

Commentaires et Discussions Comments and Discussions

NOTE SUR LA PROFONDEUR D'EAU A L'EXTRÉMITÉ D'UN DÉVERSOIR HORIZONTAL A CHUTE LIBRE

NOTE ON THE STREAM DEPTH AT THE EDGE OF A FREE OVERFALL

Commentant la note de M. A. CRAYA ⁽¹⁾ au sujet de la hauteur d'eau à l'extrémité d'un long déversoir, M. C. JAEGER ⁽²⁾ en a donné une approximation excellente, à partir de considérations relativement élémentaires sur la nature de la distribution des vitesses le long de la verticale à l'extrémité. Dans cette note, nous attirons l'attention sur cet aspect du problème et sur la nature de la solution de relaxation, donnée par M. R. V. SOUTHWELL ⁽³⁾ et M^{lle} G. VAISEY dans le cas de la chute libre avec maximum de débit pour une charge donnée.

Il n'est pas possible de donner une solution complète et définitive du problème, comme on le fait dans le cas du déplacement discontinu d'un liquide en présence d'un potentiel de gravité, à cause de la non-linéarité des conditions aux limites. Néanmoins, nous considérons ici la nature des transformations conformes appliquées au problème, dans la zone en question, lorsqu'on applique les méthodes utilisées pour de nombreux problèmes liés aux noms de HELMHOLTZ, KIRCHHOFF et RALEIGH.

In commenting on the note by M. A. Craya ⁽¹⁾ on a simple evaluation of the stream depth at the extremity of a long broad-crested weir, M. C. Jaeger ⁽²⁾ has given an excellent approximation to the nature of the velocity distribution along the vertical at the extremity from comparatively elementary considerations. In this note attention is brought to this aspect of the problem and on the nature of the relaxation solution given by M. R. V. Southwell ⁽³⁾ and M^{lle} G. Vaisey for the case of free waterfall, with maximum discharge for a given head.

A complete solution in closed form for the problem, as one in discontinuous fluid motion in the presence of a gravitational potential, is not possible, because of the non-linear boundary conditions. We shall however here consider the nature of the conformal transformations for the problem, in the region we are interested in, when an application is made of the methods used in a variety of problems associated with the names of Helmholtz, Kirchhoff, and Raleigh.

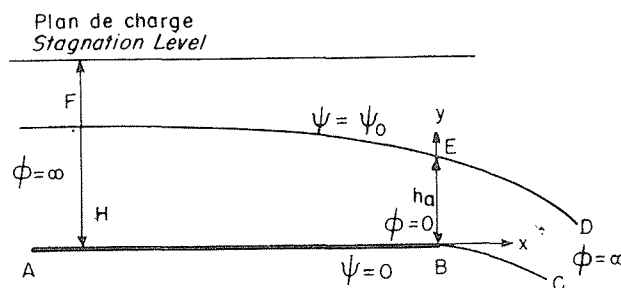


Fig.1 — Plan Z. — Z plane.

(1) A. CRAYA : « La Houille Blanche », mars-avril 1948, p. 185.
 (2) C. JAEGER : « La Houille Blanche », novembre-décembre 1948, page 518.
 (3) R. V. SOUTHWELL : Relaxation Methods in Theoretical Physics, 1946, page 224.

Supposons que la fig. 1 représente le plan complexe de z , $z = x + iy$, l'axe x étant horizontal, l'axe y vertical et l'origine au bord du déversoir ; la ligne d'écoulement $\Psi = 0$ forme le fond fixe Ab , et la surface libre inférieure BC ; la ligne d'écoulement $\Psi = \Psi_0$ forme la surface libre supérieure. Comme d'habitude, nous représentons la charge par H , et la profondeur d'eau à l'extrémité du déversoir par h_0 .

Let Fig. 1 represent the complex z -plane, $z = x + iy$, with x -axis horizontal, and y -axis vertical and origin at the edge of the overfall, and with the stream line $\Psi = 0$ forming the fixed bed Ab , and the lower free surface BC ; the stream line $\Psi = \Psi_0$ forms the upper free surface for the problem. We represent, as usual, the total head by H , and the stream depth at the edge of the overfall by h_0 .

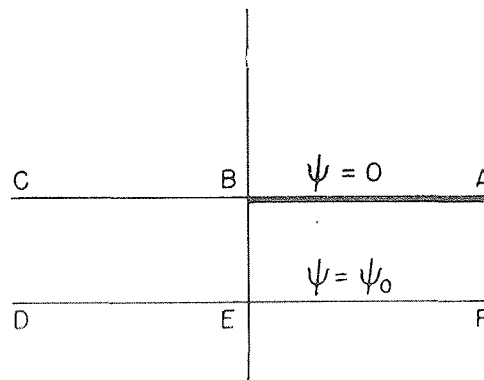


Fig. 2 - Plan w . - w plane
Note Ψ_0 est négatif - Ψ_0 is negative

Supposons que $w = \Phi + i\Psi$ soit le potentiel complexe représentant l'écoulement, la zone d'écoulement dans le plan z est donc représentée par une bande parallèle infinie dans le plan w (fig. 2). Avec $\Omega = \log dz/dw = \log 1/q + i\theta$ (q représentant la vitesse et θ l'angle de la vitesse), le fond AB devient une partie de l'axe $\theta = 0$, et, en partant de la ligne $\theta = 0$, les surfaces libres BC et BD tendent asymptotiquement vers $\theta = \pi/2$, $\log 1/q = -\infty$. Au point de discontinuité B où l'écoulement libre quitte la surface AB , on trouve un point de même nature que dans les problèmes de surfaces libres rencontrés habituellement en écoulements plans à potentiel. La ligne BC coupe donc AB à angle droit (fig. 3).

Let $w = \Phi + i\Psi$ be the complex potential for the case, so that the region of flow in the z -plane is represented in the w -plane as a parallel infinite strip. (Fig. 2).

With $\Omega = \log dz/dw = \log \frac{1}{q} + i\theta$, q representing the velocity, and θ the direction of flow, the fixed bed AB is transformed into a part of the axis $\theta = 0$, while the free surfaces BC and BD , starting from the line $\theta = 0$, asymptotically approach $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\log \frac{1}{q} = -\infty$. The point of discontinuity B where the free stream first leaves the surface AB has the nature of the free surfaces usually met in plane potential problem, cutting the line AB at right angles (Fig. 3).

La transformation de la zone d'écoulement en un demi-plan est donnée par le plan t dans la fig. 4, où les points C et D sont choisis à $t = +\infty$ et $-\infty$, A et F à $t = 0$, et B à $t = 1$. Près du point B , la nature de la transformation de Ω à t est donnée par :

The transformation of the region of flow into a half-plane is given by the t -plane in fig. 4, where the points C and D are chosen at $t = +\infty$ and $-\infty$, A , F , at $t = 0$, and B at $t = 1$. Near the point B , the nature of the transformation of Ω to t is given by

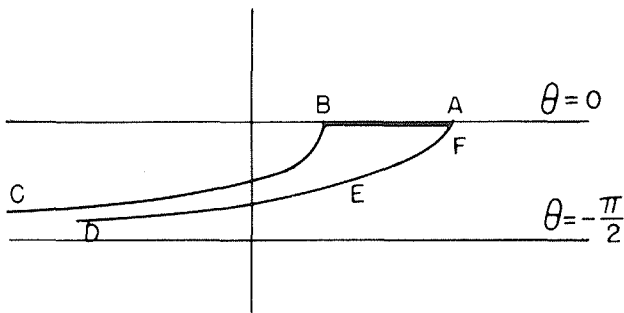


Fig. 3 - Plan Ω . - Ω plane.

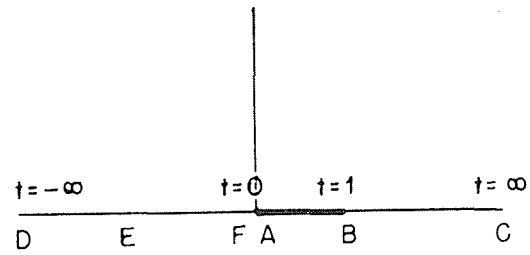


Fig. 4 - Plan t . - t plane.

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{f(t)}{(t-1)^{1/2}} \quad (1)$$

ce qui fait que

$$\Omega - \Omega_B = f_1(t) (t-1)^{1/2} \quad (2)$$

où $f(t)$, $f_1(t)$ sont des fonctions réelles de t , régulières au point $t = 1$, et Ω_B est la valeur de Ω en B.

La relation $w - t$ s'en déduit directement :
 $w = w_0 \log t$, $w_0 = \Psi'_0/\pi$ (3)

Cela donne la relation entre z et t :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{w_0}{t} e^{\Omega_B + f_1(t) (t-1)^{1/2}} \quad (4)$$

dont l'intégrale près de $t = 1$ est donc équivalente à :

$$z \approx w_0 e^{\Omega_B} (t-1) \left[1 + \frac{2}{3} f_1(1) (t-1)^{1/2} \right] \quad (5)$$

avec $z = 0$ en B. De cela nous tirons la relation $z - t$ qui, en étant utilisée dans l'expression pour dz/dw , donne

$$\frac{dz}{dw} \approx \frac{1}{q_0} e^{f_1(1) \left(\frac{z q_0}{w_0}\right)^{1/2}} - \frac{1}{3} \left[f_1(1) \left(\frac{z q_0}{w_0}\right)^{1/2} \right]^2 \quad (6)$$

avec $q_0 = e^{-\Omega_B} =$ vitesse en B $= \sqrt{2gH}$ (7)

Sur la ligne $z = 0 + iy$, c'est-à-dire sur la verticale du bord du déversoir, cela donne :

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{q_0} e^{f_1(1) \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1/2} \cos \frac{\pi}{4}} - \left\{ f_1(1) \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1/2} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \left[f_1(1) \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1/2} \right]^2 \right\} i \quad (8)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{f(t)}{(t-1)^{1/2}} \quad (1)$$

so that

$$\Omega - \Omega_B = f_1(t) (t-1)^{1/2} \quad (2)$$

where $f(t)$, $f_1(t)$ are real functions of t regular at $t = 1$, and Ω_B is the value of Ω at B.

The $w - t$ relation directly follows as $w = w_0 \log t$, $w_0 = \Psi'_0/\pi$ (3)
 This gives the relation between z and t as

whose integral near $t = 1$ is therefore approximated to

with $z = 0$ at B. From this we get the $z - t$ relation, which when used in the expression for dz/dw gives

with $q_0 = e^{-\Omega_B} =$ velocity at B $= \sqrt{2gH}$. (7)

On the line $z = 0 + iy$, i.e., on the vertical line at the edge of the overfall, this gives

où nous avons posé $y_0 = -w_0 e^{\Omega_B} = -w_0/q_0$

Puisque $\log dz/dw = \log 1/q + i\theta$, nous obtenons, sur $z = 0 + iy$:

$$\frac{q}{q_0} = e^{-\alpha \left(\frac{y}{h_0}\right)^{1/2}} \tag{9}$$

et

$$-\theta = \left[\alpha \left(\frac{y}{h_0}\right)^{1/2} - \frac{2}{3} \alpha^2 \left(\frac{y}{h_0}\right) \right] \tag{10}$$

où nous avons écrit $\alpha = f_1(1) \sin \pi/4 \left(\frac{h_0}{y_0}\right)^{1/2}$

Si nous intégrons (6) le long de la ligne $z = 0 + iy$, et si nous prenons pour partie imaginaire de w : $i\Psi'_0$, en traitant le deuxième terme de l'exposant comme un terme de correction et en le développant seulement jusqu'au premier ordre, après quelques calculs faciles à suivre,

nous arrivons à $-\frac{\Psi'_0}{q_0 h_0} = F(\alpha)$, où

$$F(\alpha) = e^{-\alpha} \left\{ \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{(\tan \alpha - \alpha) \cos \alpha}{\alpha^2} + \left[2(\alpha + 1) \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha^2} - \frac{2}{3} \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) \right] \right\}$$

En posant $-\Psi'_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} gH H$, $q_0 = \sqrt{2gH}$,

le membre de gauche s'écrit :

$$-\frac{\Psi'_0}{q_0 h_0} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{H}{h_0} \frac{H - h_0}{H}$$

De (9) nous tirons : $e^{-2\alpha} = \frac{H - h_0}{H}$, ce

qui fait que l'équation qui détermine α , et, par conséquent, h_0/H , devient :

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} = (1 - e^{-2\alpha}) F(\alpha) \tag{11}$$

Cette équation est un peu plus compliquée que celle de M. JAEGER, et donne approximativement $\alpha = 0,33$, $h_0/H = 0,48$, donc les mêmes valeurs que la sienne, et n'y apporte donc pas d'amélioration.

On remarque que (9) donne l'excellente approximation de M. JAEGER à partir de considérations relativement élémentaires.

where we have put $y_0 = -w_0 e^{\Omega_B} = -w_0/q_0$

Since $\log dz/dw = \log 1/q + i\theta$ we get, therefore, on $z = 0 + iy$:

$$\frac{q}{q_0} = e^{-\alpha \left(\frac{y}{h_0}\right)^{1/2}} \tag{9}$$

and

$$-\theta = \left[\alpha \left(\frac{y}{h_0}\right)^{1/2} - \frac{2}{3} \alpha^2 \left(\frac{y}{h_0}\right) \right] \tag{10}$$

where we have written $\alpha = f_1(1) \sin \frac{\pi}{4} \left(\frac{h_0}{y_0}\right)^{1/2}$

If we integrate (6) along the line $z = 0 + iy$, and take the imaginary part of w as $i\Psi'_0$, treating the second term in the exponent as a correction term, up to the first order only, after a little calculation which is easily followed, we get

$-\frac{\Psi'_0}{q_0 h_0} = F(\alpha)$, where

$$F(\alpha) = e^{-\alpha} \left\{ \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{(\tan \alpha - \alpha) \cos \alpha}{\alpha^2} + \left[2(\alpha + 1) \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha^2} - \frac{2}{3} \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) \right] \right\}$$

Writing $-\Psi'_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} gH H$, $q_0 = \sqrt{2gH}$,

the left hand side is

$$-\frac{\Psi'_0}{q_0 h_0} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{H}{h_0} \frac{H - h_0}{H}$$

From (9) we have $e^{-2\alpha} = \frac{H - h_0}{H}$, so that

the equation which determines α and therefore h_0/H becomes

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} = (1 - e^{-2\alpha}) F(\alpha) \tag{11}$$

This equation is slightly more involved than the one given more simply by M. JAEGER, and gives approximately $\alpha = 0.33$, $\frac{h_0}{H} = 0.48$ the same as given by him, over which there is no improvement.

Avec $\alpha = 0,33$, (10) donne $\theta = 0,257$ radians = $14^{\circ}42'$. La concordance est meilleure que celle qu'il donne, mais cela n'est pas très important. puisque la concordance que donne sa valeur $\theta = 12^{\circ}30'$ est suffisante pour une approximation.

Si dans l'intégrale de (6) le long de la ligne $z = 0 + iy$, nous négligeons le deuxième terme petit de l'exposant, nous obtenons, comme valeurs Ψ' :

$$\Psi' = \Psi'_0 F_0(z_1)/F_0(z) \quad (12)$$

où

$$F_0(\alpha_1) = e^{-\alpha_1} \cdot \alpha_1 \left[\sin \alpha_1 + \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} - \cos \alpha_1 \right) \right]$$

et
$$z_1 = z \left(\frac{y}{h_0} \right)^{-1/2}$$

and
$$z_1 = z \left(\frac{y}{h_0} \right)^{1/2}$$

Si nous prenons les valeurs de z_1 , données approximativement par

If we take the values of z_1 given approximately by

$$y/\frac{2}{3}H = 0, 0,25, 0,50 \text{ et } h_0/\frac{2}{3}H, \text{ avec } h_0/\frac{2}{3}H = 0,70$$

alors $\Psi' = 0, 0,400 \Psi'_0, 0,755 \Psi'_0, \Psi'_0$ pour ces quatre valeurs.

then $\Psi' = 0, 0,400 \Psi'_0, 0,755 \Psi'_0, \Psi'_0$ at these four values.

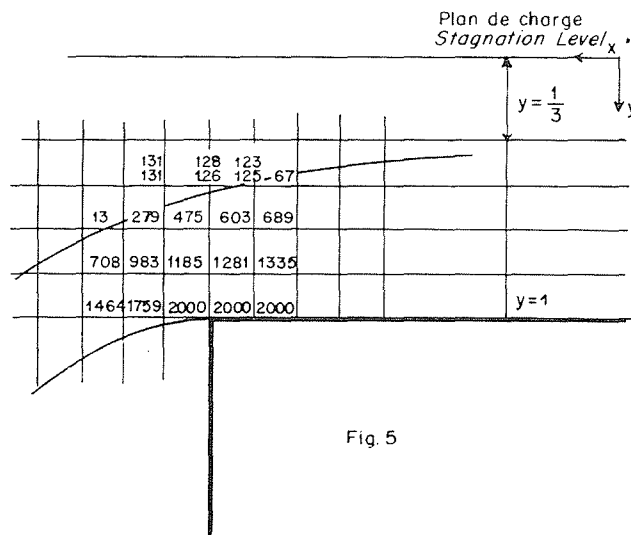


Fig. 5

En comparant le cas présent, où Ψ' varie de $\Psi' = \Psi'_0$ à $\Psi' = 0$, à la solution donnée par M. SOUTHWELL et M^{lle} VAISEY, où Ψ' varie de $\Psi' = 0$ à $\Psi' = 2000$, on obtient 2000, 1200, 490, 0.

Dans la solution de relaxation on trouve 2000,

Corresponding to the solution given by M. Southwell and M^{lle} Vaisey, with Ψ' ranging from $\Psi' = 0$ to $\Psi' = 2000$, where correspondingly Ψ' used here varies from $\Psi' = \Psi'_0$ to $\Psi' = 0$, these give 2000, 1200, 490, 0. In the relaxation solution those are 2000, 1185, 475, 0

1185, 475, 0, comme le montre le réseau de relaxation donné ici (fig. 5) où les nombres inscrits aux nœuds représentent les valeurs locales de Ψ' , et les nombres à la surface représentent les valeurs calculées de \sqrt{y} (au-dessus) et de $\frac{\partial \Psi'}{\partial y}$

—, dérivée normale (au-dessous), chacune

multipliée par $100 \sqrt{3}$, y étant mesuré vers le bas à partir du plan de charge, avec $H = 1$.

Les vitesses au point le plus haut au bord sont

$$100\sqrt{3} \frac{\partial \Psi'}{\partial y} = 126$$

et

$$100\sqrt{3} \frac{\sqrt{y}}{h_a} = 128$$

La valeur de $\frac{h_a}{2H/3}$ dans ce réseau est donc

0,681, tandis que celle qui correspond à la vitesse donnée par $100\sqrt{3} \frac{\partial \Psi'}{\partial y} = 126$ est

$\frac{h_a}{2H/3} = 0,705$. Il est donc probable que nous

pourrions prendre $\frac{h_a}{2H/3} = 0,69$ comme une

estimation de ce rapport de cette solution de relaxation, dont la précision atteint 1 %.

La note ci-dessus n'est intéressante que si l'on peut traiter le problème comme un écoulement plan potentiel. On remarque que les valeurs obtenues par la considération du potentiel de gravité seulement sont probablement inférieures à celles de M. ROUSE ⁽⁴⁾ d'un peu plus de 1 %. Cette différence est d'un ordre de grandeur qui peut être expliqué par la croissance de la couche limite. Il faudrait donc, pour obtenir une meilleure concordance entre les résultats de MM. JAEGER et CRAYA et la solution obtenue par M. ROUSE, prendre en considération cette croissance de la couche limite et la grandeur des

petits écarts de $\frac{h_a}{2H/3}$ autour d'une valeur

constante 0,715, écarts qui doivent exister, mais qui sont sans doute sans importance dans les limites de la précision demandée pour la mesure des gros débits.

as shown in the relevant part of the relaxation net produced here (fig. 5), in which the numerals at the nodal points represent the local Ψ' value, and numbers at the surface represent the computed values of \sqrt{y} (above) and $\frac{\partial \Psi'}{\partial y}$

— = the differential along the normal

(below), both multiplied by $100 \sqrt{3}$, y being measured downwards from the stagnation level, with $H = 1$.

The velocities at the highest point on the edge are given as

$$100\sqrt{3} \frac{\partial \Psi'}{\partial y} = 126$$

and $100\sqrt{3} \frac{\sqrt{y}}{h_a} = 128$

The actual value of $\frac{h_a}{2H/3}$ in this network

is therefore 0.681 while that corresponding to a

velocity given by $100 \sqrt{3} \frac{\partial \Psi'}{\partial y} = 126$ is $\frac{h_a}{2H/3} = 0.705$. We may therefore probably

take $\frac{h_a}{2H/3} = 0.69$ as an estimate for this

ratio from this relaxation solution whose accuracy is up to 1 %.

The foregoing note will be of interest only as far as the problem can be treated as a plane potential problem. The values obtained from the considération of the gravity potential only should be recognized as probably less than M. Rouse's ⁽⁴⁾ value by somewhat over one percent. This difference is of the order of values obtained from the growth of the boundary layer, and agreement with M. Rouse's value more than what M. Jaeger and M. Craya mention, therefore, would need the consideration of the boundary layer growth, and magnitudes of the small departures of $\frac{h_a}{2H/3}$ from a constant value 0.715,

which must be present but which are probably not of importance as far as accuracy needed for metering large flows is concerned.

S. K. ROY,

Department of Fluid Mechanics,
University of Liverpool.

(4) H. ROUSE : Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers, p. 325.