

Commentaires et Discussions

Comments and Discussions

SUR L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX INCOMPRESSIBLE ENTRE DEUX PLAQUES PARALLELES INDÉFINIES

ON THE FLOW OF AN INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLUID BETWEEN TWO INFINITE PARALLEL PLANES

English synopsis p. 437.

Dans mon article, je me proposais de dégager aussi nettement que possible le point précis où s'arrêtent les conséquences logiques des équations de REYNOLDS dans l'étude de l'écoulement turbulent d'un fluide visqueux incompressible entre deux plaques parallèles **indéfinies**. La théorie fournissant moins d'équations que d'inconnues, je soulignais que, pour achever l'étude, il était nécessaire de recourir à des équations supplémentaires fournies par l'expérience ; or, il est clair que, dans une étude expérimentale, le schéma des plaques indéfinies est irréalisable ; on ne peut faire de mesures qu'entre des **plaques finies**, avec l'espoir qu'en se plaçant suffisamment loin du bord d'attaque les résultats deviendront identiques à ceux de deux plaques infinies. La question se pose donc de savoir à quelle distance du bord d'attaque une allure asymptotique de l'organisation statistique de la turbulence sera atteinte avec une précision donnée ; pour répondre rigoureusement à cette question, il faudrait précisément faire l'étude de l'écoulement turbulent dans la **zone d'entrée** (c'est-à-dire, en comptant x à partir du bord d'attaque des plaques, pour des valeurs assez petites de $\frac{x}{a}$) ; or,

il est clair que, dans cette zone, les hypothèses sur l'organisation statistique de la turbulence deviendraient beaucoup plus compliquées que dans le cas des plaques indéfinies ; on ne pourra plus admettre que les six moyennes (4.07)

$$\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}, \overline{u'v'}, \overline{v'w'}, \overline{w'u}$$

sont indépendantes de x ; dans la zone d'entrée,

les équations de REYNOLDS contiendraient donc des termes qui en avaient disparu dans le cas des plaques infinies en vertu de l'hypothèse 4 : « l'organisation de la turbulence est la même dans tous les plans perpendiculaires à Ox . »

Malgré son importance certaine en vue des recherches expérimentales, jugeant qu'il n'était pas mûr pour être traité en partant des équations de REYNOLDS, je n'ai pas considéré le cas de la zone d'entrée de plaques parallèles finies. Dans sa note, c'est précisément ce cas que se propose d'aborder M. SPRONCK, mais dans une perspective bien différente de la mienne, se basant non pas sur les équations de REYNOLDS pour un écoulement turbulent, mais sur des hypothèses a priori, assez simples d'ailleurs, sur le profil des vitesses, hypothèses analogues à celles qu'on adopte souvent dans l'étude des couches limites laminaires. Le soin que M. SPRONCK a pris de traduire ses formules en un réseau de courbes, pourrait permettre à des expérimentateurs de vérifier si ses prévisions concernant la zone d'entrée sont d'accord avec les faits.

J. KAMPÉ DE FÉRIET.

*
**

Dans le N° 6 de novembre-décembre 1948 de « La Houille Blanche », M. KAMPÉ DE FÉRIET a publié une mise au point remarquable des méthodes d'étude du régime turbulent des fluides visqueux incompressibles, en traitant com-

plètement, à titre d'exemple, le cas de l'écoulement entre deux plaques parallèles.

Je voudrais, au sujet de ce problème, faire une remarque dont l'intérêt me paraît résulter des conclusions mêmes de l'analyse précitée. M. KAMPÉ DE FÉRIET montre en effet que les lois de PRANDTL et KARMAN ne sont que des solutions approchées, ayant une valeur expérimentale dans un certain domaine de variation du nombre de REYNOLDS. Or, on ne peut concevoir d'expériences que sur des plaques de longueur limitée, voire même relativement réduite. Il paraît donc utile d'être bien fixé sur les longueurs à atteindre pour que les plaques puissent être considérées comme de longueur indéfinie. De plus, il n'est pas sans intérêt de rattacher le problème actuel à celui de l'écoulement le long d'une seule plaque.

Les travaux de PRANDTL et de KARMAN sont en effet, comme le rappelle M. HALBRONN dans le même numéro de « La Houille Blanche », en partie relatifs au frottement superficiel le long d'une plaque mince au repos dans un fluide visqueux incompressible indéfini dont le mouvement à grande distance de la plaque est une

translation de vitesse uniforme U_0 parallèle à la plaque. A ce problème, BLASIUS avait apporté en 1904 une solution applicable au régime laminaire.

Le problème plan relatif à deux plaques minces et lisses, parallèles, distantes de $2a$, de largeur indéfinie et de longueur L dans un fluide visqueux incompressible animé du même mouvement, se différencie du problème précédent en raison des particularités suivantes :

a) A partir de l'arête d'entrée, le frottement sur les faces internes diffère nécessairement du frottement sur les faces externes. Si on admet, comme le fait M. KAMPÉ DE FÉRIET, la constance du débit entre les plaques, les diagrammes de variation des vitesses dans les deux cas présentent les différences indiquées figure 1.

b) Lorsque les vitesses entre les plaques atteignent la répartition qui restera invariable, le frottement devient constant sur les faces internes, ce qui entraîne d'ailleurs la nécessité d'un gradient de pression ; et la vitesse maximum atteinte dans le plan de symétrie reste supérieure à U_0 .

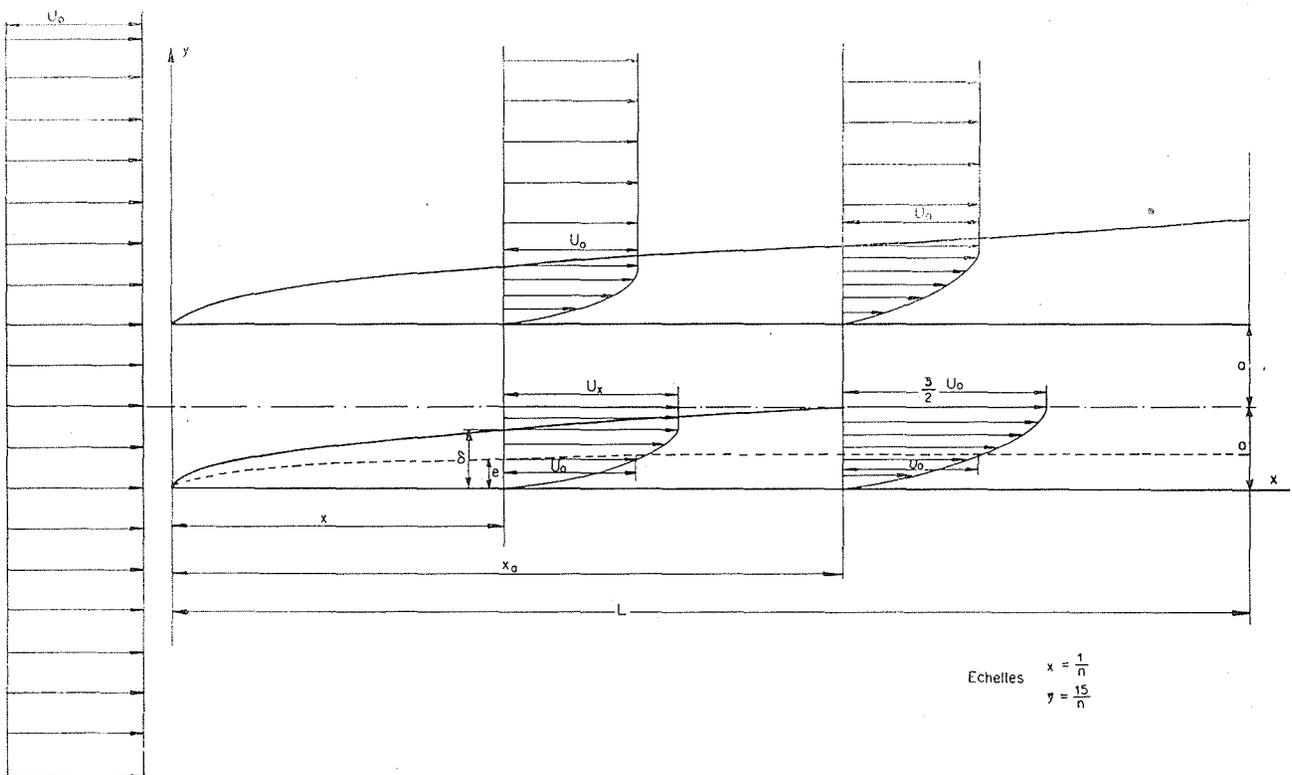


fig. 1

Écoulement laminaire le long de deux plaques minces parallèles.

Dans le cas d'un écoulement laminaire, on peut admettre que dans une section transversale située à la distance x de l'arête d'entrée :

$$u = U_x \frac{2\delta - y}{\delta} y$$

$$\frac{2}{3} U_x \delta + (a - \delta) U_x = U_0 a \text{ d'où } U_x = \frac{U_0}{1 - \frac{\delta}{3a}}$$

$$e = \delta \left(1 - \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right)$$

$$\int_0^e u dy = \frac{U_0 \delta (3\delta e^2 - e^3)}{3 \left(1 - \frac{\delta}{3a}\right) \delta^2} = \frac{U_0 \delta \left(1 - \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right) \left(2 + \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right)}{3 \left(1 + \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right)}$$

$$\int_0^e u^2 dy = \frac{U_0^2 (3e^5 - 15\delta e^4 + 20\delta^2 e^3)}{15 \delta^4 \left(1 - \frac{\delta}{3a}\right)^2} = \frac{U_0^2 \delta \left(1 - \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right)^3 \left(8 + 9\sqrt{\frac{\delta}{3a}} + 3\frac{\delta}{3a}\right)}{15 \left(1 + \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right)^2}$$

En admettant que la pression est la même dans chaque section de la couche d'épaisseur e et en appliquant le théorème des quantités de mouvement parallèlement à OX à la tranche comprise entre les deux sections d'abscisses x et x + dx, on obtient, pour a fini, les relations :

$$c_x = \frac{\tau_x}{\rho U_0^2} = \frac{1}{2} \frac{\rho U_0}{\rho U_0^2} x \frac{2\mu U_0}{\left(1 - \frac{\delta}{3a}\right) \delta} = \frac{4}{\left(\frac{U_0 a}{\nu}\right) \frac{\delta}{a} \left(1 - \frac{\delta}{3a}\right)}$$

$$= \frac{2}{15} \frac{d}{dx} \left[\frac{5\delta \left(1 - \frac{\delta}{3a}\right) \left(2 + \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right) - \delta \left(1 - \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right)^3 \left(8 + 9\sqrt{\frac{\delta}{3a}} + 3\frac{\delta}{3a}\right)}{\left(1 + \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{15} \left[15 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{3/2} - 24 \left(\frac{\delta}{3a}\right) - 18 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{1/2} + 16 + 10 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{-1/2} - \frac{42 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{-1/2}}{\left(1 + \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right)^2} + \frac{32 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{-1/2}}{\left(1 + \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right)^3} \right]$$

où ρ représente la masse spécifique du fluide et ν son coefficient cinématique de viscosité.

On déduit de ces relations, d'une part :

$$\frac{dx}{d\delta} = \frac{U_0 a}{60\nu} \left\{ \frac{\delta}{a} \left[-15 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{5/2} + 24 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^2 + 33 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{3/2} - 40 \frac{\delta}{3a} - 28 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{1/2} + 16 \right] + 3 \left[52 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{1/2} - 116 + \frac{180}{1 + \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{1/2}} - \frac{64}{\left[1 + \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{1/2}\right]^2} \right] \right\}$$

et

$$\frac{U_0 x}{\nu} = \left(\frac{U_0 a}{\nu}\right) x \frac{1}{30} \left\{ \frac{\delta^2}{a^2} \left[-\frac{15}{9} \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{5/2} + \frac{24}{8} \left(\frac{\delta}{3a}\right)^2 + \frac{33}{7} \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{3/2} - \frac{40}{6} \left(\frac{\delta}{3a}\right) - \frac{28}{5} \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{1/2} + \frac{16}{4} \right] \delta + 9 \left[\frac{52}{3} \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{3/2} - \frac{116}{2} \left(\frac{\delta}{3a}\right) + 180 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{1/2} - 244 L \left(1 + \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right) - \frac{64}{1 + \sqrt{\frac{\delta}{3a}}} + 64 \right] \right\}$$

et d'autre part :

$$C_x = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\tau_x dx}{\rho U_0^2} = \frac{2}{15x} \left[\frac{\delta \left(1 - \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right) \left(2 + 22 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{1/2} + 12 \frac{\delta}{3a} - 3 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^{3/2} - 3 \left(\frac{\delta}{3a}\right)^2\right)}{\left(1 + \sqrt{\frac{\delta}{3a}}\right)^2} \right]_0^\delta$$

Lorsque x atteint la valeur x_a pour laquelle atteint la valeur a, ces équations deviennent :

$$\frac{U_0 x_a}{\nu} = \frac{0,954}{30} \left(\frac{U_0 a}{\nu}\right)^2 = 0,0318 \left(\frac{U_0 a}{\nu}\right)^2$$

$$\text{et } C_{x_a} = \frac{0,403 a}{x_a} = \frac{2,26}{\sqrt{\frac{U_0 x_a}{\nu}}} = \frac{12,67}{\frac{U_0 a}{\nu}}$$

La relation qui doit exister entre a et L pour que l'écoulement corresponde au cas-limite où δ atteint précisément a à l'extrémité aval est donc :

$$\frac{U_0 L}{\nu} = 0,0318 \left(\frac{U_0 a}{\nu}\right)^2 \text{ ou } \frac{U_0 a}{\nu} = 5,6 \sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}}$$

Pour deux plaques de longueur L supérieure à x_a le coefficient de frottement vaut :

$$C_L = \frac{1}{L} \left[\frac{12,67 x_a}{\frac{U_0 x_a}{\nu}} + \frac{(L - x_a) 6}{\frac{U_0 x_a}{\nu}} \right] = \frac{6}{\frac{U_0 a}{\nu}} + 0,212 \frac{a}{L}$$

Pour qu'il ne diffère que de 1 % du coefficient $\frac{6}{U_0 a}$

$$\frac{L}{a} = \frac{0,212}{0,06} \frac{U_0 a}{\nu} = 3,53 \frac{U_0 a}{\nu} \text{ ou } \frac{U_0 L}{\nu} = 3,53 \left(\frac{U_0 a}{\nu}\right)^2$$

La figure 2, en coordonnées logarithmiques, résume ce qui précède et montre la situation des deux droites limites définies plus haut pour le régime laminaire.

Pour calculer les coefficients de frottement relatifs au cas de deux plaques de longueur L inférieure à x_a, on procède comme plus haut en considérant que δ n'atteint qu'une fraction déterminée de a à l'extrémité aval des plaques. En raison des hypothèses simplificatrices adoptées, on tend pour a croissant vers la valeur :

$$C = \frac{1,46}{\sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}}}$$

et non vers la valeur de BLASIUS :

$$C = \frac{1,327}{\sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}}}$$

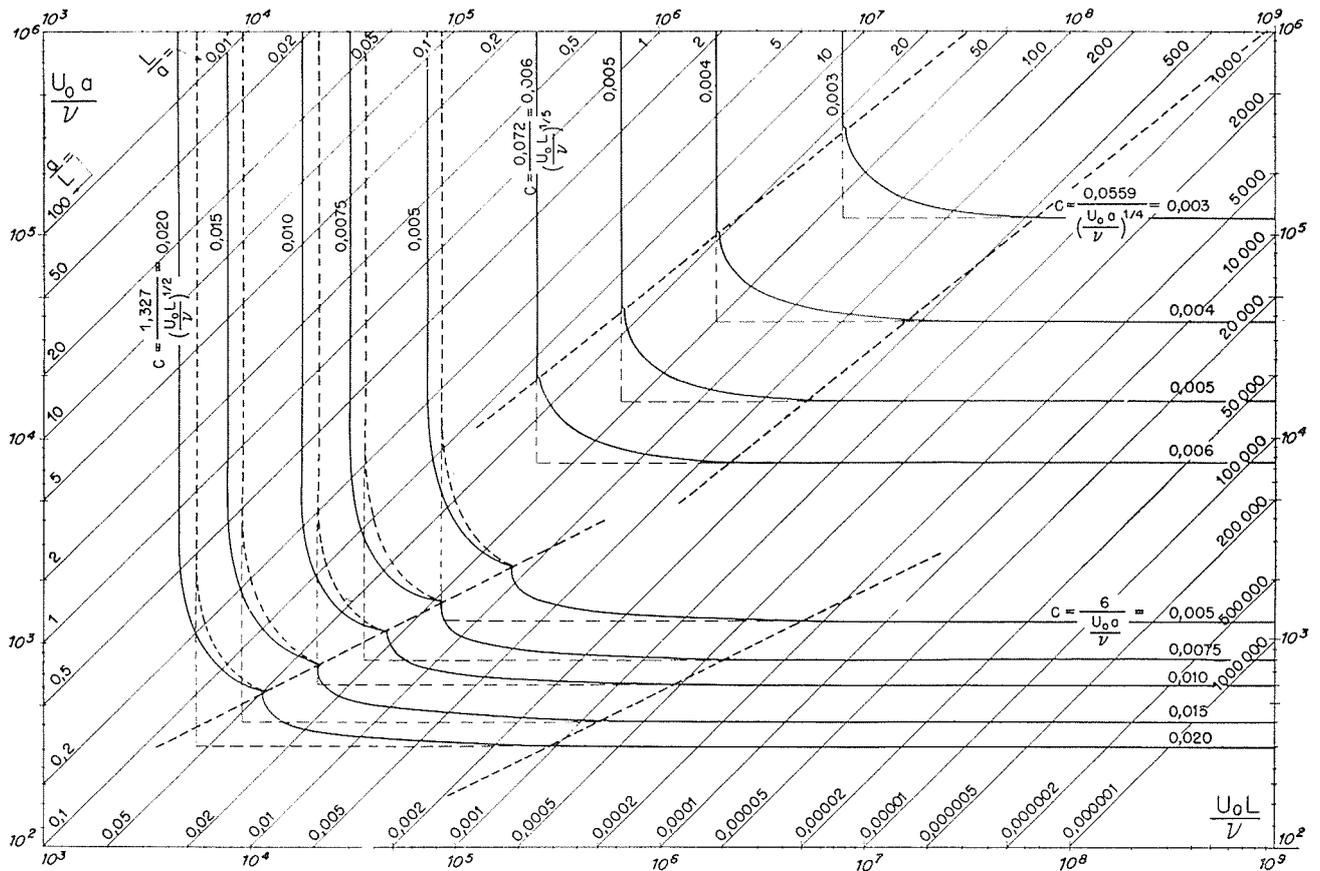


fig. 2

Écoulement entre deux plaques lisses parallèles indéfinies
 Diagramme des coefficients de frottement en régime laminaire
 et en régime turbulent.

Sur la figure 2, les courbes cotées correspondantes du coefficient de frottement ont été modifiées de manière à corriger approximativement cette erreur.

Les mêmes calculs effectués pour le mouvement moyen en régime turbulent, en utilisant par commodité non pas la loi logarithmique des vitesses et le coefficient de frottement correspondant, mais les lois approchées connues :

$$u = U_x \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$$

et : $\tau = 0,0225 \rho \nu^{1/4} \frac{U^{7/4}}{\delta^{1/4}}$

donnent la relation suivante qui doit exister entre a et L pour que δ atteigne précisément a à l'extrémité aval :

$$\frac{U_0 L}{\nu} = 1,07 \left(\frac{U_0 a}{\nu} \right)^{5/4}$$

Le coefficient de frottement correspondant à ce cas-limite est :

$$C_{x_a} = \frac{0,0724}{\left(\frac{U_0 x_b}{\nu} \right)^{1/5}} = \frac{0,0714}{\left(\frac{U_0 a}{\nu} \right)^{1/4}}$$

Pour deux plaques de longueur L supérieure à x_0 le coefficient de frottement vaut, si l'on admet en première approximation la valeur

$$0,0559$$

déduite de la formule de BLASIUS $\left(\frac{U_0 a}{\nu} \right)^{1/4}$

étendue au cas d'une conduite lisse non circulaire :

$$C_L = \frac{0,0559}{\left(\frac{U_0 a}{\nu} \right)^{1/4}} + 0,0166 \frac{a}{L}$$

Pour que le coefficient de frottement ne diffère que de 1 % du coefficient

$$\frac{0.0559}{\left(\frac{U_0 a}{\nu}\right)^{1/4}}$$

il faut que :

$$\frac{U_0 L}{\nu} = 30 \left(\frac{U_0 a}{\nu}\right)^{5/4}$$

La figure 2 montre également les droites-limites ci-dessus définies et les courbes cotées du coefficient de frottement relatives au régime turbulent.

Les régimes d'écoulement intermédiaires ont volontairement été omis pour ne pas compliquer la figure.

On voit que l'assimilation à l'écoulement entre deux plaques de longueur indéfinie exige en régime turbulent des valeurs de $\frac{L}{a}$ moindres qu'en régime laminaire, mais qui res-

tent de l'ordre d'au moins 300 pour des plaques lisses.

Des considérations analogues pourraient évidemment être développées au sujet de l'écoulement en conduites lisses de section circulaire, ainsi que j'ai tenté de le montrer dans un mémoire présenté au IV^e Congrès International de Mécanique Appliquée de Cambridge (1934).

Remarquons encore que le problème de l'écoulement entre deux plaques de grande largeur conduit directement à celui de l'écoulement à ciel ouvert dans un canal de grande largeur. Si on ne considère qu'une moitié de l'écoulement entre les deux plaques et si on suppose que la surface libre du fluide (qui remplace le plan de symétrie précédent) présente la pente appropriée, les conclusions précédentes restent valables pour le cas de l'écoulement uniforme dans un canal à paroi lisse de grande largeur et de profondeur a .

R. SPRONCK,
Professeur à l'Université de Liège.

