigne

une dérivée totale : $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$

Pour dégager une similitude, on considèrera encore une correspondance où ζ sera l'échelle des hauteurs, λ l'échelle en plan (on voit immédiatement qu'il n'y a pas d'affinité possible en plan) τ l'échelle des temps.

L'équation de continuité est invariante par cette transformation, quelles que soient les échelles.

Les équations dynamiques exigent :

$$\frac{\zeta}{\lambda} = \frac{\lambda}{\tau^2} = r_f \frac{\lambda^2}{\zeta \tau^2}$$

On voit qu'on peut encore disposer arbitrairement des échelles λ et ζ desquelles on déduit les autres :

Echelle des temps $\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{\zeta}}$
 Echelle des vitesses $r_v = \sqrt{\zeta}$
 Echelle des frottements $r_f = \frac{\zeta}{\lambda}$

III. — DOMAINE ET FRONTIÈRES DE LA SIMILITUDE

Remarques sur les conditions de similitude

La première condition de similitude qui donne l'échelle des temps est obtenue en comparant l'accélération de l'eau avec l'accélération produite par la pesanteur ; elle est donc à rapprocher de la condition de Froude et nous constatons en effet que la quantité $\frac{U^2}{gh}$ (où h est une hauteur d'eau) est un invariant de la similitude.

Mais à la différence avec le cas général ceci n'exprime plus la conservation de l'accélération qui en projection horizontale par exemple a pour échelle le facteur de distorsion $\frac{\zeta}{\lambda}$.

Le paramètre $\frac{U^2}{gh}$ est une caractéristique essentielle de tout écoulement à surface libre qu'on peut, avec Bakhmeteff, appeler facteur cinétique ; on voit que deux écoulements ne peuvent être considérés comme semblables qu'autant que le facteur cinétique est le même pour l'un et pour l'autre.

On sait que la célérité d'une petite onde a pour valeur $V = \sqrt{g h_m}$ (h_m profondeur moyenne) cette valeur caractérise aussi en régime permanent, l'état critique ; elle suit évidemment la similitude des vitesses moyennes et permet inversement de retrouver l'échelle des vitesses.

La deuxième condition de similitude se retrouve en comparant des régimes uniformes qui doivent eux-mêmes être semblables.

Or, on a par exemple pour une rivière large

$$q = f \frac{U^2}{h} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{U^2}{gh} = \frac{i}{f}$$

Si le facteur cinétique est invariant comme on vient de le constater, il doit en être de même pour le paramètre i/f et ceci nous redonne la condition de réglage des pertes de charge.

On peut signaler ici au passage une particularité qui tient à l'emploi de deux échelles ; le

$$\text{frottement-vitesse} \quad u_* = \sqrt{f \cdot U}$$

ne suit pas la similitude de vitesse moyenne U , bien qu'il lui soit dimensionnellement homogène ; on a en effet :

$$r_{u_*} = \frac{\tau}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{tandis que} \quad r_U = \sqrt{\zeta}$$

Considérons aussi les vitesses verticales ; leur échelle est évidemment $\frac{\zeta}{\tau} = \frac{\zeta^{3/2}}{\lambda}$

et diffère de celle des vitesses horizontales par le facteur de distorsion.

On pourrait d'ailleurs adapter à notre point de vue le langage de l'Analyse dimensionnelle à condition de distinguer dans les formules de dimensions les longueurs verticales des longueurs en plan.

Domaine de la similitude

Comme nous l'avons dit, la similitude telle qu'elle a été établie pour les canaux et rivières ne connaît que les caractéristiques moyennes (niveau, débit) dans chaque section ; la grande latitude sur les échelles tient à cette ambition limitée.

Il est pourtant curieux de constater que même réduite à ce cadre, la possibilité d'une représentation en modèle est parfois mise en doute dans la littérature technique.

C'est ainsi que dans tel traité d'hydraulique les auteurs considérant plus spécialement le cas des régimes permanents, écrivent de façon incorrecte l'équation du remous et supposent de plus que la rivière et son modèle ont même coefficient de Chezy ; ils concluent naturellement à l'impossibilité de la similitude ; or il est bien connu qu'à rugosité égale les pertes de charge en modèle sont naturellement plus fortes que dans la réalité ; pour les rendre égales il faudrait prendre des précautions spéciales et généralement irréalisables pour le poli de la surface.

Dans le sens de l'augmentation, au contraire les possibilités de réglage dont dispose l'hydraulicien sont très larges et grâce à la distorsion, sont soumises à des règles précises.

Nous venons de mentionner un premier exemple d'application de la similitude qui est celui des régimes permanents (lignes de remous des barrages, etc.).

Rentrent également sous sa juridiction tous les régimes variables comportant des variations progressives et régulières du niveau et du débit en

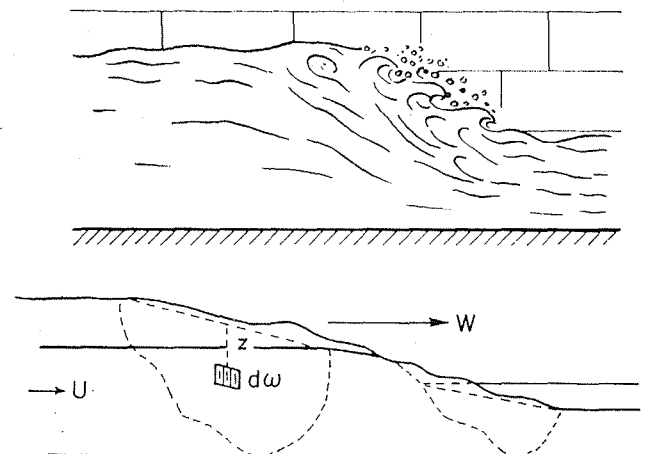


Fig. 8

chaque section telles que crues, intumescences, etc.

Il y a lieu cependant de considérer à part le cas de l'onde de choc, c'est-à-dire la propagation d'une dénivelée abrupte séparant deux régimes bien progressifs ; ceci se produit par exemple lors de la rupture ou du lâcher brusque d'un barrage, à la suite du raidissement d'une intumescence dans le mascaret, etc.

Les lois de l'onde de choc s'obtiennent immédiatement en imprimant à toute la figure (fig. 8) une vitesse opposée à la célérité W de l'onde et en appliquant au ressaut ainsi immobilisé le théorème des quantités de mouvement.

$$\text{On obtient : } \begin{cases} \iint z \, d\omega + \omega \frac{(W-U)^2}{g} = c^{\prime e} \\ \omega (W-U) = c^{\prime e} \end{cases}$$

On voit que ces relations s'accommodent elles aussi d'un changement d'échelle ζ pour les altitudes, $\sqrt{\zeta}$ pour les vitesses, $\mu \zeta$ pour les sections.

La propagation et l'amortissement des ondes de choc étant entièrement régis par les équations ci-dessus et celle de Saint-Venant, leur reproduction en modèle se trouve elle-même légitimée.

Il y a lieu de considérer également à part les singularités fixes de l'écoulement constituées par un déversoir, une vanne de fond, les piles d'un pont, etc.

Un déversoir par exemple impose une loi de débit $Q = m \omega \sqrt{2gH}$

Si le coefficient de débit m est conservé, il apparaît sur cette relation qu'on peut prendre les échelles μ et ζ différentes.

Mais toute la question est précisément de savoir dans quelle mesure m est affecté par une distorsion du profil en long ou du profil en travers.

En ce qui concerne l'échelle λ il est clair qu'on n'est pas tenu de prendre localement la même échelle que pour l'ensemble du modèle, et il sera avantageux de prendre pour la représentation de l'ouvrage un λ local égal, soit à ζ soit à μ .

Il y a lieu ensuite d'examiner l'influence de la distorsion transversale (échelles μ et ζ) et s'il en est besoin, il est loisible de renoncer à la reproduction exacte de l'ouvrage pour mieux conserver le coefficient de débit.

En résumé, les singularités locales ne constituent pas un obstacle à la similitude à condition de les représenter davantage d'après leur loi fonctionnelle que suivant la stricte apparence géométrique.

Dans les lignes qui précèdent, nous n'avons parlé que de niveau et de vitesse moyenne à travers chaque section ; mais il est bien clair que

ces caractéristiques ne sont pas les seules que l'on souhaite reproduire en modèle, ni même toujours les plus importantes.

Nous avons vu à ce propos que des perspectives nouvelles se présentent si l'on conserve la similitude complète en plan ; ces possibilités concernent d'ailleurs plus spécialement les effets de la gravité, c'est-à-dire des courants produits en eau peu profonde par les inclinaisons de la surface libre ; nous rencontrons notamment, ici, la vaste catégorie des modèles à marée.

Si l'on porte au contraire son attention sur les effets de turbulence (comme la répartition des vitesses moyennes dans une section transversale, les courants secondaires, les fluctuations près de la paroi, le pouvoir de diffusion), c'est la conservation du profil en travers qui paraît désirable.

Il convient donc de ne pas rejeter, à priori, la similitude à trois échelles, étant entendu qu'on peut du moins représenter exactement en plan l'axe de la rivière.

Nous touchons, ici, au problème très délicat des frontières de la similitude liées aux exigences contradictoires de la gravité et de la turbulence (pour ne citer que les facteurs principaux) ; ces frontières sont, bien entendu, indécises par la nature des choses, et perfectibles suivant le progrès de nos connaissances ; nous nous limiterons donc dans ce qui suit, à quelques simples remarques à leur sujet.

Influence des courbures

Si l'on considère le seul effet de la pesanteur, l'hypothèse principale d'où découle la similitude avec distorsion est la répartition hydrostatique des pressions suivant la verticale, elle-même liée à la petitesse des composantes verticales de l'accélération.

On peut préciser assez simplement la portée de cette restriction.

Qualitativement d'abord, on voit que si le courant est courbe (fig. 9) la force centrifuge presse les particules d'eau un peu comme dans une fronde, vers l'extérieur des courbes ; le courant liquide pèse par conséquent sur le fond, un

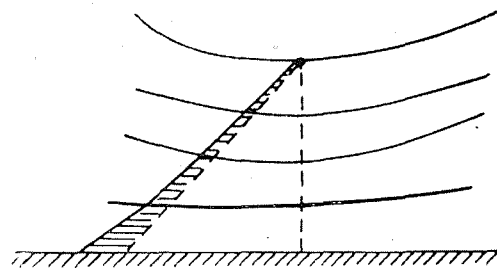


Fig. 9

peu plus ou moins que son poids suivant le sens de la courbure ; l'action horizontale transmise par chaque tranche à sa voisine est elle-même

modifiée en conséquence ; il y a dès lors interaction constante entre les composantes horizontales et verticales de l'accélération et l'on retombe sur la similitude générale de Froude qui ne peut s'accommoder d'une distorsion.

L'explication qui précède permet également de présenter très simplement un calcul approché dû à Boussinesq, de l'influence des courbures.

Considérons pour simplifier le cas d'un canal rectangulaire large et d'un fond rectiligne.

Si l'on appelle γ' l'accélération suivant la verticale et h' le supplément non hydrostatique de pressions, on a

$$\frac{dh'}{dz} = -\frac{\gamma'}{g}$$

Or, cette accélération étant nulle au fond et ayant à la surface une certaine valeur γ'_0 , on peut admettre qu'elle varie linéairement dans l'intervalle, ce qui revient à dire que les diverses trajectoires se déduisent par affinité de celle de la surface libre.

$$\text{Si donc } \gamma' = \gamma'_0 \frac{z}{h}$$

on obtient une répartition parabolique de h'

$$\frac{h'}{h} = \frac{\gamma'_0}{2g} \left(1 - \frac{z^2}{H^2}\right)$$

et par conséquent une poussée totale non hydrostatique (aires hachurées de la figure 9).

$$P' = \rho \gamma'_0 \frac{H^2}{3}$$

Sur une tranche dx l'effort complémentaire dû aux courbures est la différence de P' sur les deux faces, soit $-\frac{\delta P'}{\delta x} dx$, et celle-ci appli-

quée à la masse $\rho H dx$ de la tranche lui imprime une accélération horizontale complémentaire.

$$j_x = -\frac{H}{3} \frac{\delta \gamma'_0}{\delta x}$$

L'accélération principale étant comme nous l'avons vu g , on en déduit un critérium de validité de la théorie des mouvements graduellement variés qui est la petitesse par rapport à

$$\text{l'unité du paramètre } M = \frac{H}{3g l} \frac{\delta \gamma'_0}{\delta x}$$

La valeur de l'accélération verticale γ'_0 s'obtient immédiatement à partir du mouvement de la surface libre.

$$\text{On a en effet : } \gamma'_0 = \frac{d^2 h}{dt^2}$$

où le symbole $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée totale en suivant la même particule liquide, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

Considérons par exemple une propagation

$$\text{d'onde } h = h_m \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct)$$

(où h est la surélévation par rapport à un niveau moyen H).

On trouve en prenant pour la célérité la valeur $c = U + \sqrt{gH}$, et en appelant ξ le paramètre $\frac{2\pi H}{\lambda}$

$$M = \frac{\xi^2}{3}$$

Pour que l'approximation du mouvement graduellement varié soit applicable à une propagation d'onde, il faut donc que la profondeur moyenne soit suffisamment faible par rapport à la longueur d'onde ; d'où l'appellation de théorie en eau peu profonde qu'on peut aussi donner à cette approximation (shallow water theory).

Si M n'est pas petit, la valeur de la célérité relative notamment n'est plus \sqrt{gH} .

C'est ainsi que le calcul exact de la houle de faible amplitude en profondeur finie, conduit à

$$\text{une célérité. } c = U + \sqrt{gH} \sqrt{\frac{1+\xi}{\xi}}$$

L'approximation de Boussinesq dont nous avons donné le principe se situe à mi-chemin entre les deux schémas et s'applique aux écoulements modérément courbes ; elle conduit pour

$$\text{la célérité à une expression } c = U + \sqrt{\frac{gH}{1+M}}$$

qui coïncide pratiquement avec la précédente jusque vers $\xi = 2$.

Il résulte de ces quelques remarques que les phénomènes tels que la houle sortent du cadre de la similitude avec distorsion ; il en est de même en hydraulique fluviale pour les ondulations qui se superposent parfois aux ondes de choc.

Toujours en ce qui concerne l'influence des courbures, c'est également le lieu de mentionner un autre effet qui leur est attaché, qui est celui de la tension superficielle.

Le même raisonnement intuitif que, précédemment, donne facilement une expression approchée des forces introduites par la tension superficielle.

En un point de la surface libre supposée cylindrique et de rayon de courbure R il s'établit une discontinuité de pression.

$$p^* = \frac{A}{R} = -A \frac{\delta^2 h}{\delta x^2} \quad (A \text{ constante capillaire})$$

Ceci correspond à une poussée complémentaire

$$p'' = -A H \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

d'où résulte pour une tranche une accélération

$$j_x = -\frac{A}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}$$

Nous en déduisons un paramètre de capilla-

rité
$$N = \frac{a^2}{2I} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \quad \text{avec} \quad a^2 = \frac{2A}{\rho g}$$

qui doit être petit devant l'unité si l'on veut que la tension superficielle ait une influence négligeable.

Pour une ondulation de longueur d'onde λ , ce paramètre a pour valeur
$$N = 2\pi^2 \frac{a^2}{\lambda^2}$$

et l'on peut illustrer sa signification en disant que la tension superficielle modifie la célérité d'une houle dans le rapport $\sqrt{1+N}$.

La constante a étant voisine pour l'eau de 3,8 mm. on voit que la capillarité affecte uniquement les petites longueurs d'onde (de l'ordre de quelques centimètres au plus).

Influence des frottements

L'un des grands progrès réalisés en Mécanique des Fluides dans la dernière décade a été l'analyse de l'écoulement turbulent le long des plaques planes et dans les conduites circulaires; les essais de Nikuradse, les schémas théoriques, de Prandtl et Von Karmann, ont débrouillé un problème demeuré jusque-là essentiellement empirique.

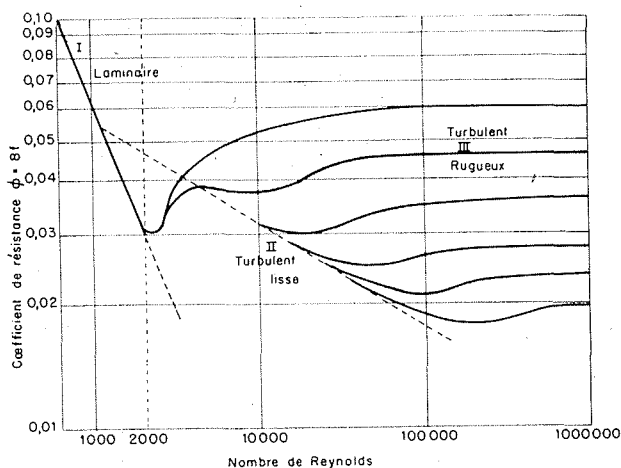


Fig. 10

L'un des graphiques les plus parlants de cette recherche est celui qui donne le coefficient de résistance en fonction du nombre de Reynolds (fig. 10); on y distingue les trois zones désormais classiques, écoulement laminaire, écoule-

ment turbulent avec paroi lisse, écoulement turbulent avec paroi rugueuse.

Dans cette dernière zone et pour les rugosités artificielles étudiées par Nikuradse le coefficient de résistance f est lié à la dimension K des grains et au rayon de la conduite par une relation logarithmique.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4,75 + 5,75 \log. \frac{R}{k}$$

(qui, dans un intervalle limité de R , peut être approché par une formule monôme du type Manning).

Bien entendu, entre ce phénomène simplifié et les canaux ou rivières, la distance est assez considérable et parmi les nombreuses questions qui se posent on peut retenir d'abord celle de la forme non circulaire de la section, celle de l'influence de la surface libre, celle enfin des rugosités véritables rencontrées dans la nature et en Laboratoire.

Considérons d'abord le cas d'une conduite en charge, de section non circulaire; on admet généralement que l'on peut étendre à ce cas le graphique de Nikuradse en substituant au diamètre de la conduite circulaire le produit par 4 du rayon hydraulique de la conduite de section différente; il serait trop long d'étudier ici ce point en détail et nous nous bornerons à observer que la notion de rayon hydraulique est d'autant mieux adaptée que l'effort tangentiel est réparti plus uniformément le long du périmètre; pour le régime laminaire, le calcul rigoureux peut être effectué pour un grand nombre de sections et l'on constate que l'extrapolation en rayon hydraulique de la formule de Poiseuille conduit à des erreurs allant jusqu'à 20%; pour le régime turbulent lisse on dispose d'une belle série d'expériences de Cornick Davis et White, et surtout Nikuradse; ce dernier a notamment évalué la répartition de τ sur la paroi d'après celle des vitesses et on peut voir qu'en dépit de variations locales (notamment dans les angles) l'ensemble est assez uniforme; corrélativement le nombre de Reynolds formé avec le rayon hydraulique rassemble très convenablement les résultats relatifs à des sections de formes assez différentes.

On voit en définitive que l'approximation qui précède est souvent légitime, mais qu'elle peut être mise en défaut pour certaines formes de sections; elle l'est aussi naturellement pour les canaux comportant deux ou plusieurs tronçons de leur périmètre ayant des rugosités différentes; le cas le plus simple de cette dernière circonstance est celui de deux parois planes parallèles, et a été étudié par Schlichting; si la surface libre d'un canal n'introduit aucune force tangentielle, on peut en adjoignant au profil en travers son

symétrique par rapport à cette surface, se raccorder aux résultats relatifs à des conduites en charge ; si, au contraire, de telles forces existent, la surface libre n'est pas sans analogie avec une paroi mobile et très lisse.

En ce qui concerne l'influence de la rugosité relative sur les pertes de charge dans la zone quadratique, il faut également se garder d'une application trop exclusive des résultats de Nikuradse ; les expériences de Colebrook avec des rugosités artificielles constituées par des distributions hétérogènes de grains leur ont déjà apporté un premier complément important en montrant que la zone de transition entre les régimes turbulent lisse et turbulent rugueux s'étend beaucoup du fait de l'hétérogénéité des aspérités ; il en résulte que dans les conduites industrielles par exemple on tombe très souvent dans cette zone de transition particulièrement complexe, et c'est ce qui explique les pertes de charge en V^n où l'exposant n est voisin mais différent de 2 ; pour l'hydraulique fluviale, on a le plus souvent à faire à des pertes de charge quadratiques et le problème est alors d'une part de réaliser les fortes rugosités souvent nécessitées par la distorsion, d'autre part d'obtenir en modèle comme il est toujours désirable le régime turbulent rugueux qui existe dans la nature.

L'examen détaillé de ce dernier point exigerait encore un certain développement ; bornons-nous à remarquer que les expériences de Nikuradse introduisent, à ce point de vue, le paramètre :

$$\frac{K u_*}{\lambda}$$

(K dimension des aspérités, u_* frottement vitesse $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$) que nous pouvons appeler nombre de Karman ; pour les rugosités homogènes de Nikuradse, le passage au régime des pertes quadratiques se trouve réalisé avec une bonne marge lorsque ce nombre est supérieur à 100.

Pour des rugosités hétérogènes, ou pour d'autres rugosités artificielles telles que celles qu'on est amené à réaliser en modèle, on peut souvent définir une aspérité K équivalente et étendre l'application du critérium de Karman tout au moins tant que la rugosité relative n'est pas trop considérable.

Toutes ces recherches systématiques sur les pertes de charge constituent un guide précieux pour l'étude d'avant-projet d'un modèle et notamment le choix des échelles ; combinées à une étude préalable d'une large gamme de rugosités artificielles, elles permettent également d'en dégrossir la réalisation.

Est-il besoin d'ajouter cependant que dans le domaine des pertes de charge bien des choses demeurent encore obscures ; nous n'avons rien dit, par exemple, de certaines pertes de charge singulières (coudes, élargissement du lit, etc.) dont la notion même pour des écoulements en rivières est délicate à dégager avec précision ; il restera donc toujours un réglage définitif du modèle à réaliser par comparaison avec des données connues de la nature et c'est un travail dans lequel l'expérience et le jugement de l'hydraulicien jouent un rôle essentiel.

La similitude des caractéristiques moyennes étant ainsi fidèlement réalisée, on peut se demander maintenant si les caractéristiques fines de l'écoulement ne vont pas elles-mêmes nous être accordées par surcroît ; il est facile de voir que la distorsion est à cet égard, un miroir déformant et qu'elle rapproche beaucoup les confins de la similitude.

Considérons, par exemple, la répartition des vitesses sur une verticale dans le cas d'un lit très plat ; si u désigne la vitesse à la cote z au-dessus du fond, V la vitesse moyenne, on a en régime turbulent une distribution universelle :

$$\frac{u-U}{U} = \sqrt{f} \phi\left(\frac{z}{h}\right)$$

Il résulte de cette loi que les vitesses u à des cotes homologues ne se correspondent pas comme les vitesses moyennes : l'augmentation de rugosité accentue notamment l'inégale répartition des vitesses ; on peut, en effet, caractériser celle-ci par un coefficient η défini par :

$$\int u^2 \frac{dz}{h} = (1 + \eta) U^2$$

On a donc $\eta = a f$ (où a est la moyenne de Φ^2 , c'est-à-dire 6.25 avec la loi logarithmique de Karman) et l'on voit que η est amplifiée sur le modèle dans le rapport de la distorsion

$$\frac{\zeta}{\lambda}$$

Si maintenant nous considérons une section quelconque, il est clair que la disposition des isovels par exemple où des courants secondaires dépendent directement de la forme et s'accommodent mal d'une distorsion.

Les caractéristiques plus fines de l'écoulement dont il vient d'être question sont d'ailleurs moins intéressantes en elles-mêmes que par leur relation avec les problèmes d'entraînement et de suspension des matériaux ; le centre de gravité de la recherche se déplace alors complètement et c'est ici la technique complémentaire de modèles à fond mobile qui intervient, technique qui sort du cadre de cette étude.