SUR L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX INCOMPRESSIBLE ENTRE DEUX PLAQUES PARALLÈLES INDÉFINIES

par J. KAMPÉ DE FÉRIET

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille

1. — Il y a cinquante ans (1895) que OSBORNE REYNOLDS (1) a formé les équations du mouvement moyen d'un fluide visqueux incompressible en régime turbulent ; il en a tiré des conséquences de la plus haute importance sur les échanges d'énergie entre le mouvement moyen et le mouvement d'agitation turbulent ; mais, quant à la détermination du mouvement moyen, même dans les cas les plus simples, il fallut attendre près de trente ans pour en dégager l'allure et les principales propriétés ; les premiers progrès substantiels furent amenés par l'introduction, par PRANDTL (1925) (2), de la notion de **parcours de mélange** et par l'hypothèse de KARMAN (1930) (3) sur l'organisation de la turbulence.

Mais ces progrès n'ont pu être obtenus qu'en faisant appel à l'expérience ; de telle sorte que dans la plupart des exposés, théorie et empirisme sont mêlés d'une manière qu'il est parfois difficile de démêler du premier coup d'œil. L'objet de ce travail est de montrer, sur un exemple particulièrement simple, jusqu'à quel point précis on peut pousser les déductions logiques des équations de REYNOLDS ; de dégager les hypothèses supplémentaires nécessaires et suffisantes, qu'il convient de leur adjoindre pour aboutir à la loi logarithmique de KARMAN pour le profil des vitesses moyennes. Certaines contradictions se révèlent alors entre l'ensemble des hypothèses, montrant que cette loi ne saurait prétendre à être la solution rigoureuse du problème, qu'elle n'est seulement qu'une loi approchée.

Les deux écoulements les plus faciles à étudier (4) sont ceux où les trajectoires du mouvement moyen sont des droites parallèles, possédant, en outre, une symétrie de révolution ou de translation : le premier schéma représente l'écoulement d'un fluide dans un tuyau cylindrique, le second, l'écoulement entre deux plaques parallèles ; j'ai choisi ce dernier comme exemple parce qu'il réduit l'appareil mathématique à son minimum.

2. — **2.1.** — Dans le mouvement turbulent d'un fluide, selon les idées classiques, depuis BOUSSINESQ (5) et REYNOLDS (1), toute grandeur physique mesurable dans le fluide peut en un point (x, y, z) et à un instant t se mettre sous la forme :

$$f(x,y,z,t) = \bar{f} + f' \qquad (2.01)$$

$\bar{f}$ désigne la **valeur moyenne** de la grandeur au point fixe (x, y, z) et à l'instant t ; cette valeur moyenne peut, par exemple, être définie comme la moyenne des **valeurs instantanées** de la grandeur physique à l'intérieur d'un cube ayant le point (x, y, z) pour centre et pendant un intervalle de temps admettant comme milieu l'instant t. La différence entre la valeur instantanée f et la valeur moyenne $\bar{f}$ désigne la **composante d'agitation** f' de la grandeur considérée.

Bien entendu on peut considérer les mouvements laminaires comme cas particulier des mouvements turbulents ; il suffit de supposer que toutes les composantes d'agitation sont identiquement nulles.

$$f' = 0 \qquad (2.02)$$

2.2. — Si (u, v, w) désignent les composantes de la **vitesse instantanée** d'une particule du fluide au point (x, y, z) et à l'instant t, nous poserons d'après (2.01) :

$$u = \bar{u} + u' \quad v = \bar{v} + v' \quad w = \bar{w} + w' \qquad (2.03)$$

Les composantes $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ définissent le **mouvement moyen** du fluide et les composantes (u', v', w') définissent son **mouvement d'agitation turbulent.**

Si p désigne la valeur de la pression au point (x, y, z) à l'instant t, nous poserons de même :

(2.04) $$p = \bar{p} + p'$$

$\bar{p}$ définit la **pression moyenne** du fluide, p' la **pression d'agitation turbulente.**

2.3. — On connaît le rôle important joué en Mécanique des Fluides classique par la notion **de dérivée d'une grandeur** f (x, y, z, t) **prise en suivant le mouvement :**

$$\frac{df}{dt} = \frac{\delta f}{\delta t} + u \frac{\delta f}{\delta x} + v \frac{\delta f}{\delta y} + w \frac{\delta f}{\delta z}$$

De même dans les équations de REYNOLDS s'introduit tout naturellement la **dérivée d'une grandeur en suivant le mouvement moyen :**

(2.05) $$\frac{\delta \bar{f}}{\delta t} = \frac{\delta \bar{f}}{\delta t} + \bar{u} \frac{\delta \bar{f}}{\delta x} + \bar{v} \frac{\delta \bar{f}}{\delta y} + \bar{w} \frac{\delta \bar{f}}{\delta z}$$

3. — **3.1.** — Le fluide considéré ici est un **fluide visqueux incompressible de température constante ;** il est donc caractérisé par les valeurs numériques de 2 constantes :

ρ sa masse spécifique

μ son coefficient de viscosité (ou son coefficient de viscosité cinématique ν).

3.2. — Les équations de NAVIER pour le mouvement d'un fluide visqueux incompressible à température constante, qui n'est soumis à aucune force extérieure, s'écrivent :

(3.01) $$-\rho \frac{du}{dt} = \frac{\delta p}{\delta x} - \mu \Delta_2 u$$

(3.02) $$-\rho \frac{dv}{dt} = \frac{\delta p}{\delta y} - \mu \Delta_2 v$$

(3.02) $$-\rho \frac{dw}{dt} = \frac{\delta p}{\delta z} - \mu \Delta_2 w$$

(3.03) $$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0$$

3.3. — En prenant la moyenne des deux membres de chacune de ces équations, OSBORNE REYNOLDS a obtenu les équations du mouvement turbulent d'un fluide visqueux incompressible à température constante sous la forme suivante :

(3.05) $$-\rho \frac{\delta \bar{u}}{\delta t} = \frac{\delta \bar{p}}{\delta x} - \mu \Delta_2 \bar{u} + \rho \frac{\delta}{\delta x}(\overline{u'^2}) + \rho \frac{\delta}{\delta y}(\overline{u'v'}) + \rho \frac{\delta}{\delta z}(\overline{u'w'})$$

(3.06) $$-\rho \frac{\delta \bar{v}}{\delta t} = \frac{\delta \bar{p}}{\delta y} - \mu \Delta_2 \bar{v} + \rho \frac{\delta}{\delta x}(\overline{v'u'}) + \rho \frac{\delta}{\delta y}(\overline{v'^2}) + \rho \frac{\delta}{\delta z}(\overline{v'w'})$$

(3.07) $$-\rho \frac{\delta \bar{w}}{\delta t} = \frac{\delta \bar{p}}{\delta z} - \mu \Delta_2 \bar{w} + \rho \frac{\delta}{\delta x}(\overline{w'u'}) + \rho \frac{\delta}{\delta y}(\overline{w'v'}) + \rho \frac{\delta}{\delta z}(\overline{w'^2})$$

(3.08) $$\frac{\delta \bar{u}}{\delta x} + \frac{\delta \bar{v}}{\delta y} + \frac{\delta \bar{w}}{\delta z} = 0$$

3.4. — Il saute aux yeux que les équations de REYNOLDS diffèrent des équations de NAVIER par les deux modifications suivantes :

substitution de la vitesse moyenne $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ à la vitesse instantanée (u, v, w) et de la pression moyenne $\bar{p}$ à la pression instantanée p ;

adjonction aux seconds membres des 9 dérivées partielles

$$\frac{\delta}{\delta x}(\overline{u'^2}), \quad \frac{\delta}{\delta y}(\overline{u'v'}), \ldots\ldots \quad \frac{\delta}{\delta z}(\overline{w'^2})$$

Les 4 équations de NAVIER contenant les 4 fonctions inconnues u, v, w, p permettent, moyennant l'adjonction des **conditions aux limites** et de certaines **conditions de régularité** (continuité des fonctions, existence et continuité de certaines dérivées partielles) de déterminer complètement les fonctions inconnues.

Or, il n'en est pas de même des équations de REYNOLDS ; en effet, outre les 4 fonctions inconnues $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}$ (qui déterminent le mouvement moyen) elles contiennent les 6 fonctions inconnues :

$\overline{u'^2}$ $\overline{v'^2}$ $\overline{w'^2}$ $\overline{u'v'}$ $\overline{v'w'}$ $\overline{w'u'}$

qui dépendent du mouvement d'agitation.

Les 4 équations de REYNOLDS ne suffisent donc pas pour déterminer les dix fonctions inconnues qu'elles contiennent en général.

C'est dans la présence des termes qui traduisent, au point de vue mathématique, l'influence du mouvement d'agitation sur le mouvement moyen, que réside toute la difficulté de la théorie.

4. — Le problème particulier étudié dans ce travail est le suivant :

4.1. — Nous considérons deux plaques parallèles indéfinies parfaitement polies (plan parfait de la géométrie).

Nous désignons la distance des deux plaques par 2 a.

Nous prenons un système de référence Oxyz tel que le plan Oxz soit le plan de symétrie des deux plaques, le point O étant d'ailleurs quelconque.

Nous appelons **plaque supérieure** celle pour laquelle :

(4.01) $$y = + a$$

et **plaque inférieure** celle pour laquelle :

(4.02) $$y = - a$$

4.2. — Au sujet du mouvement moyen, nous faisons les hypothèses suivantes :

1re hypothèse. — Dans le mouvement moyen les trajectoires sont des droites parallèles à une droite fixe parallèle aux plaques ; nous choisissons l'axe Ox parallèle à cette direction :

(4.03) $$\overline{u} > o \qquad \overline{v} = o \qquad \overline{w} = o$$

2e hypothèse. — Le mouvement moyen est permanent, c'est-à-dire que la valeur moyenne d'une grandeur quelconque ne dépend pas du temps t :

(4.04) $$\frac{\delta \overline{f}}{\delta t} = o$$

3e hypothèse. — Dans le mouvement moyen les plans parallèles à Oxy sont indiscernables c'est-à-dire que la valeur moyenne d'une grandeur quelconque ne dépend pas de z :

(4.05) $$\frac{\delta \overline{f}}{\delta z} = o$$

La valeur moyenne d'une grandeur physique quelconque f (x, y, z, t) est donc nécessairement de la forme :

(4.06) $$\overline{f} = \overline{f}\ (x, y)$$

4.3. — Le mouvement d'agitation turbulent n'intervient dans les équations de REYNOLDS que par les 6 moyennes

(4.07) $$\overline{u'^2} \quad \overline{v'^2} \quad \overline{w'^2} \quad \overline{u'v'} \quad \overline{v'w'} \quad \overline{w'u'}$$

Ces moyennes ont une interprétation statistique immédiate ; les trois premières fournissent les **écarts types** des 3 composantes de la vitesse

(4.08) $$\sigma(u) = \sqrt{\overline{u'^2}} \qquad \sigma(v) = \sqrt{\overline{v'^2}} \qquad \sigma(w) = \sqrt{\overline{w'^2}}$$

Les trois dernières correspondent aux **coefficients de corrélation** des composantes de la vitesse prises deux à deux

(4.09) $$r(u,v) = \frac{\overline{u'\ v'}}{\sigma(u)\,\sigma(v)} \qquad r(v,w) = \frac{\overline{v'\ w'}}{\sigma(v)\,\sigma(w)} \qquad r(w,u) = \frac{\overline{w'\ u'}}{\sigma(w)\,\sigma(u)}$$

D'après (4.06) une moyenne ne peut dépendre que de x et de y ; pour les 6 grandeurs statistiques (4.07) nous ferons l'hypothèse supplémentaire suivante :

4e hypothèse. — Les six moyennes (4.07) sont indépendantes de x ; ceci signifie qu'au point de vue statistique l'organisation de la turbulence est la même dans tous les plans perpendiculaires à Ox.

En vertu de (4.06) les six moyennes (4.07) ne dépendent donc que de y.

(4.10) $$\overline{u'^2} \quad \overline{v'^2} \quad \overline{w'} \quad \overline{u'v'} \quad \overline{v'w'} \quad \overline{w'u'} = \text{fonctions de } y$$

5\. — En tenant compte des 4 hypothèses précédentes, nous allons appliquer les équations de REYNOLDS à notre problème particulier.

5.1. — L'équation (3.08) (équation de continuité pour le mouvement moyen) s'écrit en tenant compte de (4.03) :

(5.01) $$\frac{\delta \overline{u}}{\delta x} = o$$

Comme en vertu de (4.06) la vitesse moyenne $\overline{u}$ ne peut dépendre que de x et y, **cette équation montre que la vitesse moyenne n'est fonction que de y seulement.**

5.2. — L'équation (3.07) du mouvement moyen projeté sur Oz se réduit à :

(5.02) $$\rho \frac{d}{dy} \left(\overline{v'\ w'}\right) = o$$

Comme les vitesses d'agitation sont nulles à la paroi, on en déduit immédiatement :

(5.03) $$\overline{v'w'} = o$$

le coefficient de corrélation des composantes d'agitation v' et w' est nul dans tout le fluide.

5.3. — En tenant compte des équations (4.03), (4.04), (4.05), et (5.01) les équations (3.05) et (3.06) du mouvement moyen projeté sur Ox et Oy s'écrivent pour notre écoulement :

(5.04) $$\frac{\delta \overline{p}}{\delta x} - \mu \frac{d^2 \overline{u}}{dy^2} + \rho \frac{d}{dy} \left(\overline{u'\ v'}\right) = o$$

(5.05) $$\frac{\delta \overline{p}}{\delta y} + \rho \frac{d}{dy} \left(\overline{v'^2}\right) = o$$

Les équations de REYNOLDS nous fournissent donc deux relations entre les quatre moyennes :

(5.06) $$\overline{u}, \qquad \overline{u'v'}, \qquad \overline{v'^2}, \qquad \overline{p}$$

dont les 3 premières ne sont fonctions que de y et la 4e de x et y.

6. — Nous allons transformer les équations de REYNOLDS (5.04) et (5.05) de manière à n'y plus faire figurer que des grandeurs sans dimension.

6.1. — Au lieu de l'abscisse x et l'ordonnée y définissant la position d'un point du fluide, nous introduirons les grandeurs sans dimension suivantes :

(6.01) **abscisse réduite** $\xi = \dfrac{x}{a}$

(6.02) **ordonnée réduite** $\eta = \dfrac{y}{a}$

Remarquons au sujet de cette dernière qu'on a respectivement sur la plaque supérieure et sur la plaque inférieure :

(6.03) $\eta = 1$ $\qquad \eta = -1$

La distance réduite respectivement par rapport à ces deux plaques est :

(6.04) $1 - \eta$ $\qquad 1 + \eta$

6.2. — Dans l'écoulement moyen, nous avons à considérer en chaque point du fluide, la vitesse moyenne qui d'après (4.03) est parallèle à l'axe Ox ; nous définirons une vitesse de référence U_0 calculée à partir du débit dû au mouvement moyen à travers une section rectangulaire de hauteur 2a (selon oy) et de longueur 1 (selon oz).

$$(6.05) \qquad 2\,a\,U_0 = \int_{-a}^{+a} \bar{u}\,dy$$

Avec la vitesse moyenne de référence U_0 nous formons une grandeur sans dimension : **le nombre de REYNOLDS de l'écoulement**

$$(6.06) \qquad R_0 = \frac{U_0\,a}{\nu}$$

6.3. — Outre la pression moyenne en un point du fluide : $\bar{p} = \bar{p}\,(x, y)$ nous considérons **la force de frottement apparente,** qui équilibre le gradient de cette pression moyenne ; nous supposons que la force de frottement apparente exercée par le fluide sur chacune des plaques est indépendante des coordonnées x, z et nous désignons par τ_0 sa valeur constante (rapportée à l'unité de surface de la plaque).

Par définition on a :

$$(6.07) \qquad \tau_0 = -\mu\,\frac{d\bar{u}}{dy} \qquad y = +a$$

$$\tau_0 = \mu\,\frac{d\bar{u}}{dy} \qquad y = -a$$

Nous définissons une grandeur sans dimension, **le coefficient de frottement** du fluide sur la plaque en posant :

$$(6.08) \qquad c_f = \frac{\tau_0}{\rho\,\dfrac{U_0^2}{2}}$$

On remarquera qu'au dénominateur figure une **pression dynamique** correspondant à la vitesse moyenne de référence.

6.4. — Le quotient $\dfrac{\tau_0}{\rho}$ ayant les dimensions du carré d'une vitesse, nous introduisons une **vitesse fictive** en posant :

$$(6.09) \qquad \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = U_*$$

avec cette vitesse fictive, nous construisons **un nombre de REYNOLDS fictif**

$$(6.10) \qquad R_* = \frac{U_*\,a}{\nu}$$

le simple rapprochement des équations (6.08) et (6.09) montre que l'on a :

$$(6.11) \qquad \frac{R_*}{R_0} = \frac{U_*}{U_0} = \sqrt{\frac{c_f}{2}}$$

6.5. — Nous appellerons **pression moyenne réduite** en un point du fluide la grandeur sans dimension :

$$(6.12) \qquad \frac{\bar{p} - \bar{p}_0}{\rho\,U_*^2}$$

$\bar{p}_0$ désignant une pression de référence, par exemple la pression moyenne sur les parois planes dans le plan x = O.

6.6. — De même **la vitesse moyenne réduite** sera la grandeur sans dimension :

$$(6.13) \qquad \frac{\bar{u}}{U_*}$$

En partant de (6.05) on a évidemment la relation

$$(6.14)\qquad \frac{R_o}{R_*} = \frac{U_o}{U_*} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\bar{u}}{U_*}\,d\eta$$

6.6. — L'étude de l'écoulement moyen réside pour nous dans la recherche des relations qui existent entre les 9 grandeurs

$$(6.15)\qquad a,\ x,\ y,\ p,\ \mu,\ U_0,\ \tau_0\ ,\ \bar{p},\ \bar{u}\ ;$$

d'après le théorème de VACHY BUCKINGHAM, nous pouvons déduire de ce tableau 9-3 = 6 grandeurs sans dimensions indépendantes ; or nous avons formé jusqu'ici les 7 grandeurs sans dimensions suivantes :

$$\xi,\ \eta,\ R_o\ ,\ R_*,\ c_f,\ \frac{\bar{p}-\bar{p}_o}{\rho\,U_*^2},\ \frac{\bar{u}}{U_*}$$

Les équations (6.11) et (6.14) nous fournissent deux relations entre ces 7 grandeurs.

Il reste donc 5 grandeurs qui ne sont liées, en vertu de leur définition, par aucune relation ; nous choisissons les grandeurs suivantes :

$$(6.16)\qquad \xi,\ \eta,\ R_*,\ \frac{\bar{u}}{U_*},\ \frac{\bar{p}-\bar{p}_o}{\rho\,U_*^2}$$

7. — **7.1.** — En les divisant par τ_0 et en introduisant les grandeurs sans dimensions définies par (6.01), (6.02), (6.12) et (6.13), les deux équations de REYNOLDS (5.04) et (5.05) prennent la forme :

$$(7.01)\qquad \frac{\delta}{\delta\xi}\left(\frac{\bar{p}-\bar{p}_o}{\rho U_*^2}\right) - \frac{1}{R_*}\frac{d^2}{d\eta^2}\left(\frac{\bar{u}}{U_*}\right) + \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\overline{u'v'}}{U_*^2}\right) = o$$

$$(7.02)\qquad \frac{\delta}{\delta\eta}\left(\frac{\bar{p}-\bar{p}_o}{\rho\,U_*^2}\right) + \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\overline{v'^2}}{U_*^2}\right) = o$$

On y voit donc figurer quatre fonctions :

— Le **profil réduit** des vitesses :

$$(7.03)\qquad \frac{\bar{u}}{U_*} = V\ (\eta,\ R_*\ )$$

— La **pression réduite :**

$$(7.04)\qquad \frac{\bar{p}-\bar{p}_o}{\rho\,U_*^2} = \bar{\omega}\ (\xi,\ \eta,\ R_*\ )$$

— Le **coefficient de corrélation réduit.**

$$(7.05)\qquad \frac{\overline{u'\ v'}}{U_*^2} = r\ (\eta,\ R_*\ )$$

— L'**écart type réduit.**

$$(7.06)\qquad \frac{\overline{v'^2}}{U_*^2} = \sigma\ (\eta,\ R_*)$$

Les conditions d'adhérence du fluide à la paroi nous imposent évidemment les conditions aux limites :

$$(7.07)\qquad V\ (-1,\ R_*) = V\ (\ 1\ ,\ R_*\ ) = o$$

$$(7.08)\qquad r\ (-1,\ R_*\ ) = r\ (\ 1\ ,\ R_*\ ) = o$$

$$(7.09)\qquad \sigma\ (-1,\ R_*\ ) = \sigma\ (\ 1\ ,\ R_*\ ) = o$$

En outre par définition,

$$(7.10)\qquad \bar{\omega}\ (\ o,\ -1,\ R_*) = \bar{\omega}(o\ ,1,\ R_*\ ) = o$$

Dans l'intervalle $-1 \leqq \eta \leqq 1$ où elles sont définies, les 4 fonctions (7.03), (7.04), (7.05) et (7.06) doivent évidemment être continues et douées de dérivées des deux premiers ordres continues ; en outre, en vertu de (4.03) (absence d'un courant de retour dans l'écoulement moyen) :

$$(7.11)\qquad V\ (\eta,\ R_*)\ \geqslant\ o$$

de même, de par sa définition analytique :

$$(7.12)\qquad \sigma\ (\eta,\ R_*\ )\ \geqslant\ o$$

7.2. — L'égalité (6.07) qui définit la force de frottement sur les parois impose une condition aux limites pour $\frac{dV}{d\eta}$ en effet traduite en grandeur sans dimensions, cette égalité s'écrit :

$$(7.13)\qquad \frac{d}{d\eta}\ V\ (1,\ R_*\ ) = -R_*$$

$$(7.14)\qquad \frac{d}{d\eta}\ V\ (-1\ ,\ R_*) = R_*$$

7.3. — Aux quatre hypothèses déjà faites sur l'écoulement moyen, nous ajouterons une hypothèse de symétrie :

5[e] **hypothèse : Le mouvement moyen est symétrique par rapport au plan** O x z, c'est-à-dire que le profil réduit et la pression réduite ne changent pas quand on remplace η par $-\eta$:

$$V(-\eta, R_*) = V(\eta, R_*) \tag{7.15}$$

$$\overline{\omega}(\xi, -\eta, R_*) = \overline{\omega}(\xi, \eta, R_*) \tag{7.16}$$

7.4. — En tenant compte de la condition de symétrie (7.15) la relation (6.14) s'écrit :

$$R_o = R_* \int_o^1 V(\eta, R_*)\, d\eta \tag{7.17}$$

Le nombre de REYNOLDS R_o est une fonction du nombre de REYNOLDS fictif R_* bien déterminée quand on connaît le profil réduit.

En combinant (6.11) et (7.17) nous obtenons :

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \int_o^1 V(\eta, R_*)\, d\eta \tag{7.18}$$

équation qui définit le coefficient de frottement c_f en fonction du nombre de REYNOLDS fictif R_* ; cette relation est désignée sous le nom de **loi de résistance** et joue un rôle fondamental pour les applications physiques.

8. — **8.1.** — En les prenant sous la forme (7.01) et (7.02) les équations de REYNOLDS établissent entre les 4 fonctions

$$V(\eta, R_*),\ \overline{\omega}(\xi, \eta, R_*),\ r(\eta, R_*),\ \sigma(\eta, R_*),$$

les deux relations :

$$\frac{\delta \overline{\omega}}{\delta \xi} - \frac{1}{R_*}\frac{d^2 V}{d\eta^2} + \frac{dr}{d\eta} = o \tag{8.01}$$

$$\frac{\delta \overline{\omega}}{\delta \eta} + \frac{d\sigma}{d\eta} = o \tag{8.02}$$

Analytiquement ces équations entraînent les conséquences suivantes qu'on aperçoit immédiatement en dérivant la première par rapport à ξ

$$\overline{\omega}(\xi, \eta, R_*) + \sigma(\eta, R_*) = A\xi + C$$

$$\frac{1}{R_*}\frac{d}{d\eta} V(\eta, R_*) - r(\eta, R_*) = A\eta + B$$

où A, B, C désignent 3 constantes qui se déterminent par les conditions aux limites ; (7.09) et (7.10) imposent :

$$c = o\ ;$$

(7.08) et (7.13) d'une part, (7.08) et (7.14) d'autre part donnent respectivement :

$$-1 = A + B \qquad\qquad 1 = -A + B$$

Nous aboutissons donc à cette conclusion qu'entre les 4 fonctions inconnues V, $\overline{\omega}$, r, σ **les équations de REYNOLDS entraînent les deux relations :**

$$-\frac{1}{R_*}\frac{dV}{d\eta} + r = \eta \tag{8.03}$$

$$\overline{\omega} + \sigma = -\xi \tag{8.04}$$

En y joignant les conditions aux limites (7.07), (7.08), (7.09), (7.10), (7.13), (7.14) et éventuellement les hypothèses de symétrie (7.15) et (7.16) les conséquences logiques des équations de REYNOLDS ne peuvent rien fournir d'autre que les deux équations (8.03) et (8.04).

8.2. — Il est intéressant de noter que les 4 fonctions inconnues se partagent en deux groupes : V et r d'une part, $\overline{\omega}$ et σ d'autre part.

La corrélation entre les composantes u' et v' n'influe que sur le profil des vitesses moyennes ; au contraire, la turbulence transversale (écart type de v') n'agit que sur la distribution des pressions moyennes.

8.3. — La relation (8.04) qui lie la pression réduite et l'écart type réduit admet deux conséquences générales intéressantes :

a) Dans deux plans perpendiculaires à Ox les courbes de variation de la pression moyenne $\overline{p}$ en fonction de η se ramènent l'une sur l'autre par le simple décalage de la pression moyenne à la paroi.

b) En vertu de l'inégalité (7.12), dans un plan quelconque perpendiculaire à Ox, la pression moyenne $\overline{p}$ est inférieure ou au plus égale en tout point du fluide à sa valeur à la paroi.

8.4. — Si l'on suppose connu le profil réduit des vitesses $V(\eta, R_*)$ l'équation (8.03) donne immédiatement le coefficient de corrélation réduite sous la forme :

$$r(\eta, R_*) = \eta + \frac{1}{R_*}\frac{d}{d\eta} V(\eta, R_*) \tag{8.05}$$

Il en résulte une première conséquence : si l'on admet l'hypothèse de symétrie (7-15), V étant une fonction paire de η, sa dérivée est impaire ; le coefficient de corrélation est donc nécessairement une fonction impaire de η :

$$(8.06) \qquad r(-\eta, R_*) = -r(\eta, R_*)$$

en particulier :

$$(8.07) \qquad r(o, R_*) = o$$

Réciproquement, si l'on suppose connu le coefficient de corrélation, une simple intégration, tenant compte de la condition aux limites (7.07), donne le profil des vitesses sous la forme :

$$(8.08) \quad V(\eta, R_*) = \frac{R_*}{2}(1-\eta^2) + R_* \int_{-1}^{\eta} r(s, R_*)\, ds$$

Le premier terme du second membre définit le profil parabolique de POISEUILLE, dont il n'est pas inutile de souligner qu'il représente le profil des vitesses non seulement pour un écoulement laminaire, mais encore pour tout écoulement turbulent tel que :

$$r(\eta, R_*) = o$$

en tout point du fluide.

En vertu de l'hypothèse de symétrie (7.15), la vitesse moyenne $\bar{u}$ atteint évidemment son maximum dans le plan O x z ; ce maximum s'exprime d'après (8.08) en fonction du coefficient de corrélation sous la forme :

$$(8.09) \quad \frac{\bar{u}_{Max}}{U_*} = V(o, R_*) = \frac{R_*}{2} + R_* \int_{-1}^{o} r(\eta, R_*)\, d\eta$$

On en déduit pour la grandeur :

$$(8.10) \quad \frac{\bar{u}_{Max} - \bar{u}}{U_*} = V(o, R_*) - V(\eta, R_*)$$

qui s'est présentée à divers expérimentateurs, l'expression suivante :

$$(8.11) \quad \frac{\bar{u}_{Max} - \bar{u}}{U_*} = \frac{R_*}{2}\eta^2 + R_* \int_{o}^{\eta} r(s, R_*)\, ds$$

En combinant (7.18) et (8.08) on obtient **la loi de résistance** sous une forme où n'intervient plus le coefficient de corrélation :

$$(8.12) \quad \sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{R_*}{3} - R_* \int_{o}^{1} \eta\, r(\eta, R_*)\, d\eta$$

le premier terme, auquel se réduit le second membre quand le coefficient de corrélation est nul, définit la loi classique de POISEUILLE.

9. — **9.1.** — Les résultats du paragraphe 8 épuisent à notre avis les conséquences logiques des équations de REYNOLDS ; ils marquent le point précis où l'on est obligé de faire appel à l'expérience, si l'on veut aller plus loin.

Nous allons montrer comment il est nécessaire et suffisant pour aboutir aux lois logarithmiques de KARMAN de poser deux hypothèses supplémentaires, toutes deux suggérées par l'examen des courbes expérimentales.

9.2. — PRANDTL et NIKURADSE (6) ont introduit pour représenter les points expérimentaux des mesures des vitesses moyennes un système de coordonnées utilisant :

en abscisse : le nombre de REYNOLDS

$$\frac{\delta \sqrt{\dfrac{\tau_o}{\rho}}}{\nu} = \frac{U_* \delta}{\nu} \qquad \delta = \text{distance à la paroi}$$

en ordonnée : la vitesse réduite :

$$\frac{\bar{u}}{U_*}$$

Dans ce système de coordonnées, pour des valeurs de R_* variant de 3.10^3 à 3.10^6, le nuage des points expérimentaux se condense en une grappe très serrée qui, à première vue, donne l'impression d'une courbe unique : c'est cette courbe que PRANDTL appelle **le profil universel des vitesses.**

Avec nos notations, l'existence d'un profil universel revient à faire l'hypothèse suivante sur la forme de la fonction $V(\eta, R_*)$:

$$(9.01) \quad V(\eta, R_*) = \phi\left[(1-\eta)R_*\right] \quad o \leqslant \eta \leqslant 1$$

$$(9.02) \quad V(\eta, R_*) = \phi\left[(1+\eta)R_*\right] \quad -1 \leqslant \eta \leqslant o$$

9.3. — Les expérimentateurs ont été amenés à considérer la grandeur :

$$\frac{\bar{u}_{Max} - U_o}{U_*}$$

ils ont constaté que dans des zones étendues de valeurs de R_* elle garde à peu près une valeur constante α indépendante de R_* ; cette hypothèse :

$$(9.03) \quad \frac{\bar{u}_{Max} - U_o}{U_*} = \alpha$$

désignée en général sous le nom de **loi de STANTON** (67) se formule pour nous par l'équation :

$$(9.04)\qquad V(o, R_*) - \int_0^1 V(\eta, R_*)\, d\eta = \alpha$$

9.4. — Nous allons établir la proposition suivante :

Les deux hypothèses (9.01) **(existence d'un profil universel) et** (9.04) **(loi de STANTON) sont nécessaires et suffisantes pour que le profil des vitesses** (7.03) **et la courbe de résistance** (7.18) **suivent les lois logarithmiques de KARMAN.**

En effet, supposons les deux hypothèses satisfaites ; en reportant (9.01) dans (9.04) celle-ci prend la forme :

$$\phi(R_*) - \int_0^1 \phi\left[(1-\eta) R_*\right] d\eta = \alpha$$

ou par un changement de variable :

$$(9.05)\qquad \phi(R_*) - \frac{1}{R_*}\int_0^{R_*} \phi(t)\, dt = \alpha$$

Une différentiation par rapport à R_* ramène immédiatement cette équation intégrale à une équation linéaire du 1er ordre, admettant pour intégrale générale :

$$\Phi(t) = \alpha \log t + \beta$$

β désignant une constante arbitraire.

Nos hypothèses entraînent donc pour le profil réduit la forme logarithmique de KARMAN :

$$(9.06)\qquad V(\eta, R_*) = \alpha \log\left[(1-\eta) R_*\right] + \beta \qquad o \leqslant \eta \leqslant 1$$

$$= \alpha \log (1-\eta) + \alpha \log R_* + \beta$$

En substituant cette expression dans (7.18) on en déduit immédiatement la loi de résistance logarithmique de KARMAN :

$$(9.07)\qquad \sqrt{\frac{2}{c_f}} = \alpha \int_0^1 \log(1-\eta)\, d\eta + \alpha \log R_* + \beta$$

$$= \alpha \log R_* + \beta - \alpha$$

Réciproquement le profil logarithmique (9.06) entraîne (9.01) et (9.04) ; en effet il saute aux yeux que le profil (9.06) est un profil universel (9.01) et un calcul tout élémentaire montre qu'il vérifie la loi de STANTON (9.04).

9.5. — Le travail de mise au point logique que nous avons effectué, appelle une dernière confrontation : les hypothèses (9.01) et (9.04), équivalentes aux lois logarithmiques de KARMAN, sont-elles compatibles avec les hypothèses faites antérieurement lors de la discussion des équations de REYNOLDS ?

La réponse est négative : **un profil universel du type** (9.01) **ne peut satisfaire aux équations de REYNOLDS et aux conditions aux limites qui leur sont adjointes.**

Remarquons d'abord que, pour un profil du type (9.01), les deux conditions aux limites (7.07) et (7.13) s'écrivent :

$$(9.08)\qquad \Phi(o) = 0$$

$$(9.09)\qquad \Phi'(o) = 1$$

Or, pour la fonction logarithmique (9.06) ni l'une ni l'autre de ces deux conditions ne sont satisfaites ; on connaît la réponse donnée par KARMAN lui-même à cette objection : le profil universel n'est pas valable dans tout le fluide ; il tombe en défaut au voisinage de la paroi, dans une zone très peu épaisse, dénommée **sous-couche laminaire ;** KARMAN postule que l'épaisseur réduite de cette sous-couche a pour valeur :

$$(9.10)\qquad \epsilon = \frac{\gamma}{R_*}$$

γ désignant une constante. Si on adopte ce point de vue, l'hypothèse d'un profil universel doit se restreindre ainsi :

$$(9.11)\qquad V(\eta, R_*) = \phi\left[(1-\eta) R_*\right] \qquad o \leqslant \eta \leqslant 1-\epsilon$$

$$(9.12)\qquad V(\eta\ R_*) = \phi\left[(1+\eta) R_*\right] \qquad -1+\epsilon \leqslant \eta \leqslant o$$

Les conditions aux limites (9.08) et (9.09) tombent alors, puisque les parois sont en dehors du domaine de définition de la fonction Φ.

Ce point étant rappelé, l'équation (8.05) donne pour valeur du coefficient de corrélation dans la zone où le profil universel est supposé défini :

$$(9.13)\qquad r(\eta, R_*) = \eta - \phi'\left[(1-\eta) R_*\right] \qquad o < \eta < 1-\epsilon$$

$$(9.14)\qquad r(\eta, R_*) = \eta + \phi'\left[(1+\eta) R_*\right] \qquad 1+\epsilon < \eta < o$$

En faisant tendre η vers O par valeurs positives et négatives, on obtient respectivement :

$$r(+o, R_*) = -\phi'(R_*)$$

$$r(-o, R_*) = \phi'(R_*)$$

Pour que le coefficient de corrélation reste continu et prenne la valeur O comme l'exige (8.07) dans le plan de symétrie, il faudrait donc que :

$$\phi'(R_*) = 0$$

Si l'on veut que cette condition, logiquement nécessaire, soit satisfaite quel que soit R_*, on serait donc réduit à prendre pour Φ une constante, ce qui est évidemment absurde. En particulier pour le profil universel logarithmique de KARMAN on a :

$$\phi'(R_*) = \frac{a}{R_*} \qquad (9.15)$$

Il résulte de cette discussion que même dans la portion de fluide extérieure aux sous-couches laminaires, un profil universel ne peut pas être une solution rigoureuse des équations de REYNOLDS ; cette hypothèse entraîne pour le coefficient de corrélation une discontinuité dans le plan de symétrie O x z.

Le profil universel et la loi logarithmique qu'il implique nécessairement sous l'hypothèse supplémentaire de STANTON, ne sont donc que des solutions approchées, ayant une valeur expérimentale dans un certain domaine de nombres de REYNOLDS R_* ; la voie reste ouverte pour la recherche de solutions rationnelles satisfaisant à toutes les données du problème.

BIBLIOGRAPHIE

1. - O. REYNOLDS. — On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion.
Philos. Transactions Royal Society - A.t. 186 - 1895, p. 123-164.
2. - L. PRANDTL. — Ueber die ausgebildete Turbulenz. 2e Congrès Int. Mécanique Appliquée. Zurich 1926, p. 62-74.
3. - Th. v. KARMAN. — Mechanische Aehnlichkeit und Turbulenz.
3e Congrès Int. Mécanique Appliquée, Stockholm, 1930, p. 85-93.
4. - J. KAMPE DE FERIET. — L'état actuel du problème de la turbulence.
La Science Aérienne, t. 3-1934, p. 9-34 et t. 4-1935, p. 12-52.
5. - J. BOUSSINESQ. — Essai sur la théorie des eaux courantes.
Mémoires Savants étrangers, t. 23, 1877, p. 1-680.
6. - J. NIKURADSE. — Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren.
Forschungsarbeit V.D.I., N° 356, 1932.
7. - T.E. STANTON, J.-R. PANNELL. — Similarity of motion in relation to the surface friction of fluids.
Philos. Transactions Royal Society, A., t. 214, 1914, p. 199.