NOTULE HYDRAULIQUE

DÉBIT EN COUCHE PROFONDE DES HOULES PERMANENTES PÉRIODIQUES

I. — DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Dans ce qui suit, l'expression « en couche profonde » a le sens qui lui a été donné pour la première fois par M. LEVI-CIVITA (Détermination des ondes permanentes d'ampleur finie, 1925) et qui a été repris ensuite par M. D. J. STRUIK (Détermination rigoureuse des ondes irrotationnelles périodiques dans un canal de profondeur finie, 1926) et par Mme M. L. DUBREUIL-JACOTIN (Thèse sur la détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie, 1934). On considère donc le débit traversant un élément de surface dS vertical, normal à la direction de propagation de la houle, immobile et situé à une profondeur suffisante pour qu'il reste constamment immergé.

Ne sont étudiées ici que des houles cylindriques : on est ainsi ramené à un problème plan.

Le trièdre de référence choisi se déplace avec le profil libre, de manière à ce que le mouvement y soit stationnaire.

L'origine O est un point du profil,

L'axe des Y est dirigé vers le bas,

L'axe des X est dirigé en sens opposé de la vitesse de propagation c.

Par hypothèse, le mouvement est permanent et périodique de période λ, par rapport à x.

Les composantes de la vitesse relative par rapport à OX et OY sont u et v.

On appelle T la période du mouvement : $\lambda = c.\ T.$)

Le rotationnel du mouvement est :

$$R = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

II. — THÉORÈME

Soit dS un petit élément de surface normal à OX, **immobile par rapport aux axes absolus** et constamment immergé.

La vitesse horizontale d'une particule par rapport à dS (vitesse absolue) est :

$$(u - c)$$

Pendant le temps dt la quantité d'eau traversant cet élément est, avec des conventions de signes évidentes :

$$(u - c)\ .\ dt\ .\ dS$$

Au bout d'une période T le débit global ayant traversé dS sera :

$$dS\ .\int_{t_0}^{t_0+T} (u - c)\ .\ dt$$

Par définition, nous appellerons **« vitesse moyenne de transport de masse en couche profonde »**, ou plus brièvement, **« vitesse moyenne en couche profonde »**, la quantité :

$$W = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} (u - c).\ dt$$

Il est aisé de se rendre compte que W ne dépend que de la profondeur y de dS.

Dans le système de coordonnées mobiles XOY, l'abscisse x de dS est liée au temps par une relation de la forme :

$$x - x_0 = c\ .\ (t - t_0)$$

Cette relation permet d'effectuer un changement de variable dans l'intégrale ci-dessus qui devient :

$$W = \frac{1}{c.T}\int_{x_0}^{x_0+\lambda} (u - c.)\ dx$$
$$= \frac{1}{\lambda}\int_{x_0}^{x_0+\lambda} (u - c).\ dx$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à y, on obtient :

$$\frac{dW}{dy} = \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0 + \lambda} \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

On peut modifier cette dernière expression en introduisant le rotationnel :

$$R = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

On obtient :

$$\frac{dW}{dy} = \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0 + \lambda} \left(R + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx$$

D'où :

$$\frac{dW}{dy} = \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0 + \lambda} R.\, dx + \frac{1}{\lambda} \Big[v \Big]_{x_0}^{x_0 + \lambda}$$

Le terme intégré est nul, puisque λ est une période pour v. Il vient donc :

$$\boxed{\frac{dW}{dy} = \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0 + \lambda} R.\, dx}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME : Dans une houle permanente et périodique, la valeur moyenne du rotationnel (à une profondeur supérieure à celle du point le plus bas du profil de l'onde) est égale à la dérivée de la vitesse moyenne en couche profonde par rapport à la profondeur.

Corollaire :

Si le mouvement est irrotationnel, la vitesse moyenne en couche profonde est une constante. Dans un système de référence convenablement choisi, elle peut donc être nulle en tous points (Houles de LEVI-CIVITA, STRUIK).

Réciproque du corollaire :

Si la vitesse moyenne en couche profonde est une constante, le mouvement est irrotationnel.

Nous allons démontrer cette réciproque pour le cas d'une profondeur finie, et en nous appuyant sur les hypothèses suivantes :

1° **On néglige la viscosité, les seules forces appliquées sont des pressions et la pesanteur.**

Les rotationnels sont donc les éléments cinématiques. On en déduit que, étant donné la permanence du mouvement dans les axes choisis, les lignes de courant sont des isorotationnelles.

2° **Le rotationnel, variable avec la profondeur, ne change de signe qu'un nombre fini de fois N.**

On peut donc définir N lignes de courant L_1, L_2... L_N numérotées à partir du fond de bas en haut, découpant le champ en plages où le rotationnel conserve le même signe ou s'annule.

La figure 1 représente de telles lignes de courant, elle est limitée à une longueur d'onde que nous avons axée sur un creux pour plus de simplicité.

On considère, en outre, les tangentes horizontales $a_1\, b_1$, $a_2\, b_2$,... etc..., aux points les plus bas de ces lignes de courant.

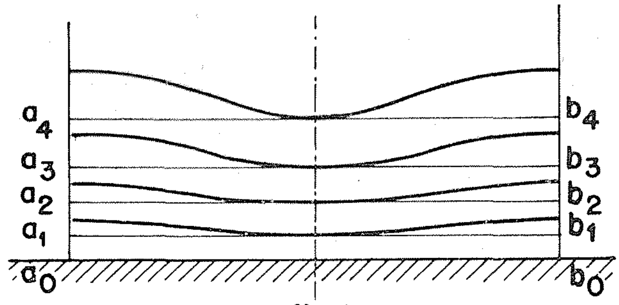

fig.1

Si donc la vitesse moyenne en couche profonde est constante, l'équation (1) nous permet d'écrire :

$$\int_{x_0}^{x_0 + \lambda} R\,.\, dx = 0.$$

On en tire, en intégrant dans un rectangle S délimité par les coordonnées $(x_0,\ x_0 + \lambda)$ et $(y_1,\ y_2)$:

$$\int\int_S R\,.\, dx = 0$$

Appliquons cette formule au rectangle ($a_0\, b_0\, b_1\, a_1$) ; ce rectangle est tout entier dans une région où R est nul ou de signe constant.

R doit donc s'annuler dans tout le rectangle ($a_0\, b_0\, b_1\, a_1$) et par conséquent dans toute la région située au-dessous de L_1.

On peut recommencer ce raisonnement de proche en proche pour les rectangles ($a_0\, b_0\, b_2\, a_2$), ($a_0\, b_0\, b_3\, a_3$).. etc., et ainsi montrer que R est nul dans tout le champ du mouvement.

Ainsi, supposer l'existence d'un rotationnel, conduit à la conclusion que ce même rotationnel est nul. On démontre ainsi, par l'absurde, que le mouvement étudié est irrotationnel. Cependant, il subsiste une limitation à la validité de cette réciproque dans l'hypothèse faite sur le rotationnel qui ne peut changer de signe qu'un nombre fini de fois. Cette limitation n'est pas inquiétante pour la pratique ; cependant, au point de vue mathématique, il serait intéressant d'établir la possibilité (ou l'impossibilité) de mouvements à vitesse moyenne en couche profonde, nulle ou constante, présentant un rotationnel changeant de signe un nombre infini de fois.

Le raisonnement précédent s'étend sans difficulté au cas d'une profondeur infinie.

III. — **CONCLUSIONS**

Signalons pour conclure que le corollaire que nous avons établi montre qu'il suffit de supposer qu'une houle permanente et périodique est irrotationnelle, pour pouvoir affirmer que le transport de masse en couche profonde peut être rendu nul par un choix convenable du système de référence.

Ainsi cette dernière particularité ne constitue pas un postulat distinct comme semblent le considérer MM. LEVI-CIVITA et STRUIK dans les ouvrages sus-cités.

Les conclusions de ces ouvrages, jointes à la présente remarque, permettent donc d'affirmer qu'il n'existe qu'une houle permanente périodique et irrotationnelle de longueur d'onde donnée en profondeur constante ou infinie.

M. BIESEL,
Ingénieur aux Etablissements NEYRPIC.

Mort de Monsieur Léon PERRIER

Président de la Compagnie Nationale du Rhône

Au moment de mettre sous presse, nous avons le grand regret d'apprendre la mort de Monsieur Léon PERRIER, Président de la Compagnie Nationale du Rhône.

Son nom demeurera gravé au seuil de la magnifique centrale du barrage de GENISSIAT, inaugurée en juillet dernier, première étape de cet aménagement du Rhône dont Monsieur Léon PERRIER fut toujours l'infatigable animateur.

Dauphinois d'adoption, Monsieur Léon PERRIER témoigna toujours de son vif intérêt pour notre Revue et pour la mission qu'elle s'était assignée.

C'est donc avec un souvenir reconnaissant que nous nous inclinons devant sa mémoire.