NOTULES HYDRAULIQUES

Sur le caractère rotationnel de la déformation sans cavitation d'un continu élastique, déterminée par le petit déplacement d'un solide

par Jean FERRANDON

Maître de Conférence à l'Ecole Polytechnique

La présente Note précise et complète ma communication à l'Académie des Sciences insérée aux comptes rendus du 27 juin 1948. Elle montre que les petits mouvements d'un solide établi au sein d'un continu élastique indéfini, par exemple ceux d'une construction sous l'action des sollicitations qu'elle supporte, déterminent dans ce continu, le sol de fondation dans le cas d'un ouvrage, un champ de déplacement nécessairement rotationnel. L'existence d'un potentiel de déplacements conduit en effet à un résultat paradoxal, dont on notera l'analogie avec le Paradoxe de d'ALEMBERT, incompatible avec le Principe d'équivalence.

Un solide indéformable V limité par une surface simplement connexe S est établi au sein d'un continu homogène, isotrope, élastique, illimité en toute direction. Les forces de masse sont nulles. L'ensemble est en équilibre.

La température étant maintenue uniforme et invariable, le solide est assujéti au déplacement infiniment petit le plus général, défini par ses éléments de réduction :

translation (u_0, v_0, w_0) , rotation (p, q, r) par rapport au trièdre trirectangle de référence $Oxyz$; les coordonnées du déplacement d'un point quelconque (x, y, z) de S sont :

$$U = u_0 + qz - ry$$

$$V = v_0 + rx - pz$$

$$W = w_0 + py - qx$$

La nature des matériaux est supposée telle que le mouvement des particules du continu en contact avec V se réduit à un glissement le long de S sans possibilité de cavitation.

Compte tenu de ces hypothèses, je me propose de montrer que les déplacements du continu élastique sont nécessairement rotationnels.

Les coordonnées (u, v, w) du déplacement d'un point (x, y, z) du continu élastique satisfont aux équations indéfinies de LAME :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u = 0, \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v = 0, \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w = 0,$$

à la condition :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

traduisant le glissement sans cavitation des particules du continu élastique sur la surface S , du solide de normale intérieure $n(\alpha, \beta, \gamma)$ et à **deux conditions physiques supplémentaires** qu'il est inutile de préciser.

Supposons légitime l'introduction d'un potentiel de déplacements (x, y, z) de telle sorte que :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Dans ces conditions, les équations de LAME se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \phi = \frac{\partial}{\partial y} \Delta \phi = \frac{\partial}{\partial z} \Delta \phi = 0$$

dont la solution, compte tenu de ce que la dilatation cubique $\theta = \Delta \phi$ s'évanouit à l'infini, est $\Delta \phi = 0$. Si donc le potentiel existe, il est harmonique, régulier à l'extérieur de V et à l'infini où on peut le supposer nul.

La condition à la surface s'écrit en outre :

$$\frac{d\phi}{dn} = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

et la recherche des déplacements consiste ainsi

dans la résolution d'un problème de NEUMANN extérieur.

Les coordonnées $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ du tenseur des tensions élastiques en tout point (x, y, z) du continu résultent des équations du type :

$$N_1 = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad T_1 = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

qui donnent, en fonction du potentiel supposé déterminé :

$$N_1 = 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad N_2 = 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad N_3 = 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$T_1 = 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z}, \quad T_2 = 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}, \quad T_3 = 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

et sur S , notamment les actions de surface, ont pour intensité en projection sur les trois axes :

$$N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma = 2\mu \left(\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right),$$

$$T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma = 2\mu \left(\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \right),$$

$$T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma = 2\mu \left(\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right).$$

De ces équations, on déduit par intégration les coordonnées (x, y, z) de la résultante des actions de surface sur S , et celles (L, M, N) de leur moment résultant. Par exemple :

$$x = 2\mu \iint_S \left(\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) d\sigma,$$

$$L = 2\mu \iint_S \left[y \left(\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) - z \left(\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \right) \right] d\sigma.$$

Il s'agit de calculer ces dernières quantités. A cet effet, soit Σ une sphère de centre O , contenant V , Δ le volume compris entre S et Σ . La transformation de GREEN, appliquée successivement à X et L donne :

$$\iint_S - \iint_{\Sigma} = 2\mu \iiint_{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \phi) d\tau = 0,$$

$$\iint_S - \iint_{\Sigma} = 2\mu \iiint_{\Delta} \left[y \frac{\partial}{\partial z} (\Delta \phi) - z \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \phi) \right] d\tau = 0$$

En outre, les expressions telles que :

$$\iint_S \alpha u d\sigma = u \cdot \iint_S \alpha d\sigma + a \iint_S \alpha z d\sigma - r \iint_S \alpha y d\sigma$$

étant nulles, il en est de même de $\iint_S \frac{d\phi}{dn} d\sigma$.

Le potentiel harmonique $\phi(x, y, z)$ régulier à l'extérieur de V , nul à l'infini s'y comporte

comme $\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$. Alors s'évanouissent les

sommations $\iint_{\Sigma}$ lorsque croît indéfiniment le rayon de Σ . Il s'ensuit que :

$$X = Y = Z = L = M = N = 0$$

Ainsi, l'existence d'un potentiel de déplacement implique la nullité de la résultante et du moment résultant des forces agissant sur le solide.

Le principe d'équivalence appliqué aux deux états initial et déformé s'écrit alors :

$$\iiint_{\Delta=\infty} \mu \left\{ \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \dots \right] + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \dots \right] \right\} d\tau =$$

$$Xu_0 + Yv_0 + Zw_0 + Lp + Mq + Nr = 0$$

puisque $\theta = 0$.

Cette égalité est impossible μ étant différent de zéro.

En conséquence, un déplacement irrotationnel est incompatible avec les deux conditions physiques supplémentaires dont le calcul précédent n'a pas fait état.

Un cas théoriquement simple est celui où aucun glissement n'est possible au contact des deux milieux qui adhèrent parfaitement, c'est celui de la théorie classique du mouvement d'un solide plongé dans un fluide visqueux. C'est aussi celui d'un pieu de fondation foncé dans de l'argile ou dans des sables quelque peu cohérents. Dans ces conditions, les déplacements u, v, w sont parfaitement déterminés par les équations de LAME et les **trois** conditions :

$$u = U, \quad v = V, \quad w = W$$

Ils sont nécessairement rotationnels.