NOTULE HYDRAULIQUE
HYDRAULIC BRIEF

CALCUL DE L'AMORTISSEMENT D'UNE HOULE DANS UN LIQUIDE VISQUEUX DE PROFONDEUR FINIE

CALCULATION OF WAVE DAMPING IN A VISCOUS LIQUID OF KNOWN DEPTH

English synopsis p. 566

L'amortissement causé par la viscosité aux houles se propageant en profondeur infinie peut se calculer par une analyse relativement simple. Parmi les premiers auteurs qui ont traité cette question, il convient de citer : BOUSSINESQ (1), LAMB (2), BASSET (3) et HOUGH (4). Rappelons que le résultat auquel ces différents auteurs ont abouti est le suivant : si l'amplitude de la houle est partout la même mais varie avec le temps seulement, l'amplitude 2h au temps t est donnée par :

$$2h = 2h_0 \, e^{-2a^2 \nu t} \qquad (1)$$

$2h_0$ étant l'amplitude au temps $t = o$, a se déduisant de la longueur d'onde L par l'expression $a = \dfrac{2\pi}{L}$ et ν étant la viscosité cinématique.

On en déduit, par des considérations énergétiques, que si l'amplitude est constante dans le temps en un point donné, mais varie le long du parcours de la houle, elle est donnée par l'expression :

$$2h = 2h_0 \times e^{-4a^2 \nu \sqrt{\frac{a}{g}}\, x} \qquad (2)$$

h_0 étant l'amplitude au point d'abscisse $x = o$ et g étant l'accélération de la pesanteur.

Par contre, le problème de l'amortissement des houles en profondeur finie a été relativement moins étudié. Seuls, à notre connaissance, BASSET et HOUGH ont calculé le coefficient d'amortissement, mais ces deux Auteurs n'aboutissent pas à la même formule.

Ce problème présentant une grande importance pour la technique des modèles réduits, nous avons été amenés à reprendre les calculs de façon à savoir lequel de ces deux résultats était le bon. Or, nous avons abouti, non sans quelque inquiétude, à une troisième formule différant à la fois de celle de BASSET et de celle de HOUGH. C'est cette formule que nous voudrions présenter ici.

Il est clair que notre étude ne saurait être concluante si elle ne s'accompagnait pas d'une discussion des calculs antérieurs. Pour cela, nous commencerons par reproduire les étapes essentielles du calcul de BASSET en signalant le point où il a fait des approximations que nous croyons être injustifiées, puis nous rétablirons la suite des calculs, ce qui nous donnera de nouvelles formules. Après avoir comparé ces formules à celles de BASSET nous les comparerons à celles de HOUGH. Nous demanderons alors au lecteur de se reporter à l'article original pour pouvoir suivre notre exposé. Il serait en effet fastidieux de reproduire une deuxième fois un calcul complet et d'autre part nous pensons que le lecteur pourra facilement se procurer les Proceedings, alors que le livre de BASSET est épuisé et ne se trouve que dans peu de bibliothèques techniques.

Voici donc les étapes essentielles du Calcul de BASSET (aux notations près).

Lorsque le mouvement du liquide se fait dans deux dimensions et que les quantités de l'ordre du carré des vitesses sont négligeables, on sait

(1) Essai sur la théorie des eaux courantes.
(2) Traité d'Hydrodynamique, 6e édition, 1930.
(3) Traité d'Hydrodynamique, 1888.
(4) Proceed. of the London Math. Soc., 1877, vol. XXVIII, p. 264.

qu'il existe une fonction de courant de la forme

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \qquad (3)$$

où ψ_1 et ψ_2 satisfont respectivement à

$$\Delta \psi_1 = 0$$
$$\Delta \psi_2 - \frac{1}{\nu} \frac{\delta \psi_2}{\delta t} = 0 \qquad (4)$$

L'excédent de pression par rapport à la pression hydrostatique est donné par la différentielle totale :

$$d p = \rho \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta \psi_1}{\delta x} dz - \frac{\delta \psi_1}{\delta z} dx \right) \qquad (5)$$

soit encore, φ_1 étant la fonction conjuguée de ψ_1.

$$p = - \rho \frac{\delta \phi_1}{\delta t} + \text{cte} \qquad (5^{\text{bis}})$$

Dans le cas de vagues se propageant par une profondeur finie H, ψ peut se mettre sous la forme :

$$\psi = (A \operatorname{ch} az + B \operatorname{sh} az + C \operatorname{ch} \alpha z + D \operatorname{sh} \alpha z)\, e^{iax + Kt} \qquad (6)$$

L'axe Ox étant confondu avec la surface libre, l'axe Oz étant vertical ascendant et α étant déterminé par la relation :

$$\alpha^2 = a^2 + \frac{K}{\nu} \qquad (7)$$

Le but de notre étude est de rechercher la valeur (complexe) de K.

Les conditions qui doivent être satisfaites sur le fond sont :

$$\frac{\delta \psi}{\delta z} = 0 \text{ et } \frac{\delta \psi}{\delta x} = 0 \quad \text{pour} \quad z = -H \qquad (8)$$

H étant la profondeur de l'eau.

Si nous posons pour simplifier :

$$L = \operatorname{ch} aH, \; M = \operatorname{sh} aH, \; P = \operatorname{ch} \alpha H, \; Q = \operatorname{sh} \alpha H \qquad (9)$$

Ces conditions s'écrivent :

$$AL - BM + CP - DQ = 0 \qquad (10)$$
$$(AM - BL)\, a + (CQ - DP)\, \alpha = 0 \qquad (11)$$

En désignant par η (x) l'ordonnée de la surface libre, on a aussi :

$$\frac{\delta \eta}{\delta t} = - \left(\frac{\delta \psi}{\delta x} \right)_{z=0} = - i a (A + C)\, e^{iax + Kt} \qquad (12)$$

D'où l'on tire :

$$\eta + i a K^{-1} (A + C)\, e^{iax + Kt} = 0 \qquad (13)$$

D'autre part, l'expression de la pression est :

$$p = -g \rho z + K \rho i (A \operatorname{sh} az + B \operatorname{ch} az)\, e^{iaz + Kt} \qquad (14)$$

A la surface libre ($z = \eta$) on doit avoir une pression normale nulle, soit :

$$p + 2 \rho \nu \frac{\delta^2 \psi}{\delta x \, \delta y} = 0 \qquad (15)$$

ou :

$$A g \frac{a}{K} + B (2 a^2 \nu + K) + C g \frac{a}{K} + 2 D a \alpha \nu = 0 \qquad (16)$$

La condition d'effort tangentiel nul s'écrit elle

$$\frac{\delta^2 \psi}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 \psi}{\delta y^2} = 0$$

soit en tenant compte de (7)

$$2 A a^2 \nu + (2 a^2 \nu + K)\, C = 0 \qquad (17)$$

En éliminant A, B, C et D des équations (10), (11), (16) et (17), il vient :

$$\begin{vmatrix} 2a^2\nu, & L, & Ma, & \frac{ga}{K} \\ 0, & -M, & -La, & 2a^2\nu + K \\ 2a^2\nu + K, & P, & Q\alpha, & \frac{ga}{K} \\ 0, & -Q, & -P\alpha, & 2a\alpha\nu \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$

C'est cette équation qui définit la valeur de K.

Si l'on suppose avec BASSET que la viscosité est très faible, ce que nous ferons toujours par la suite, on peut négliger les termes en ν^2 dans le développement de ce déterminant ; il vient alors :

$$-2a^2\nu \left(PM\alpha g \frac{a}{K} - QLa^2 \frac{g}{K} + K\alpha\right)$$
$$+ (2a^2\nu + K) \left[- Qa \left(M (2a^2\nu + K) + L \frac{ga}{K} \right) + \right.$$
$$\left. + L\alpha \left(P (2a^2\nu + K) - 2a^2\nu \right) + Ma\alpha \left(P \frac{g}{K} + 2 Ma\nu \right) \right] = 0 \qquad (19)$$

BASSET remarque ensuite que puisque ν est petit, α est grand et que par conséquent on peut poser $\dfrac{P}{Q} = 1$.

« En divisant par Q, ajoute-t-il, on trouvera que les plus grands termes sont ceux qui comportent α en facteur. Donc, en ne retenant que les termes les plus importants, on trouvera que cette équation en K se réduit à » :

$$K^2 + 4Ka^2\nu + agth\,aH = 0 \tag{20}$$

On en déduit facilement (à des termes en ν^2 près) :

$$K = -2a^2\nu \pm i\sqrt{ag\,th\,aH} \tag{21}$$

La partie réelle représente le taux d'amortissement de la houle dont l'amplitude décroît comme $e^{-2a^2\nu t}$ et la partie imaginaire donne la fréquence angulaire dans le facteur $e^{i(ax \pm \sqrt{agthaH}\,t)}$. On voit que le taux d'amortissement a bien l'expression (1) et que la vitesse de propagation de la houle n'est pas modifiée par l'action de la viscosité.

Nous avons terminé l'exposé du calcul de BASSET ; maintenant voici notre critique.

Dans l'équation (20), qui se déduit de l'équation (19) par des suppressions de termes et une division par $Q\,\alpha\,L$, BASSET tient compte d'un terme en ν qui était donc de l'ordre de $\alpha\nu$, soit $\nu^{\frac{1}{2}}$, dans l'équation (19). Cependant il néglige complètement la première accolade du crochet qui **fournit pourtant des termes finis.** Donc, en toute logique, il serait même admissible de supprimer le terme en ν conservé par BASSET ($4Ka^2\nu$ dans l'équation (20)) et de ne tenir compte que des termes dont nous venons de souligner l'existence. Dans ce qui suit, nous conserverons cependant à la fois les termes en ν et ceux en $\nu^{\frac{1}{2}}$, ce qui, nous le verrons, aura l'avantage de donner une plus grande généralité aux formules que nous utiliserons. Il faut donc remplacer l'équation (20) par :

$$K^2\left(1 - \frac{a}{\alpha}\,th\,aH\right) + 4Ka^2\nu + ag\left(th\,aH - \frac{a}{\alpha}\right) = 0 \tag{22}$$

Quoique cette équation semble n'être que du second degré, nous ne pourrons la résoudre aussi simplement que l'équation (20), car il ne faut pas oublier que α n'est lui-même connu qu'en fonction de K. Pour résoudre à l'approximation voulue le système formé par les équations (22) et (7), nous y poserons :

$$K = K_0\left(1 + \beta\nu^{1/2} + \gamma\nu\right) \tag{23}$$

L'équation (22) devient alors, après élimination de α et rejet des termes d'ordre supérieur à ν :

$$\left[K_0^2 + ag\,th\,aH\right] + \left[K_0^2\left(2\beta - \frac{a}{\sqrt{K_0}}\,th\,aH\right) - \frac{a^2g}{\sqrt{K_0}}\right]\nu^{1/2}$$
$$+\left[K_0^2\left(\beta^2 + 2\gamma - \frac{3a}{2\sqrt{K_0}}\,th\,aH.\beta\right) + 4K_0a^2 + \frac{a^2g}{2\sqrt{K_0}}\beta\right]\nu = 0 \tag{24}$$

En écrivant que les coefficients entre crochets sont nuls, il vient successivement :

$$K_0 = \pm i\sqrt{ag\,th\,aH} = ib \tag{25}$$

(en posant $b = \pm\sqrt{ag\,th\,aH}$)

$$\beta = \frac{-a}{sh\,2aH\sqrt{K_0}} \tag{26}$$

$$\gamma = -2\frac{a^2}{K_0}\,\frac{ch\,4aH + ch\,2aH - 1}{ch\,4aH - 1} \tag{27}$$

On en déduit immédiatement :

$$K = ib - \frac{a\sqrt{K_0}}{sh\,2aH}\,\nu^{1/2} - 2a^2\,\frac{ch\,4aH + ch\,2aH - 1}{ch\,4aH - 1}\,\nu \tag{28}$$

Il ne nous reste plus qu'à remplacer K_0 par sa valeur (25), d'où l'on tire, en supposant par exemple b positif. ce qui revient à fixer le sens de propagation de la houle :

$$\sqrt{K_0} = \sqrt{\frac{b}{2}}\,(1+i) \tag{29}$$

On obtient alors :

$$K = ib\left(1 - \frac{1}{sh\,2aH}\sqrt{\frac{a^2\nu}{2b}}\right) - b\left(\frac{1}{sh\,2aH}\sqrt{\frac{a^2\nu}{2b}} + 2\frac{a^2\nu}{b}\,\frac{ch\,4aH + ch\,2aH - 1}{ch\,4aH - 1}\right) \tag{30}$$

Cette formule nous donne tout d'abord la célérité de la houle :

$$c = \frac{b}{a}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{sh} 2aH}\sqrt{\frac{a^2 \nu}{2b}}\right)$$

Nous voyons que celle-ci sera plus faible pour une même longueur d'onde que si la viscosité était inexistante, car, en ce cas, la célérité serait $\frac{b}{a}$. Le terme correctif sera d'ailleurs presque toujours négligeable.

Ensuite, la formule (30) nous donne le taux d'amortissement de l'amplitude qui est donnée en fonction du temps par :

$$2h = 2h_0\, e^{-\left[\frac{1}{\operatorname{sh} 2aH}\sqrt{\frac{a^2\nu}{2b}} + \frac{2a^2\nu}{b}\,\frac{\operatorname{ch} 4aH + \operatorname{ch} 2aH - 1}{\operatorname{ch} 4aH - 1}\right] bt}$$

Dans les liquides à viscosité très faible, comme l'eau le premier terme en $\sqrt{\nu}$ sera beaucoup plus grand que le second si la profondeur relative est modérée. Par conséquent, par faible profondeur, le taux d'amortissement sera sensiblement proportionnel à la racine carrée de la viscosité. Au contraire, en eau très profonde, on retrouve le résultat classique :

$$2h = 2h_0 \times e^{-2a^2\nu t}$$

Il est intéressant d'avoir une idée de la profondeur relative à partir de laquelle on peut utiliser cette dernière formule, beaucoup plus simple. Cherchons par exemple à déterminer la profondeur pour laquelle l'erreur ainsi commise n'est que de vingt pour cent. Pratiquement, cette condition s'exprimera par :

$$\frac{\dfrac{1}{\operatorname{sh} 2aH}\sqrt{\dfrac{a^2\nu}{2b}}}{\dfrac{2a^2\nu}{b}} < \frac{1}{5}$$

soit enfin :

$$\operatorname{sh} 2aH > \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2b}{a^2\nu}}$$

Cette profondeur relative dépend donc de la longueur d'onde. Considérons par exemple une longueur de 40 cm. ; il vient, en admettant la validité de la relation en eau profonde $b^2 = ag$ et une viscosité $\nu = 0{,}0124$ (eau à 12°) :

$$\operatorname{sh} 2aH > 355$$

On en tire la condition :

$$aH > 3{,}3 \quad \text{soit approximativement} \quad \frac{H}{L} > \frac{1}{2}$$

Nous voyons que même lorsque la profondeur est égale à la moitié de la longueur d'onde, auquel cas les mouvements sur le fond sont presque négligeables, il est tout de même nécessaire de tenir compte des frottements sur le fond. Il semble donc que la dissipation d'énergie due au frottement sur le fond a tendance à être beaucoup plus importante que celle due au frottement interne. Un autre exemple achèvera de préciser ce que nous avançons. Considérons cette fois-ci le cas d'une houle de 40 cm. se déplaçant par des fonds de 8 cm. Le rapport entre le taux d'amortissement effectif et celui donné par la formule de BASSET est alors de 12,5 environ. On voit que l'amortissement est en fait beaucoup plus rapide.

Ainsi l'erreur commise par BASSET est très importante dans une large gamme de cas pratiques. Il n'en est pas de même pour HOUGH. En effet, ce dernier n'a omis que des termes de l'ordre de ν, et il a tenu compte d'une façon complète des termes en $\nu^{\frac{1}{2}}$. D'une façon plus précise, on peut voir, en se reportant à son article, que c'est dans le second membre de la deuxième équation de la page 275, qu'il néglige des termes de l'ordre de ν. Or, ceci n'est pas légitime, puisque ces termes sont conservés dans le premier membre et dans le résultat qui, avec nos notations, s'exprime par la formule :

$$2h = 2h_0 \times e^{-\left[\frac{1}{\operatorname{sh} 2aH}\sqrt{\frac{a^2\nu}{2b}} + 2\,\frac{a^2\nu}{b}\right] bt}$$

La différence avec notre formule provient seulement du terme en ν où

$$\frac{\operatorname{ch} 4aH + \operatorname{ch} 2aH - 1}{\operatorname{ch} 4aH - 1}$$

est remplacé par l'unité. On voit immédiatement que, **sauf pour les profondeurs relatives très faibles,** l'erreur sur le terme en ν sera peu importante. Comme, de plus, dans le cas de l'eau, ce terme est lui-même faible par rapport au terme en $\nu^{\frac{1}{2}}$, l'erreur numérique sera négligeable dans un grand nombre de cas pratiques.

Ainsi que nous l'avons souligné, cette dernière conclusion n'est valable que pour des profondeurs relatives suffisamment importantes. En sera-t-il de même si l'on peut considérer a H comme très petit ?

Nous voyons immédiatement que dans ce cas le terme en ν du crochet devient approximativement :

$$\frac{1}{4\,(a\,H)^2}\;\frac{a^2\nu}{b}$$

alors que la formule de HOUGH lui conserverait la même valeur : $2\,\dfrac{a^2\nu}{b}$. Si aH est très petit, l'erreur sur le terme en ν peut donc être notable et si de plus la viscosité du fluide étudié n'est pas très faible, cette erreur influera d'une façon appréciable sur le résultat définitif.

Afin de donner quelques ordres de grandeur numériques, recherchons par exemple, dans le cas de l'eau à 12°, de viscosité $\nu = 0{,}0124$, pour quelle profondeur relative l'erreur sur le taux d'amortissement sera de 10 %. Cette condition s'exprimera avec une précision suffisante par :

$$\frac{\dfrac{1}{4(aH)^2}\;\dfrac{a^2\nu}{b}}{\dfrac{1}{2aH}\sqrt{\dfrac{a^2\,\nu}{2b}}} = \frac{1}{aH}\sqrt{\frac{a^2\,\nu}{2b}} = 0{,}1$$

Si nous introduisons dans cette équation la valeur classique de b pour les faibles profondeurs relatives, soit $b = a\sqrt{gH}$, il vient en définitive la condition :

$$(a\,H)^{5/4} = 7{,}07\;a^{3/4}\,\nu^{1/2}\,g^{-1/4}$$

On voit que l'erreur relative dépend non seulement de la profondeur relative, mais aussi de la longueur d'onde. En fixant celle-ci à 20 cm., on trouve que aH est peu différent de 0,1, ce qui montre que la profondeur doit être environ le soixantième de la longueur d'onde pour que l'erreur commise soit de l'ordre de 10 %.

Bien entendu, ainsi que nous l'avons signalé, dans un fluide plus visqueux la même erreur serait atteinte pour des profondeurs relatives moins faibles.

Remarquons encore que les formules que nous avons établies sont valables pour calculer l'amortissement des houles dont l'amplitude varie uniquement en fonction du temps et non de l'espace. Dans le cas contraire où l'amplitude est constante au cours du temps en un point donné, mais varie avec l'espace parcouru, l'amortissement des houles sera donné par la formule :

$$2h = 2h_0\,e^{-\frac{2}{1+\frac{2aH}{\operatorname{sh}2aH}}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}2aH}\sqrt{\frac{a^2\nu}{2b}}+\frac{2a^2\nu}{b}\,\frac{\operatorname{ch}4aH+\operatorname{ch}2aH-1}{\operatorname{ch}4aH-1}\right]ax}$$

ainsi qu'il serait aisé de s'en rendre compte en établissant un bilan énergétique.

Enfin, nous terminerons en soulignant que dans la nature le présent calcul ne devra être appliqué qu'avec précaution, car les mouvements à grande échelle sont en général turbulents, alors que nous les supposons laminaires. L'intérêt des formules obtenues n'est cependant pas uniquement théorique, car sur les modèles réduits, où l'étude de l'amortissement est primordiale, les conditions sont beaucoup plus voisines de celles permettant l'emploi d'une théorie laminaire. Nous n'insistons pas sur ce point, car une étude d'ensemble de ces derniers problèmes dépasserait de beaucoup le cadre de cette note, dont le but n'est que de faire connaître les formules auxquelles nous avons abouti.

F. BIESEL,

Ingénieur
au Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique.