

DÉFORMATION D'UNE CONDUITE FORCÉE SOUTERRAINE SOUS L'ACTION DES EAUX D'INFILTRATION

ON THE DEFORMATION OF UNDERGROUND PENSTOCKS

par **N. DEWULF**,

Ancien élève de l'Ecole Polytechnique

English synopsis p. 225

Plusieurs cas de flambage de conduites souterraines enrobées de ciment injecté ont été observés au cours de ces dernières années : l'eau d'infiltration du terrain pénètre par les fissures du ciment et arrive à remplir entièrement l'espace annulaire extrêmement faible, entre paroi du tuyau et enrobage, provenant du décollement après séchage ; la pression dans cette lame liquide interposée, peut atteindre le poids d'une colonne d'eau de hauteur égale à celle de la montagne au-dessus de la conduite.

Le Bulletin n° 11 des Grands Barrages, pages 22 et 27 ainsi que le n° 12, page 45, ont attiré l'attention sur ce danger et préconisé divers moyens d'évacuation de ces eaux.

Il faut néanmoins prévoir des renforcements destinés à s'opposer au flambement.

Leur calcul devant tenir compte des flèches ⁽¹⁾ initiales provenant du poids du métal du tuyau et de celui de l'eau contenue, il nous a paru utile d'établir des formules permettant de déterminer la valeur de ces flèches.

Nous considérerons la lame d'eau enveloppant la conduite comme d'épaisseur absolument négligeable, mais continue, même dans les zones de contact complet. Si aucune déformation de la conduite ne se produisait, on pourrait donc dire que son rayon externe est uniformément égal au rayon interne de la gaine en ciment.

S'il y a déformation de la conduite, sa paroi $B_0 M M_1 A$ s'éloigne de celle du ciment à partir d'un certain point B ; au-delà de B , le contact peut subsister par endroits (fig. 1).

PREMIERE PARTIE

Dans la première partie de notre exposé, nous ne tiendrons pas compte, provisoirement, des réactions d'appui des zones de contact entre B et A . Cela revient à regarder la conduite comme reposant sur un berceau rigide $B' B_0 B$ circulaire dont la corde $B' B$ est exactement celle de l'arc de contact ci-dessus, et entièrement immergée dans l'eau dont nous nommerons P la pression à hauteur de l'axe O supposé horizontal.

Si la conduite est en charge, le niveau de l'eau intérieure est A . Pour plus de généralité, nous le supposerons quelconque en $M_0 M'_0$, et nous appellerons « p » la pression de l'air remplissant l'espace interne au-dessus du niveau $M_0 M'_0$.

A. — Etablissement des formules générales relatives à la figure (1), en ne tenant pas compte des réactions d'appui au-delà de B .

Considérons une tranche du tuyau limitée par deux sections normales à l'axe O , d'une longueur axiale égale à l'unité de longueur.

Sa paroi est soumise aux forces ci-après :

- son poids,
- la pression provenant de l'eau extérieure,
- la pression provenant de « p » et de l'eau intérieure,
- la réaction du berceau $B' B_0 B$.

Appelons F la contrainte normale à la section radiale A et γ le moment de flexion en ce point.

Nous allons appliquer à l'arc $B M_0 A$ les formules de NAVIER-BRESSE relatives aux poutres courbes ; mais nous négligerons les déformations provenant des efforts tranchants ; celles provenant des contraintes normales aux sections radiales seront aussi laissées de côté.

(1) La Houille Blanche n° 3 mai-juin 1947. Flexion et Flambage des conduites par P. ANGLES d'AURIAC.

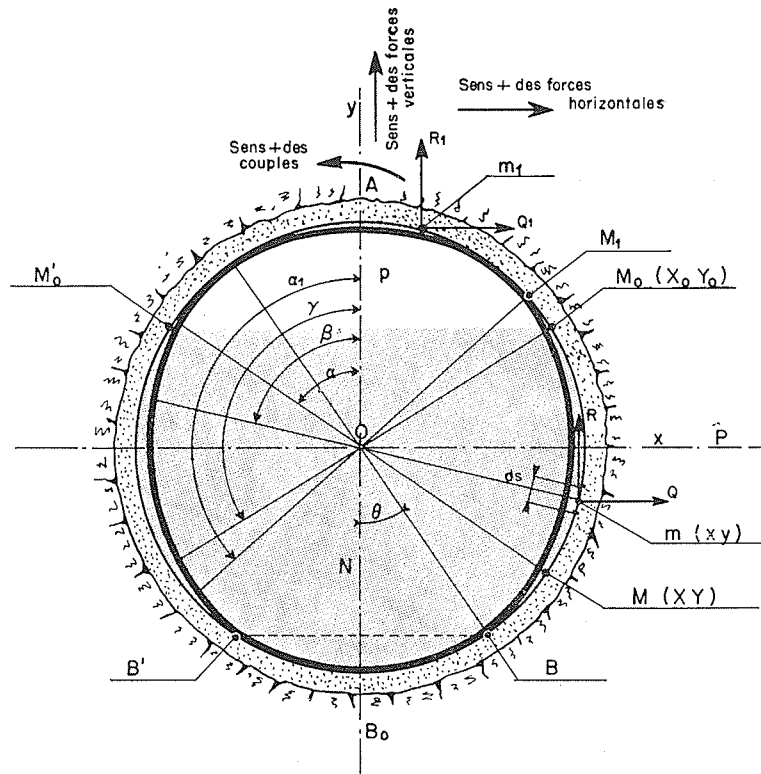


fig. 1

comme intervenant surtout dans le calcul ultérieur du flambement.

Nous aurons donc à calculer, en chaque point M (X, Y, z), le couple C provenant des forces appliquées aux éléments ds de centre de gravité m (x y β) situés entre M et A, ainsi que de F et du couple v.

Désignons par :

δ le poids spécifique de l'eau,

ω le poids de la paroi par unité de surface interne,

N le rayon interne,

Q la somme des composantes horizontales des forces agissant en m.

R la somme des composantes verticales des forces agissant en m.

Le moment de ces forces, par rapport à M, est :

$$Q(Y - y) - R(X - x)$$

Si m est entre B et M₀ :

$$Q = (p + \delta Y_0 - P) \sin \beta$$

$$R = -(p + \delta Y_0 - P) \cos \beta - \bar{\omega}$$

Si m est entre M₀ et A :

$$Q_1 = (p - P + \delta y) \sin \beta$$

$$R_1 = -(p - P + \delta y) \cos \beta - \bar{\omega}$$

Le moment μ de toutes les forces extérieures par rapport à M, est

$$\mu = \int_M^{M_0} [Q(Y-y) - R(X-x)] ds + \int_{M_0}^A [Q_1(Y-y) - R_1(X-x)] ds$$

Si M est situé entre M₀ et A, en M₁, ce moment devient

$$\mu_1 = \int_{M_1}^A [Q_1(Y-y) - R_1(X-x)] ds$$

En exprimant toutes les coordonnées, sauf Y₀, en fonction des angles α, β,

$$(0) \quad \begin{aligned} x &= N \sin \beta & y &= -N \cos \beta \\ X &= N \sin \alpha & Y &= -N \cos \alpha \end{aligned}$$

les expressions de μ et μ₁, deviennent :

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\mu}{N^2} &= (P-p)(1 + \cos \alpha) - \bar{\omega} [1 + \cos \alpha - (\pi - \alpha) \sin \alpha] - \\ &\quad - \delta Y_0 [1 - \cos(\gamma - \alpha)] - \frac{\delta N}{2} [(\pi - \gamma) \sin \alpha + \sin \gamma (\gamma - \alpha)] \end{aligned}$$

$$(1_1) \quad \begin{aligned} \frac{\mu_1}{N^2} &= (P-p)(1 + \cos \alpha_1) - \bar{\omega} [1 + \cos \alpha_1 - (\pi - \alpha_1) \sin \alpha_1] \\ &\quad - \frac{\delta N}{2} (\pi - \alpha_1) \sin \alpha_1 \end{aligned}$$

Le couple total de flexion, en M (ou M_1), sera :

$$(2) \quad C = \mu + FN(1 + \cos \alpha) + \nu$$

$$(2_1) \quad C_1 = \mu_1 + FN(1 + \cos \alpha_1) + \nu$$

L'arc $B_0 B$ étant assimilable à un encastrement, la tangente à la paroi, en B, ne change pas de direction **quel que soit le moment fléchissant au contact de B.**

« A » reste sur o y et la tangente à la paroi en ce point reste horizontale ; de sorte que les deux premières formules de NAVIER-BRESSE précitées donnent :

Si B est situé entre B_0 et M_0 ; c'est-à-dire si $\theta < \gamma$.

$$(3) \quad \int_{\theta}^{\gamma} C ds + \int_{\gamma}^{\pi} C_1 ds = 0 \quad \int_{\theta}^{\gamma} C Y ds + \int_{\gamma}^{\pi} C_1 Y ds = 0 \quad (4)$$

En développant (3), au moyen de (1) (1₁), (2) (2₁), on obtient :

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\nu}{N^2} \int_{\theta}^{\pi} d\alpha + (P-p + \frac{F}{N} - \bar{\omega}) \int_{\theta}^{\pi} (1 + \cos \alpha) d\alpha \\ &+ \bar{\omega} \int_{\theta}^{\pi} (\pi - \alpha) \sin \alpha d\alpha - \delta Y_0 \int_{\theta}^{\gamma} [1 - \cos(\gamma - \alpha)] d\alpha \\ &- \frac{\delta N}{2} \left[\int_{\theta}^{\gamma} [(\pi - \gamma) \sin \alpha + \sin \gamma \sin(\gamma - \alpha)] d\alpha + \int_{\gamma}^{\pi} (\pi - \alpha) \sin \alpha d\alpha \right] \end{aligned} \right.$$

(4') On obtient de même, en partant de (4), une équation (4') ; en comparant (3) et (4), on voit que (4') s'obtient en multipliant chacune des fonctions à intégrer de (3') par Y, c'est-à-dire, vu (0), par $-N \cos \alpha$.

Les deux équations (3') (4') permettent de trouver les expressions de **F et de ν** , en fonction de θ et γ .

On les porte ensuite dans (2) et (2₁) pour obtenir les expressions définitives de C et C' convenant à ce cas,

Si B est situé entre M_0 et A, c'est-à-dire si $\theta > \gamma$. les équations (3) (4) sont remplacées par :

$$(3_1) \quad \int_{\theta}^{\pi} C_1 ds = 0 \quad \int_{\theta}^{\pi} C_1 Y ds = 0 \quad (4_1)$$

La première, développée au moyen de (1₁) (2₁), donne :

$$(3'_1) \quad 0 = \frac{\nu_1}{N^2} \int_{\theta}^{\pi} d\alpha_1 + (P-p + \frac{F_1}{N} - \bar{\omega}) \int_{\theta}^{\pi} (1 + \cos \alpha_1) d\alpha_1 + (\bar{\omega} - \frac{\delta N}{2}) \int_{\theta}^{\pi} (\pi - \alpha_1) \sin \alpha_1 d\alpha_1$$

(4'_1) On obtient au moyen de (4₁), comme on l'a dit précédemment pour (4), une équation (4'_1).

De ces deux équations (3'_1) (4'_1) on tire les expressions de F_1 et ν_1 convenant au cas $\theta > \gamma$; on les porte ensuite dans (2₁), qui donne l'expression de C₁ correspondante.

Exemple de calcul de C

Nous avons fait remarquer que ces formules sont vraies quel que soit le moment fléchissant au bord du berceau rigide à condition que le tuyau soit en contact avec lui jusqu'en B.

On peut donc les appliquer au cas d'une conduite immergée, reposant sur un fond plat rigide ; il correspond à $\theta = 0$.

Si la conduite est à moitié pleine d'eau, ($\gamma = \frac{\pi}{2}$), les expressions de F et de ν tirées de

(3') et (4'), sont :

$$-\frac{F}{N} = P - p - \frac{\bar{\omega}}{2} - \frac{3}{4} \frac{\delta N}{2}$$

$$-\frac{\nu}{N^2} = \frac{\bar{\omega}}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi} \right) \frac{\delta N}{2}$$

La portant dans (2) :

$$\frac{C}{\delta N^3} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\bar{\omega}}{\delta N} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\bar{\omega}}{\delta N} \right) \cos \alpha + \pi \left(\frac{\bar{\omega}}{\delta N} - \frac{1}{4} \right) \sin \alpha - \frac{\bar{\omega}}{\delta N} \alpha \sin \alpha$$

Si la conduite n'est pas immergée, des formules générales analogues aux précédentes, donnent, ici, pour le couple que nous nommerons C' :

$$\frac{C'}{\delta N^3} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\omega}}{\delta N} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{\bar{\omega}}{\delta N} \right) \cos \alpha + \\ + \pi \left(\frac{\bar{\omega}}{\delta N} + \frac{1}{4} \right) \sin \alpha - \left(\frac{\bar{\omega}}{\delta N} + \frac{1}{2} \right) \alpha \sin \alpha$$

Donc : (1)

$$\frac{C'}{\delta N^3} \text{ (air)} = \frac{C}{\delta N^3} \text{ (immergé)} \text{ où } \frac{\bar{\omega}}{\delta N} \text{ est remplacé} \\ \text{par } \left(\frac{\bar{\omega}}{N} + \frac{1}{2} \right). \quad \text{Au sol, } \alpha = 0 \\ \frac{C'}{\delta N^3} = \frac{C}{\delta N^3} - \frac{3}{4}$$

Pour un diamètre de conduite de 1 m. 40 et une épaisseur e de 27,6 mm. nous verrons plus loin que le couple C au sol, est, en prenant comme unités le centimètre et le gramme, donc $\delta = 1$.

$C = 13\,137$, donc $C' = -501\,360$ (gr. cm.)

Si la conduite immergée est pleine d'eau ($\gamma = \pi$, $Y_0 = N$) et repose sur un berceau d'ouverture θ , C_1 disparaît des formules (3) et (4) ; on obtient pour C de (2) en posant :

$$A = 2 \sin^2 \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} (\pi - \theta) - (\pi - \theta)^2$$

$$(5) \quad A \frac{C}{N^2} = \bar{\omega} \left[\begin{aligned} & - \frac{\sin \theta \sin 2\theta}{4} + \frac{\sin \theta}{2} (\pi - \theta) + \cos \theta (\pi - \theta)^2 + A (\pi - \alpha) \sin \alpha \\ & + \left[2 \sin^2 \theta + \frac{5}{4} \sin 2\theta (\pi - \theta) + \frac{\cos 2\theta}{2} (\pi - \theta)^2 \right] \cos \alpha \end{aligned} \right]$$

La flèche en A est donnée par la 3^e formule de NAVIER ; nommons la Δy_1 .

$$(5') \quad \frac{EI}{N^2} \Delta y_1 = - \int_{\theta}^{\pi} C \sin \alpha \, d\alpha$$

formule dans laquelle :

E est le module d'élasticité,

I est le moment d'inertie de la section de la paroi par un plan passant par l'axe et de longueur unité.

Exemple. — Si $\theta = 60^\circ$, on trouve, avec les mêmes unités que ci-dessus :

(1) Si on ne tient pas compte de ce que $\bar{\omega}$ n'est plus tout à fait le même, voir ci-après

$$\frac{C}{\bar{\omega} N^2} = -1,4713 - 1,3491 \cos \alpha + \pi \sin \alpha - \alpha \sin \alpha$$

La condition du contact jusqu'au bord du berceau est vérifiée, car, pour $\alpha = 60^\circ$, on trouve un C négatif.

$$(5') \text{ donne : } \frac{EI}{N^4 \bar{\omega}} \Delta y_1 = 0,9635$$

Si l'épaisseur e est de 10 mm., $\bar{\omega} = 6,85$ grammes par cm^2 de paroi ; car il est diminué de 1 gramme par la poussée d'Archimède.

Pour un diamètre de 3 mètres on aura :

$$N^4 = 50625 \cdot 10^4$$

Comme $I = \frac{1}{12}$ et $E = 2 \cdot 10^9$; on obtient :

$$\Delta y_1 = 20 \text{ cm. environ.}$$

Si ce même tuyau n'est pas immergé, les formules générales citées précédemment donnent, pour le couple, la même expression, mais, la poussée d'Archimède n'existant plus, $\bar{\omega} = 6,85$ est remplacé par $\bar{\omega}' = 7,85$; de plus, comme dans l'exemple précédent, $\bar{\omega}'$ est remplacé par

$$\bar{\omega}' + \frac{\delta N}{2}$$

De sorte que le même calcul conduit à une flèche de 240 cm., ce qui n'a plus aucun sens évidemment car les formules de NAVIER-BRESSE ne sont pas applicables aux grandes déformations. On en conclut qu'un renforcement des viroles est nécessaire.

— Revenons maintenant à notre étude proprement dite (fig 1). Jusqu'au point B le couple C applique la paroi métallique contre la gaine circulaire de même rayon ; il est par suite de sens opposé à la flèche de fig. 1 indiquant le sens des couples positifs ; il est donc négatif.

A partir de B, il tend, au contraire, à rabattre le métal vers l'intérieur ; il change donc de sens, il devient positif.

Le couple passant ainsi de — à +, au point B, il y est nul.

Par conséquent l'angle θ de B s'obtiendra en faisant $\alpha = \theta$ dans l'expression (5) du couple et en l'annulant ensuite ; on obtient ainsi :

$$(6) \quad \frac{3}{2} \sin \theta \left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \left(2 - \frac{\sin^2 \theta}{3} \right) (\pi - \theta) + \cotg \theta (\pi - \theta)^2 - \frac{2}{3} (\pi - \theta)^3 \right] \bar{\omega} = 0$$

En désignant par $f(\theta)$ la fonction entre parenthèses, ceci s'écrit :

$$(6') \quad \frac{3\bar{\omega}}{2} \sin \theta f(\theta) = 0$$

Nous verrons plus loin que $f(\theta)$ n'est jamais nul, sauf pour $\theta = \pi$.

$\theta = \pi$ est donc le seul cas possible pour la figure 1 quand $\gamma = \pi$, dans les conditions admises au début du paragraphe A.

Tant qu'il n'y a pas flambage, une conduite pleine d'eau enveloppée d'une gaine rigide, avec lame d'eau interposée, à une pression quelconque, ne subit aucune déformation.

Si la lame d'eau est inexistante, on a vu précédemment que la formule du couple reste la

même, sauf que $\bar{\omega}$ est remplacée par $\bar{\omega}' + \frac{\delta N}{2}$;

(6') aura donc la même forme et la conclusion ci-dessus, **reste valable sans eau d'infiltration.**

$\gamma = 0. \quad \bar{\omega} > \frac{\delta N}{2}$ **Si la conduite immergée**

est vide $\gamma = 0$ $Y_0 = -N$, la poussée d'Archimède est égale au volume complet de la conduite puisque $\delta = 1$; pour que l'appui sur le bas de la gaine subsiste, il faut que :

$$\delta \pi N^2 < 2 \pi N \bar{\omega}$$

d'où :

$$\bar{\omega} > \frac{\delta N}{2}$$

Examinons ce cas.

Puisque $\gamma = 0$, θ est forcément $\geq \gamma$; les formules à appliquer sont donc (1₁) (2₁) (3₁) (4₁).

On obtient, pour C_1 , la formule suivante où « A » a la même signification que pour (5).

$$(7) \quad A \frac{C_1}{N^2} = \left(\bar{\omega} - \frac{\delta N}{2} \right) \text{ [même facteur que celui de (5) pour } \bar{\omega} \text{]}$$

La formule de la flèche, en π , est toujours (5') avec C_1 au lieu de C ,

Exemple. — Diamètre 0 m, 80 donc $N = 40$, épaisseur 30,6 mm.

$$\text{Donc } \bar{\omega} = (3,06) (6,85) = 21, \quad \frac{\delta N}{2} = 20.$$

Sur un berceau de $A = 60^\circ$; la condition du contact jusqu'au bord est vérifiée, comme on l'a vu pour un C de même formule et de même θ à l'exemple précédent.

$$\begin{aligned} \frac{E I}{N^4 \left(\bar{\omega} - \frac{\delta N}{2} \right)} \Delta y_1 &= 0,9635 \\ I &= \frac{e^3}{12} = \frac{28,652}{12} \quad N^4 = 256 \cdot 10^4 \\ E &= 2 \cdot 10^9 \quad \bar{\omega} - \frac{\delta N}{2} = 1 \\ \Delta y_1 &= 0,0148 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Si ce même tuyau n'est pas immergé, $\bar{\omega}$ est remplacé par $\bar{\omega}' = 3,06 \cdot 7,85$; on verrait aussi au moyen des formules générales citées dans le

texte de l'exemple de calcul de C, que $\bar{\omega} - \frac{\delta N}{2}$

est remplacé par $\bar{\omega}'$; le même calcul que ci-dessus conduit alors à :

$$\Delta y_1 = 0,355 \text{ cm.}$$

— Revenons maintenant au cas de notre étude (fig. 1). On verrait, comme précédemment, que θ se calcule en remplaçant α par θ dans (7) et en annulant le 2^e membre ; il ressort de la comparaison de (5) et (7) qu'on obtient, à la place de (6') :

$$(8) \quad \frac{3}{2} \left(\bar{\omega} - \frac{\delta N}{2} \right) \sin \theta f(\theta) = 0.$$

Si la lame d'eau est inexistante, on vient de

voir que $\bar{\omega} - \frac{\delta N}{2}$ est remplacé par $\bar{\omega}'$.

On arrive donc à la même conclusion que pour $\gamma = \pi$.

Dans une gaine circulaire avec ou sans lame d'eau interposée, un tuyau vide ne subit aucune déformation.

$$\gamma = 0, \bar{\omega} < \frac{\delta N}{2}$$

La poussée d'Archimède étant supérieure au poids du tuyau, celui-ci ne reposera plus sur le bas de la gaine. On sera dans le cas de la fig. 2 ; l'appui se fera de A₀ à A.

B. — FORMULES GÉNÉRALES RELATIVES A LA FIGURE (2)

En comptant les angles à partir de OA₀, sans changer ni la position ni le sens des axes Ox, Oy ; mais en changeant le sens positif des couples, on obtient à la place des équations (0) (1) (1₁), les équations :

$$x = N \sin \beta' \quad y = N \cos \beta' \quad X = N \sin \alpha' \quad Y = N \cos \alpha'$$

$$(0') \quad \frac{\mu'}{N^2} = (P-p)(1 + \cos \alpha') + \bar{\omega} [1 + \cos \alpha' - (\pi - \alpha') \sin \alpha']$$

$$(1') \quad -\delta Y_0 [\cos \alpha' + \cos (\gamma' - \alpha')] + \frac{\delta N}{2} [(\gamma' - \alpha') \sin \alpha' - \sin \gamma' \sin (\gamma' - \alpha')]$$

$$(1'_1) \quad \frac{\mu'_1}{N^2} = (P-p)(1 + \cos \alpha'_1) + \bar{\omega} [1 + \cos \alpha'_1 - (\pi - \alpha'_1) \sin \alpha'_1] - \delta Y_0 (1 + \cos \alpha'_1)$$

et des formules (2') (2'₁) (3'') (4'') (3''₁) (4''₁) identiques aux formules de même n° du paragraphe A.

Par élimination de F'v' quand θ' < γ', ou de F'₁v'₁ quand θ' > γ', on obtient de même les expressions des couples.

Exemple : γ' = π.

Conduite vide, donc γ' = π, donc θ' < γ', l'élimination doit être faite entre (2') (3') (4') (1') ; on obtient comme expression du couple c', en appelant A' l'expression

$$A' = 2 \sin^2 \theta' + \frac{\sin 2 \theta'}{2} (\pi - \theta') - (\pi - \theta')^2$$

$$A \frac{C'}{N^2 (\bar{\omega} - \frac{\delta N}{2})} = \frac{\sin \theta' \sin 2 \theta'}{4} - \frac{\sin \theta'}{2} (\pi - \theta') - \cos \theta' (\pi - \theta')^2 - A (\pi - \alpha') \sin \alpha' - \left[2 \sin^2 \theta' + \frac{5}{4} \sin 2 \theta' (\pi - \theta') + \frac{\cos 2 \theta'}{2} (\pi - \theta') \right] \cos \alpha'$$

Pour trouver l'emplacement du point A, il faut, comme pour les formules du paragraphe A, faire α = θ' dans l'expression du couple et l'égaliser à 0.

Les formules (7) et (9) étant identiques sauf que les signes sont inversés, on obtient la même équation que (8).

La seule solution est donc θ' = π.

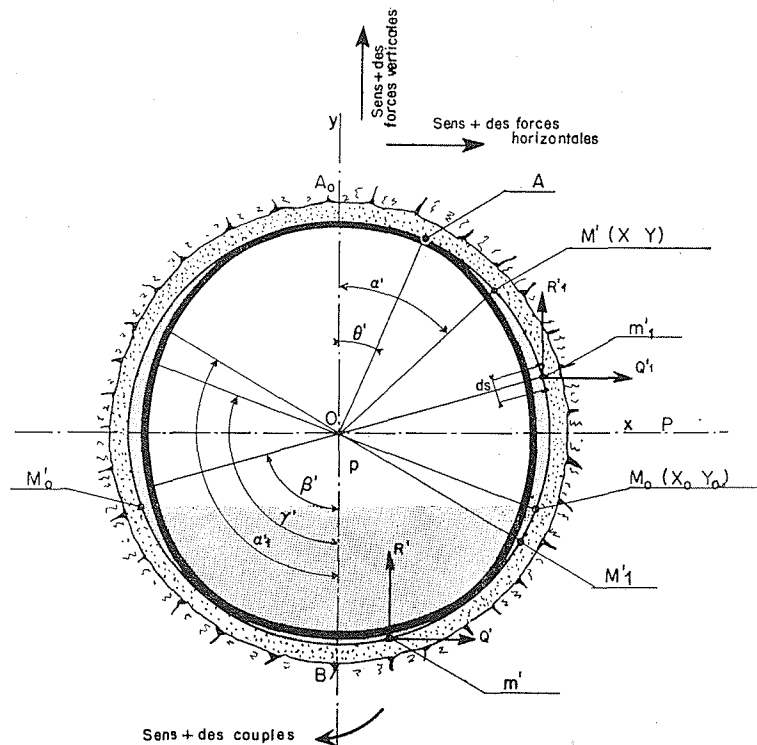


fig. 2

Donc, mêmes conclusions que précédemment, avec les hypothèses du début du paragraphe A :

Une conduite vide, plus légère que son volume extérieur d'eau, dans une gaine circulaire avec lame d'eau interposée, ne subit aucune déformation.

Nous allons maintenant étudier, en détail, le cas

$$\gamma = \frac{\pi}{2};$$

étant le plus éloigné des deux γ précédents pour lesquels les déformations sont nulles, il paraît être le cas le plus défavorable au point de vue déformations.

La poussée d'Archimède est $\frac{\pi N^2}{2} \delta$

$$\gamma = \frac{\pi}{2}. \quad \text{CONDUITE A MOITIÉ REMPLIE}$$

Cas A ou B

La poussée d'Archimède est $\frac{\pi N^2}{2} \delta$

le cas A (fig. 1) correspond donc ici à $\frac{\bar{\omega}}{N} > \frac{\delta}{4}$

le cas B (fig. 2) correspond donc ici à $\frac{\bar{\omega}}{N} < \frac{\delta}{4}$

$$A : \frac{\bar{\omega}}{N} > \frac{\delta}{4}, \theta < \frac{\pi}{2}$$

Supposons d'abord B plus bas que M_0 , donc

$$\theta < \frac{\pi}{2}$$

Les formules à appliquer sont :

de θ à $\frac{\pi}{2}$: (3) (4) ou, plutôt, (3') (4')

Comme exposé au paragraphe A du début, on en conclut les expressions de C et de C_1 ; leur forme est la suivante dans laquelle a, b, c, d, sont

des fonctions de θ et de $\frac{\bar{\omega}}{N}$:

$$(10) \quad \frac{C}{N^3} = a - b \cos \alpha + c \sin \alpha - d \alpha \sin \alpha$$

La position de θ s'obtient, comme montré précédemment, en faisant $\alpha = \theta$, dans l'expression de C, puis en l'égalant à zéro.

En appelant $\varphi(\theta)$ la fonction

$$\frac{\pi}{4} + 2 \cdot \cos \theta + \left(\frac{2}{\sin \theta} + \frac{\pi}{4} \cotg \theta \right) (\pi - \theta) - \frac{\pi}{2} (\pi - \theta)^2 = \varphi(\theta)$$

on obtient l'équation en θ suivante ; $f(\theta)$ est la fonction définie en (6) (6') :

$$(11) \quad \frac{3\bar{\omega}}{2} \sin \theta \cdot f(\theta) - \sin \theta \cdot \varphi(\theta) \cdot \frac{\delta N}{2} = 0$$

D'où, les unités adoptées étant le cm. et le gramme :

$$(11') \quad \frac{3\bar{\omega}}{N} = \frac{\varphi(\theta)}{f(\theta)}$$

Les fonctions $f(\theta)$ et $\varphi(\theta)$ ont été calculées pour des valeurs de $\pi - \theta$ assez rapprochées permettant de résoudre (11') au moyen des abaques I et II, avec une exactitude suffisante comme nous le vérifierons plus loin.

Voici la liste de ces valeurs :

$\pi - \theta$	$f(\theta)$	$\varphi(\theta)$	$\frac{\varphi(\theta)}{f(\theta)} = 3 \frac{\bar{\omega}}{N}$
3,1416	$\frac{\pi^2}{\sin \theta}$	$\left(\frac{2\pi + \frac{\pi^2}{4}}{\sin \theta} \right)$	0,8866
3,14	6262,45	5554,8	0,8866
3,135	1475,44	1311,0	0,888
3,13	829,77	738,82	0,8906
3,12	436,23	389,87	0,893
3,11	292,13		
3,10	217,26	195,26	0,898
3	51,255	47,671	0,9301
2,9	23,849	22,985	0,9638
2,8	13,227	13,256	0,9977
2,7	7,9205	8,2624	1,043
2,6	4,9307	5,3617	1,088
2,5	3,1309	3,5533	1,134
2,4	2,0055	2,3766	1,185
2,3	1,2853	1,5907	1,237
2,2	0,82083	1,0590	1,288
2,1	0,52005	0,69795	1,342
2	0,32440	0,45236	1,391
1,9	0,19940	0,28683	1,439
1,8	0,12003	0,17683	1,471
1,7	0,07064	0,10550	1,493
1,6	0,04043	0,06064	1,499
1,57 = $\frac{\pi}{2}$			1,5
π	0		

Pour $\theta > \frac{\pi}{2}$, $C_1(\theta) = 0$ donne :

$$(11_1) \quad \frac{3\bar{\omega}}{2} \sin \theta \cdot f(\theta) - \frac{3}{2} \sin \theta \cdot f(\theta) \cdot \frac{\delta N}{2} = 0$$

$f(\theta)$ n'étant nul pour aucune valeur de θ , sauf π , il en résulte que, si le contact s'étend au-delà de $\frac{\pi}{2}$, il est complet de B_0 à A.

Mais ce résultat est purement théorique puisque $\frac{3\bar{\omega}}{N}$ devant alors dépasser la valeur 1,5, cela correspond à une épaisseur de paroi considérable, incompatible avec les formules de NAVIER-BRESSE qui exigent $\frac{e}{N}$ très petit.

Ainsi avec :

- $N = 60 \text{ cm.}$, il faudrait $\bar{\omega} > 30$, donc $6,85 e > 30$; $e > 44 \text{ mm.}$
- $N = 100 \text{ cm.}$, il faudrait $\bar{\omega} > 50$, donc $6,85 e > 30$; $e > 73 \text{ mm.}$

Si, au lieu d'un tuyau immergé 1/2 plein, on a affaire à un tuyau 1/2 plein, dans l'air, reposant sur un berceau cylindrique de même rayon et d'ouverture θ quelconque, les formules générales citées dans l'exemple de calcul de c , montrent que le contact est complet jusqu'au bord du berceau.

Si ce berceau est une gaine fermée, l'équation (11') est remplacée par :

$$(11'') \quad 3 \frac{\bar{\omega}'}{N} = \frac{\varphi(\theta)}{f(\theta)} - 1,5 - \frac{\sin 2\theta}{2 f(\theta)}$$

Comme $\frac{\varphi(\theta)}{f(\theta)}$ est $< 1,5$ pour $\theta < \frac{\pi}{2}$, cette équation n'a aucune solution ; le contact s'étend donc au-delà de $\frac{\pi}{2}$.

θ étant $> \frac{\pi}{2}$; il faut le déterminer par une équation analogue à (11'), qui est :
 (11''') $\bar{\omega}'' f(\theta) = 0$.

La seule solution est, par suite, $\theta = \pi$.

Donc, **même conclusion pour une conduite 1/2 pleine dans une gaine sans eau, que pour une conduite pleine ou vide dans les mêmes conditions.**

FORMULE GÉNÉRALE DE LA FLÈCHE

Revenons maintenant au cas de la fig. 1.

Appelant Δx et Δy les projections, sur O x et

O y du déplacement d'un point M quelconque par suite des déformations résultant des couples C, nous nommerons **flèche « f »** la somme des projections de Δx et Δy sur le rayon passant par M. Nous compterons f comme positif quand la déformation amène M en dehors de la circonférence N. Donc :

$$(12) \quad f = -\Delta y \cos \alpha + \Delta x \sin \alpha$$

Les 2^e et 3^e formules de NAVIER-BRESSE donnent pour un point M, entre B et M_0 (fig. 1) :

$$EI \cdot \Delta x = - \int_{\theta}^{\alpha} C (Y-y) \cdot N \cdot d\beta$$

$$EI \cdot \Delta y = \int_{\theta}^{\alpha} C (X-x) \cdot N \cdot d\beta$$

Il en résulte :

de B à M_0

$$(13) \quad \frac{EI}{N^3} f = \cos \alpha \int_{\theta}^{\alpha} \frac{C}{N^3} \sin \beta \cdot d\beta - \sin \alpha \int_{\theta}^{\alpha} \frac{C}{N^3} \cos \beta \cdot d\beta$$

On trouve de même, pour un point M_1 , entre M_0 et A :

$$(13_1) \quad \frac{EI}{N^3} f_1 = \cos \alpha_1 \left[\int_{\theta}^{\gamma} \frac{C}{N^3} \sin \beta \cdot d\beta + \int_{\gamma}^{\alpha} \frac{C_1}{N^3} \sin \beta \cdot d\beta \right] - \sin \alpha_1 \left[\int_{\theta}^{\gamma} \frac{C}{N^3} \cos \beta \cdot d\beta + \int_{\gamma}^{\alpha} \frac{C_1}{N^3} \cos \beta \cdot d\beta \right]$$

Nous allons appliquer les équations (11), (13), (13₁) à deux exemples : le premier sera celui de viroles de faible diamètre et de forte épaisseur,

donc $\frac{\bar{\omega}}{N}$ grand ; pour le second $\frac{\bar{\omega}}{N}$ sera plus faible. En diminuant encore $\frac{\bar{\omega}}{N}$ nous serons dans le cas B.

$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$

A. — 1^{er} EXEMPLE

Diamètre : 1 mètre 20 $e = 30 \text{ mm.}$

Donc $\bar{\omega} = 6,85 \times 3 = 20,55$ grammes par cm^2 de paroi,

$$\frac{\bar{\omega}}{N} = 0,3425 \quad \frac{3 \bar{\omega}}{N} = 1,0275 \quad \frac{E I}{N^5} = 5,8$$

L'intersection de la courbe $\frac{\varphi}{f}$ avec l'horizontale

1,0275 donne une valeur de $\pi - \theta$ un peu inférieure à 2,74.

Une valeur plus exacte est obtenue en se basant sur les diagrammes $f(\theta)$ et $\varphi(\theta)$:

$$\pi - \theta = 2,73 \text{ correspond à } \varphi(\theta) = 9,55 \text{ et à } f(\theta) = 9,25$$

$$\pi - \theta = 2,74 \text{ correspond à } \varphi(\theta) = 9,95 \text{ et à } f(\theta) = 9,80$$

$$\text{Donc } 2,73 \text{ correspond à } \frac{\varphi}{f} = 1,031.$$

$$2,74 \text{ correspond à } \frac{\varphi}{f} = 1,015.$$

Par interpolation entre ces deux valeurs de $\frac{\varphi}{f}$ on voit que 1,0275 correspond à

$$\pi - \theta = 2,7322 \text{ d'où } \theta = 0,4094.$$

On a adopté, trop hâtivement, $\pi - \theta = 2,735$, d'où $\theta = 0,4066$.

Bien que ce $\pi - \theta$ corresponde à $e = 29,96$ mm., valeur très voisine de la véritable, d'où semble résulter pour C une erreur négligeable, il faut se rendre compte si l'approximation obtenue est suffisante.

En faisant $\alpha = 0,4066$ dans l'expression (10) particulière à cet exemple, on obtient 0,0003 au lieu de zéro.

En conservant $e = 30$ au lieu de $e = 29,96$ qui correspond à $\theta = 0,4066$, on commet donc sur le couple, en θ , une erreur : $\Delta C_0 = 0,0003$. $N^3 = 64,8$ (gr. cm. par cm. de longueur d'axe).

Appelons $\Delta \gamma$ et ΔF les erreurs qui résultent, pour γ et F, de $\Delta e = 0,04$

$$(10) \text{ donne } \gamma = N^3 (a + b) \text{ d'où } \Delta \gamma = N^3 (\Delta a + \Delta b)$$

quant à ΔF , on le calcule au moyen de l'expression de F déduite de (3') (4').

L'erreur ΔC_0 provient des 3 couples suivants :

1 — celui correspondant aux forces externes agissant entre les points $\alpha = 0,4066$ et $\alpha = 0,4094$;

2 — le couple $(1 + \cos \theta) \Delta F$;

3 — le couple $\Delta \gamma$

Au-delà de 0,4094, l'erreur 1 disparaît, l'erreur 3 subsiste telle quelle, l'erreur 2 étant remplacée par $(1 + \cos \alpha) \Delta F$, son maximum est le couple 2.

Si les erreurs 2 et 3 sont de même signe, le maximum de l'erreur ΔC sur le couple est donc ΔC_0 .

C'est le cas de cet exemple, on pourra donc la négliger.

Voyons s'il en est de même pour le couple C_1 , c'est-à-dire pour $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

En comparant les coefficients a b c d de (10) et les coefficients $a_1 b_1 c_1 d_1$ du Couple C_1 (dans

le cas général $\gamma = \frac{\pi}{2}$) on trouve :

$$(14) \quad a_1 = a \quad b_1 = b - 0,5$$

$$c_1 = c - \frac{\pi}{4} \quad d_1 = d - 0,5$$

L'erreur sur C_1 aura donc la même expression que ΔC ; son maximum est, par conséquent, ΔC_0 ; par suite, elle est aussi négligeable.

Le calcul des flèches jusqu'en $\frac{\pi}{2}$ se fait par (13), au moyen des coefficients de (10).

On constate d'autre part, la relation générale suivante, pour $\gamma = \frac{\pi}{2}$, entre les deuxièmes membres de (13) et de (13₁), en un point quelconque α_1 :

$$(15) \quad (13_1) = (13) + \frac{1}{8} \left[\left(\frac{\pi^2}{4} - 3 \right) \cos \alpha_1 - (\pi - \alpha_1) \alpha_1 \cos \alpha_1 - 3 \left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2} \right) \sin \alpha_1 \right]$$

Elle permet d'avoir immédiatement l'expression de f_1 au moyen de celle de f.

Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant : (Voir page suivante).

CE TABLEAU SE RAPPORTE A L'EXEMPLE PRECEDENT

α	Radians	0,4066	0,5	0,7508	1,175	$\frac{\pi}{2}$	1,62	1,746	2,3	2,4143	π
	Grades	25,885	31,83	47,62	74,88	100	103,13	111,16	146	154	200
	$\frac{C}{N^3}$	0,0003	0,01015	0,0192 Max.	nul	-0,0263	-0,0311 Min.		0		0,0266 Max.
	$\frac{EI}{N^5} \cdot f$		-0,000016			-0,0065	-0,00675 Min.		0		0,0118 Max.
	f						-0,00108				+0,00193 cm

2^e EXEMPLE DU CAS A POUR $\gamma = \frac{\pi}{2}$

Diamètre 1,40 mètre e = 27,6 mm.
donc : $\bar{\omega} = 6,85 \cdot 2,76 = 18,9$ grammes par cm² de paroi.

$$\frac{\bar{\omega}}{N} = 0,27 \quad \frac{3 \bar{\omega}}{N} = 0,81 \quad \frac{EI}{N^5} = 2,083$$

La poussée d'Archimède approche du poids total.

La valeur minimum de $\frac{\varphi}{f}$ étant 0,8866, il n'existe aucun point de contact (fig. 1) où le couple passe de - à + ; et, cependant, $\frac{\bar{\omega}}{N}$ étant > 0,25 il y a certainement appui vers le bas.

C'est donc que, dès B₀, la paroi de la conduite s'éloigne de la gaine, le couple doit y être positif.

Nous avons donné, dans l'exemple initial d'un calcul de C, la formule du couple en fonction de

$\frac{\bar{\omega}}{N}$ dans le cas actuel $\theta = 0$.

La formule de C₁ résultera ensuite de (14).

La formule de la flèche résultant de (13) est ici très simple.

$$(16) \frac{EI}{N^5} f = a(\cos \alpha - 1) - \frac{c}{2} \sin \alpha + \frac{c}{2} a \cos \alpha + \frac{1}{2} (b + \frac{d}{2}) a \sin \alpha - \frac{d}{4} a^2 \cos \alpha$$

où a b c d sont les coefficients du couple, formule (10). f₁ est déduit de f au moyen de (15).

Voici les résultats obtenus : (Tableau du bas).

On a annoncé, lors de l'exemple précité, que le couple au sol, est 13137, pour une conduite de ce diamètre et de ce poids. On a bien, ici, en B₀ :

$$C = 0,0383 \cdot \bar{\omega}^3 = 13137$$

CE TABLEAU SE RAPPORTE AU DEUXIEME EXEMPLE DU CAS A

α	Radians	0	1,3675	$\frac{\pi}{2}$	2,1	π
	Grades	0	87,06	100	133,7	200
	$\frac{C}{N^3}$	0,0383		-0,063		+0,0375 Max.
	f	0	-0,01015 Min.	-0,0096	0	0,018 cm Max.

$$B - \frac{\bar{\omega}}{N} < \frac{\delta}{4}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \theta' < \frac{\pi}{2}$$

On a vu que si $\frac{\bar{\omega}}{N} < \frac{\delta}{4}$, pour $\gamma = \frac{\pi}{2}$, on passe de fig. 1 à fig. 2.

Supposons d'abord A. entre A_0 et M_0 (fig. 2).

Les formules à appliquer sont :

de θ' à $\frac{\pi}{2}$: (3'') (4''). On en déduit l'expression de C' . En y faisant $\alpha' = \theta'$, et l'égalant à zéro, on a une équation donnant la valeur de θ' , elle est :

$$(17) \quad 3 \frac{\bar{\omega}}{N} = - \frac{\psi(\theta')}{f(\theta')}$$

$f(\theta')$ est la même fonction que $f(\theta)$ définie en (6) (6').

$\psi(\theta')$ est la fonction :

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{4} + 2 \cos \theta' - \frac{3}{4} \sin 2\theta' + \left[\frac{2}{\sin \theta'} + \frac{\pi}{4} \cotg \theta' - \left(3 - \frac{\sin^2 \theta'}{2} \right) (\pi - \theta') \right] \\ & - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \cotg \theta' \right) (\pi - \theta')^2 + (\pi - \theta')^3 \\ & = \psi(\theta') \end{aligned}$$

$\psi(\theta')$ a été calculé pour les mêmes $(\pi - \theta')$ que $\varphi(\theta)$.

$$\pi - \theta' \quad \psi(\theta') \quad - \frac{\psi(\theta')}{f(\theta')}$$

$\pi - \theta'$	$\psi(\theta')$	$-\frac{\psi(\theta')}{f(\theta')}$
3,1416		$0,61338 = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}$
3,14	3832,95	0,61205
3,135	902,163	0,6115
3,13	505,83	0,6090
3,12	265,10	0,6077
3,11	176,511	0,6042
3,10	130,64	0,6013
3	29,211	0,5700
2,9	12,770	0,5354
2,8	6,5850	0,4978
2,7	3,6182	0,4568
2,6	2,0438	0,4145
2,5	1,1431	0,3651
2,4	0,63153	0,3149
2,3	0,33722	0,2624

2,2	0,17159	0,2090
2,1	0,08206	0,1578
2	0,03423	0,1055
1,9	0,01227	0,06153
1,8	0,003217	0,02680
1,7	0,000452	0,00640

$$1,57 = \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad 0$$

Pour $\theta' > \frac{\pi}{2}$ $c_1(\theta) = 0$ donne :

(17₁) $\bar{\omega} f(\theta) = 0$ même remarque que pour (11₁).

Pour f et f_1 les formules sont les mêmes qu'au cas A.

B — 1^{er} EXEMPLE

$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$

Diamètre = 2 mètres $e = 30$ mm.

Donc $\bar{\omega} = 6,85 \times 3 = 20,55$ comme dans l'exemple précédent

$$\frac{\bar{\omega}}{N} = 0,2055 < \frac{\delta}{4} \quad \frac{3\bar{\omega}}{N} = 0,6165$$

$$\frac{EI}{N^3} = 0,368$$

Le diagramme de $\frac{\psi}{f}$ montre que le couple

n'est nul en aucun point. Comme pour le 2^e exemple du cas A, on en conclut que $\theta' = 0$ et que le couple a le sens considéré comme positif dans la fig. 2.

On trouve, au moyen (3'') (4'') (2') — (3''₁) (4''₁) (2'₁) :

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{C'}{N^3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} - \frac{\bar{\omega}}{N} - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\omega}}{N^2} - \frac{3}{4} \right) \cos \alpha' + \\ & \quad + \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{\bar{\omega}}{N} - \frac{1}{2} \right) \sin \alpha' - \left(\frac{\bar{\omega}}{N} - \frac{1}{2} \right) \alpha' \sin \alpha' \\ & \frac{C'_1}{N^3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} - \frac{\bar{\omega}}{N} - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\omega}}{N} + \frac{1}{4} \right) \cos \alpha' + \\ & \quad + \pi \frac{\bar{\omega}}{N} \sin \alpha' - \frac{\bar{\omega}}{N} \sin \alpha' \end{aligned} \right.$$

f' est donnée par une formule identique à (16) f'_1 se déduit de f' comme précédemment.

Résultats : f est négative dès $\alpha = 0$; elle augmente en valeur absolue, jusqu'à $\alpha = 1,4425$ (91,83 grades), où elle atteint son minimum — 0,04 cm.

Puis sa valeur absolue diminue ; elle est — 0,0386 en $\frac{\pi}{2}$; elle est nulle au point $\alpha' = 131,25$ grades.

Elle augmente ensuite jusqu'à π , où elle est maximum et a comme valeur 0,07 cm.

B — 2^e EXEMPLE

$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$

Diamètre = 2 mètres $e = 21,9$ mm.

Donc : $\bar{\omega} = 6,85 \times 2,19 = 15$ gr. par cm^2 de paroi

$$\frac{\bar{\omega}}{N} = 0,15 < \frac{\delta}{4} \quad \frac{3 \bar{\omega}}{N} = 0,450$$

$$\frac{EI}{N^5} = 0,133$$

A cette valeur de $\frac{3 \bar{\omega}}{N}$ le diagramme de $\frac{\psi}{f}$ fait correspondre $\pi - \theta' = 2,686$ d'où $\theta' = 0,4556$.

En procédant comme indiqué au premier exemple ($\frac{\pi}{2}$, A), on s'est aperçu que

$\pi - \theta' = 2,68$ aurait été beaucoup plus exact.

Porté dans l'expression de C' , $\alpha = 0,4556$ donne :

$$C' = 0,00022 \text{ au lieu de } 0.$$

Résultats : f' est d'abord négative, puis elle augmente en valeur absolue ; en $\frac{\pi}{2}$ elle est

— 0,0435. Elle reste presque la même jusqu'en 1,63 (103,82 grades) où la dérivée est nulle.

Elle diminue ensuite en valeur absolue et s'annule en $\alpha = 2,3$ (146 grades). Puis elle augmente et atteint, en π , sa valeur maximum 0,0735 cm.

DEUXIÈME PARTIE

Jusqu'ici nous avons admis que la paroi de ciment, au-delà de θ , n'a aucun contact avec la conduite. Nous allons maintenant chercher à déterminer approximativement quelle est l'influence, sur les flèches maxima calculées au moyen des formules de la 1^{re} partie, du prolongement circulaire du berceau au-delà de B_0B ou A_0A .

Nous emploierons un raisonnement ayant quelque analogie avec celui, basé sur le principe de superposition, employé couramment pour déduire les déformations d'une poutre encastree, de celles calculées pour la même poutre reposant sur appuis simples.

Ce raisonnement, bien qu'imparfait, sera suffisant pour obtenir le sens et l'ordre de grandeur des déformations provenant des zones de contact entre θ (ou θ') et π , non considérées jusqu'ici ; elles se superposeront aux précédentes.

Pour plus de facilité, nous exposerons notre procédé sur le premier exemple de $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\bar{\omega}}{N} = 0,3425 \quad \theta = 0,4066$$

$$\frac{EI}{N^5} = 5,8 \quad N = 60 \text{ cm.}$$

maximum de la flèche positive en A où $\frac{EI}{N^5} f = 0,0118$, $f = + 0,00193$ cm.

maximum de la flèche négative en $\alpha = 1,62$ où $\frac{EI}{N^5} f = - 0,00675$, $f = - 0,00108$ cm.

Considérons un tuyau fictif vide ($\gamma = 0$) de même rayon et de même $E I$, plongé dans l'eau et reposant sur le berceau B_0B correspondant à $\theta = 0,4066$. Nous allons déterminer quel poids fictif $\bar{\omega}'$ doit lui être attribué pour que sa flèche en $\alpha = \pi$ soit égale, en valeur absolue, à 0,00193.

La formule (7) est relative à ce cas ; elle donne :

$$\frac{C_1}{N^2} \cdot \frac{1}{\bar{\omega}' - \frac{N}{2}} = -1,18877 - 0,869244 \cos \alpha + \pi \sin \alpha - \alpha \sin \alpha$$

Appelons f' la flèche, en A, de ce tuyau fictif. Les formules (12) (13) (13₁) sont générales ; la deuxième est applicable, en y remplaçant C par C₁ puisque $\alpha = 0$, donc M₀ au-dessous de θ ; elle donne pour $\alpha = \pi$ et $\theta = 0,4066$, avec les coefficients ci-dessus de C₁ :

$$\frac{E I}{N^5} \frac{f'}{\frac{\bar{\omega}'}{N} - \frac{1}{2}} = - 0,19325$$

Pour que f' soit $- 0,00193$ il faut que :

$$\frac{E I}{N^5} f' = - 0,0118$$

comme pour le tuyau réel

Donc :

$$\frac{\bar{\omega}'}{N} - \frac{1}{2} = \frac{0,0118}{0,19325} = 0,05786$$

Par conséquent un tuyau fictif ayant ce poids $\bar{\omega}'$ par cm² de surface interne, de même rayon (60 cm.) et de même $\frac{E I}{N^5}$ (5,8) que le tuyau réel, appuyé sur un berceau B₀B de même ouverture θ que celui du tuyau réel ($\frac{\bar{\omega}}{N} = 0,3425$) et entouré d'eau, aurait, en A, une flèche égale à celle du tuyau réel, mais de signe contraire.

Voyons quelle serait sa flèche f'' au point $\alpha = 1,62$. Elle est donnée pour $\alpha = 1,62$, $\theta = 0,4066$, avec les coefficients de C₁ ci-dessus, par (13) ; on trouve :

$$\frac{5,8}{0,0578} f'' = 0,10892$$

d'où :

$$f'' = + 0,001$$

Nous avons vu, dans la 1^{re} partie, que si, pour une conduite vide, le berceau B₀B est remplacé par un gaine circulaire indéformable, de même rayon, toute flèche disparaît. Le tuyau fictif s'appliquerait donc exactement sur la gaine.

On peut donc dire que le prolongement circulaire jusqu'en A de l'appui initial θ , produit sur la paroi une réaction d'appui telle que, pour $\frac{E I}{N^5} = 5,8$ et une flèche initiale $- 0,00193$ en

A, la flèche en $\alpha = 1,62$ passe de $+ 0,001$ à zéro.

Autrement dit, pour ce $\frac{E I}{N^5}$ et ce θ , si l'appui B A annule, en A, une flèche **0,00193**, il produit, au point $\alpha = 1,62$, une déformation de **sens contraire** se révélant par une flèche 0,001.

On peut donc en conclure, pour la conduite du premier exemple de $\gamma = \frac{\pi}{2}$, pour laquelle l'appui B A s'oppose à la formation de la flèche $+ 0,00193$ en A, ce qui équivaut à la formation d'une flèche $- 0,00193$, que en $\alpha = 1,62$, il modifiera de $+ 0,001$ la flèche qui y existerait en l'absence de l'appui B A.

Comme, avant de tenir compte de l'existence de la gaine de ciment au-delà de B, on avait trouvé au point $\alpha = 1,62$ une flèche $- 0,00108$, on peut en conclure que l'existence de cette gaine réduit cette flèche à

$$- 0,00108 + 0,001 = - 0,0008 \text{ cm.}$$

AUTRES APPLICATIONS DU MÊME PRINCIPE

En opérant de la même façon pour le deuxième exemple relatif à $\gamma = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\bar{\omega}}{N} = 0,27 \quad \theta = 0$$

$$\frac{E I}{N^5} = 2,08 \quad N = 70 \text{ cm.}$$

Maximum de la flèche positive en A où

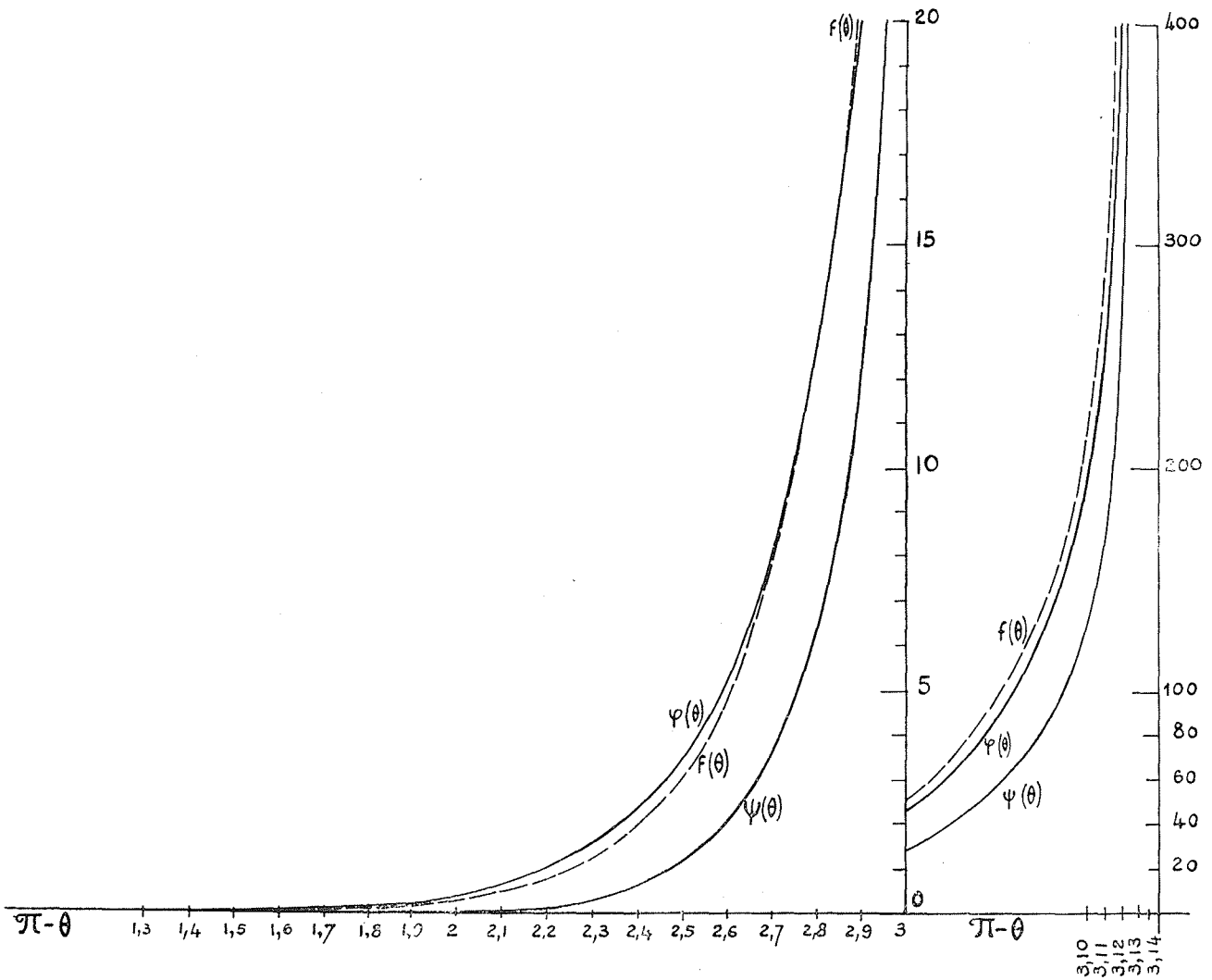
$$\frac{E I}{N^5} f = 0,03746, f = + 0,018.$$

Maximum de la flèche négative en $\alpha = 1,3675$

$$\text{où } \frac{E I}{N^5} f = - 0,02115, f = - 0,01015.$$

L'appui B₀A (fig. 1) ayant pour effet d'annuler, en A, une flèche $+ 0,018$, modifie la flèche négative maximum de $+ 0,0101$; elle la réduit donc à $- 0,00005$ cm.

— Pour le 3^e exemple relatif à $\gamma = \frac{\pi}{2}$, appui en haut :



I $f(\theta)$ $\varphi(\theta)$ $\psi(\theta)$

$$\frac{\bar{\omega}}{N} = 0,2055 \quad \theta' = 0$$

$$\frac{E I}{N^5} = 0,368 \quad N = 100 \text{ cm.}$$

Maximum de la flèche positive en B (fig. 2) où $\frac{E I}{N^5} f = 0,026, f = + 0,07.$

Maximum de la flèche négative en $\alpha' = 1,4425$ où $\frac{E I}{N^5} = - 0,01472, f = - 0,04.$

L'appui A_0B (fig. 2) ayant pour effet d'annuler en B, une flèche $+ 0,07$, modifie la flèche négative maximum de $+ 0,038$; elle le réduit donc à $- 0,002$ cm.

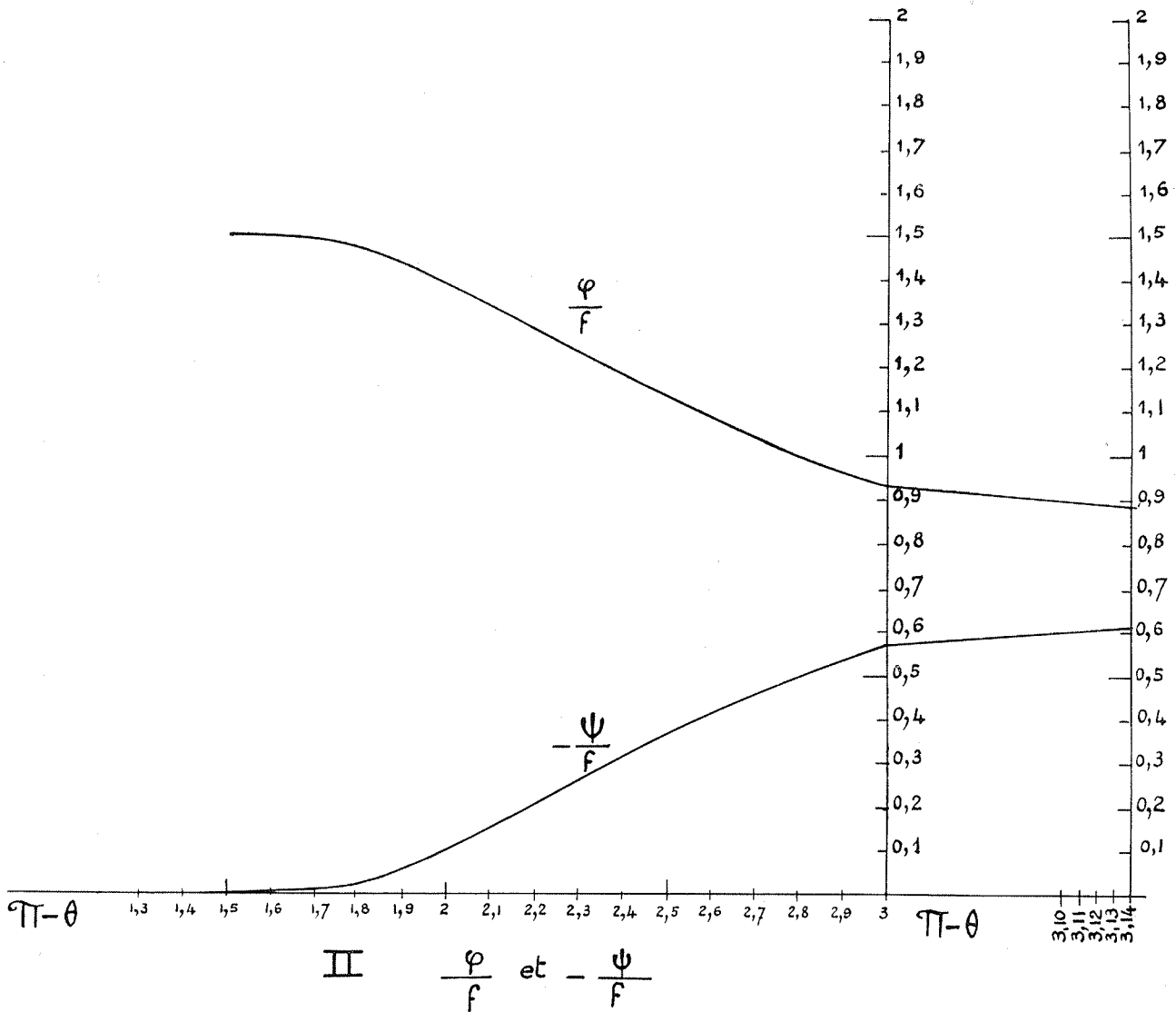
— Pour le 4^e exemple, relatif à $\gamma = \frac{\pi}{2}$, appui en haut :

$$\frac{\bar{\omega}}{N} = 0,15 \quad \theta' = 0,4556$$

$$\frac{E I}{N^5} = 0,133 \quad N = 100 \text{ cm.}$$

Maximum de la flèche positive en B (fig. 2) où $\frac{E I}{N^5} = 0,0098, f = + 0,0735.$

Maximum de la flèche négative en $\alpha' = 1,63$ où $\frac{E I}{N^5} = - 0,0058, f = - 0,0435.$



L'appui A B (fig. 2) ayant pour effet d'annuler en B, une flèche + 0,0735, modifie la flèche négative maximum de + 0,042 ; elle la réduit donc à — 0,0015 cm.

Conclusion. — Bien que l'ensemble des résultats obtenus dans des cas particuliers ne puisse être regardé comme constituant une loi générale, bien que nous ayons négligé les déformations provenant de l'effort tranchant, bien que nous ayons réservé pour le calcul du flambement la légère augmentation de l'intervalle entre les deux parois, provenant de la pression $P - p$, et que les considérations de la 2^e partie soient un peu osées, il semble bien résulter de la comparaison des flèches sur berceau avec celles dans gaine, que celle-ci les réduit au point qu'on peut les négliger dans le calcul du flambement.

APPENDICE
ANALOGIES ENTRE UNE PAROI RIGIDE
ET UN FRETAGE

Envisageons un frettage constitué par des anneaux à section rectangulaire en acier à haute limite élastique, enfilés sur chaque tronçon de tuyau, puis serrés sur lui par dilatation de la paroi entre plateaux d'une presse hydraulique, jusqu'à dépassement de la limite élastique de l'acier mi-doux de la conduite. Si l'épaisseur de chaque frette, parallèlement à l'axe, est faible et si le moment d'inertie de sa section, par un plan axial, est très grand, on pourra la considérer comme extrêmement peu influencée (1) par les déformations du tuyau résultant du poids de l'eau

(1) Il n'en est pas de même d'une bague de renforcement soudée sur le tuyau, dont les déformations suivent exactement celles de la paroi.

et de celui de la paroi ; d'autre part, la pression de l'eau extérieure n'a aucune action sur une frette puisqu'elle y est entièrement plongée.

Il y a donc bien une certaine analogie entre le frettage et une paroi en ciment.

Il est vrai que le serrage de la frette ajoute à la pression extérieure P une pression supplémentaire

$$\frac{T}{NL}$$

formule dans laquelle :

- T est la tension totale de la frette
- L le pas du frettage.

Mais cette surpression disparaît dès que la contraction de la paroi, sous l'effet de P , annule le serrage, c'est-à-dire quand P atteint la valeur résultant de :

$$PL = \frac{T}{N}$$

Si les frettes sont constituées par du câble, leur moment d'inertie est presque nul ; nous allons voir que, néanmoins, elles réagissent sur les flèches de la paroi du tuyau comme le ferait une gaine circulaire rigide.

En effet, la particularité d'une frette souple est de suivre les déformations par flexion transversale quand elles sont positives (flèches $+$), en épousant exactement leur forme, alors qu'elle tend vers la ligne droite en regard des flèches négatives.

Dans les exemples précédents relatifs à

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \text{ appelons } \rho \text{ le rayon de courbure moyen}$$

entre le point α de flèche nulle et le point $\alpha = \pi$ (ou $\alpha' = \pi$), quand la gaine extérieure, au-delà du point θ (ou θ') n'existe pas (1^{re} partie).

La pression produite par le frettage souple y est passée de $\frac{T}{N}$ à $\frac{T}{\rho}$; l'augmentation de cette pression q a donc été :

$$\Delta q = T \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{N} \right)$$

Le moment de flexion de la paroi étant :

$$EI \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{N} \right)$$

il en résulte :

$$\Delta q = \frac{C}{EI} T$$

alors que toute pression de frettage a disparu dans les zones à flèche négative, la frette souple n'y ayant plus contact avec la paroi.

Tout se passe donc comme si une gaine semi-rigide tendait à annuler les flèches positives.

Or, nous avons vu, dans les exemples précédents (2^e partie) que l'effet concomitant de cette annulation des flèches positives est une diminution des flèches négatives.

Le résultat sera donc analogue pour une gaine constituée par des frettes souples, tout au moins tant que T ne sera pas annulée, comme nous l'avons dit précédemment, par la contraction résultant de P extérieur.

Conclusion. — Il semble bien que, au moment où le flambage commencera à menacer, cette action bienfaisante des frettes souples subsistera ; certains essais paraissent avoir fourni une vérification de cette influence des frettes souples.

Néanmoins, la démonstration de ce phénomène reste à faire.