NOTULES HYDRAULIQUES

REMARQUE SUR LA LOI DE VON KARMAN POUR LE FROTTEMENT TURBULENT DANS LE CAS DES PLAQUES LISSES

par M. HALBRONN

KARMAN a étudié théoriquement [1] le frottement superficiel le long d'une plaque lisse, de dimensions infinies, au repos dans un fluide visqueux dont le mouvement, loin de la plaque, est parallèle à celle-ci, uniforme, et de vitesse U_1. Il suppose la plaque limitée à l'amont par un bord d'attaque perpendiculaire à U_1 et assez mince pour qu'on puisse négliger le sillage du bord d'attaque. Dans ces conditions, le mouvement est à deux dimensions dans tout plan de figure parallèle à U_1 et normal à la plaque. Soient les axes de coordonnées : Ox parallèle à la plaque, Oy normal, l'origine étant au bord d'attaque. Le coefficient de frottement local c_f est défini par :

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U_1^2}$$

où τ_0 désigne le frottement local sur un élément de surface unité à la distance x du bord d'attaque, et ρ la densité du fluide.

Suivant la théorie de la couche limite établie par PRANDTL, KARMAN suppose que l'effet de la viscosité se limite à une couche d'épaisseur δ ; par analogie avec le cas des tubes lisses, il pose comme loi de distribution de la vitesse U dans la couche limite :

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{k}\left\{\log_e \frac{y U_+}{\nu} + h\left(\frac{y}{\delta}\right)\right\}$$

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

où $h\left(\frac{y}{\delta}\right)$ est une fonction inconnue qui peut dépendre du nombre de REYNOLDS $R_x = \frac{Ux}{\upsilon}$

Dans le cas des tubes lisses en régime uniforme, cette fonction serait constante et égale à 5,5 k.

Ceci étant, le théorème des quantités de mouvement permet de calculer la relation entre c_f et R_x :

(1)

$$R_x = \frac{U_1 x}{\nu} = \frac{c_1}{k^2 D}\left[1 - \left(2 + \frac{k c_2}{c_1}\right)\frac{1}{z} + 2\left(1 + \frac{k c_2}{c_1}\right)\frac{1}{z^2} - 2\left(1 + \frac{k c_2}{c_1}\right)\frac{1}{z^2 e^z}\right] z^2 e^z$$

où l'on a posé :

$$Z = k\,\frac{U_1}{U_*} = k\sqrt{\frac{2}{c_f}}$$

$$\log_e D = h(1)$$

$$c_1 = \int_0^{\delta} \frac{1}{k}\left[\log\frac{\delta}{y} + h(1) - h\left(\frac{y}{\delta}\right)\right]\frac{dy}{\delta}$$

$$c_2 = \int_0 \frac{1}{k^2}\left[\log\frac{\delta}{y} + h(1) - h\left(\frac{y}{\delta}\right)\right]^2\frac{dy}{\delta}$$

KARMAN remarque que, pour les grandes valeurs de R_x,

$$R_x = \frac{c_1}{k^2 D}\, z^2 e^z \qquad (2)$$

est une approximation de la formule (1) de telle sorte que :

---

(1) KARMAN - Proc. 3e Internat. Congress for Applied Mechanics, Stockholm, 1930, 1,90-92.

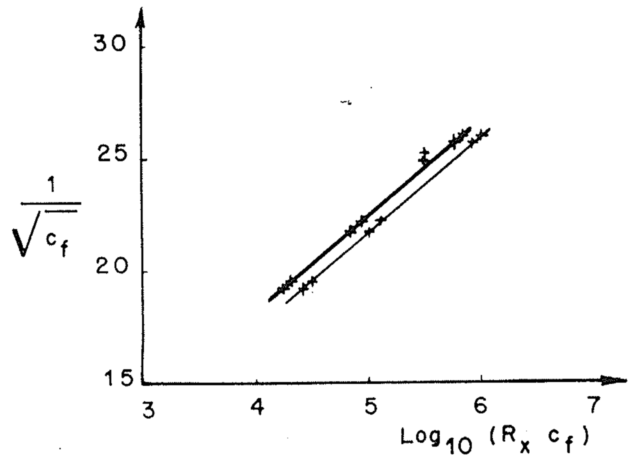
Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs, Hamburg, 1932, 69-73.

(3) $$c_f^{-\frac{1}{2}} = A + B \log_{10} (R_x \; C_f)$$

avec

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{k\sqrt{2}\log_{10} e} \log_{10} \dfrac{D}{2c_1} \\ B = \dfrac{1}{k\sqrt{2}\log_{10} e} \end{cases}$$

Ce résultat a été appliqué par lui à des mesures de KEMPF [2] (courbe I de la figure)



Courbe de gauche n° I - Courbe de droite n° II

effectuées pour des nombres de REYNOLDS compris entre 7.4×10^6 et $5.75 \; 10^7$. Elles vérifient la relation linéaire (3) avec

$$\begin{cases} A = 1.7 \\ B = 4.15 \end{cases}$$

soit :

$$k = 0{,}39_2$$

$$\log_{10} \frac{D}{c_1} = 0{,}71_0 \quad \frac{D}{c_1} = 5{,}13$$

Or, si la loi de distribution de la vitesse dans la couche limite étant la même que dans un tube lisse en régime uniforme, nous avons vu que l'on aurait :

$$h = \left(\frac{y}{\delta}\right) = h\,(1) = 5{,}5\;k$$

(2) KEMPF. Werft-Reederei-Hafen 10 (1929) 234-239, 247-253.

ce qui conduit aux valeurs accentuées des constantes ci-dessous :

$$\log_{10} D' = 5{,}5\;k \log_{10} e$$

$$c'_1 = \frac{1}{k} \int_0^\delta \log \frac{\delta}{y} \frac{dy}{\delta} = \frac{1}{k}$$

$$k\,c'_2 = \frac{1}{k} \int_0^\delta \log^2 \frac{\delta}{y} \frac{dy}{\delta} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{k\,c'_2}{c'_1} = 2$$

$$\log_{10} \frac{D'}{c_1} = 5{,}5\;k \log_{10} e + \log_{10} k \;\#\; 0{,}557$$

$\dfrac{D'}{c'_1}$ étant différent de $\dfrac{D_1}{c_1}$, il semble que les deux lois de distribution de la vitesse soient différentes. Nous nous proposons de montrer qu'en réalité cette différence n'est pas sensible aux nombres de REYNOLDS envisagés ; comme le signale KARMAN lui-même [3], pour les valeurs modérées de R_x, l'expression (2) omet un terme qui n'est pas négligeable.

En effet, pour $z \;\#\; 10$, on voit que

$$2\left(1 + \frac{k\,c_2}{c_1}\right)\frac{1}{z^2} \quad \text{et} \quad 2\left(1 + \frac{k\,c_2}{c_1}\right)\frac{1}{z^2 e^z}$$

a fortiori sont négligeables devant l'unité ; par contre $\left(2 + \dfrac{k\,c_2}{c_1}\right)\dfrac{1}{z} = \dfrac{4}{z}$ est de l'ordre de 0,4 et l'expression (2) doit être complétée :

$$(2') \quad R_x = \frac{c'_1}{k^2 D'} \left[1 - \frac{4}{z}\right] z^2 e^z$$

d'où :

$$c_f^{-\frac{1}{2}} = A' + B' \left[\log_{10} (R_x \, c_f) - \log_{10} \left(1 - \frac{4}{k\sqrt{2}} c_f^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

avec :

(3) KARMAN - Journal of the aeronautical Sciences (1934), 12.

$$\left\{\begin{array}{l} A' = \dfrac{1}{k\sqrt{2}\,\log_{10}e}\,\log_{10}\dfrac{D'}{2c'_1} \\ \\ B' = \dfrac{1}{k\sqrt{2}\,\log_{10}e} \end{array}\right.$$

Dans le terme correctif, on peut sans erreur sensible, prendre k = 0,4, d'où :

$$(3')\quad c_f^{-\frac{1}{2}} = A' + B'\left[\log_{10}(R_x c_f) - \log_{10}\left(1 - 0{,}707\, c_f^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

La courbe II montre que les mesures de KEMPF vérifient bien la formule ainsi modifiée avec :

$$\left\{\begin{array}{l} A' = 1.03 \\ B' = 4.12 \end{array}\right.$$

soit

$$k = 0.395$$

$$\log\frac{D'}{c'_1} = 0{,}541 = 5{,}5\,k\,\log_{10}e + \log_{10}k$$

Ceci confirme les résultats obtenus par DRYDEN (4) pour $R_x = 1.6\ 10^6$ et $2.1\ 10^6$: pour $7.4\,10^6 < R_x < 5.75\,10^7$ la loi de distribution de la vitesse dans la couche limite est aux erreurs de mesure près la même que dans une conduite lisse en régime uniforme.

On peut donc utiliser la formule (3').

La formule plus simple de Von KARMAN est obtenue moyennant un ajustement des constantes, que seule l'expérience peut fournir. D'ailleurs ni l'une ni l'autre n'étant d'un usage commode dans les calculs, on sera souvent amené à les remplacer par une formule d'approximation, telle celle due à PRANDTL et SCHENHERR.

Les mêmes calculs, conduisant à la même conclusion, pourraient être effectués dans le cas d'une couche limite turbulente le long d'une plaque rugueuse.

---

(4) DRYDEN, N.A.C.A., Report. n° 562, (1936).