Film turbulent dans les conduites. Confirmation de l'hydraulique par la transmission de la chaleur

Turbulent film in pipes : the confirmation of hydraulics by heat transmission

PAR ROBERT G. LEGENDRE

INGÉNIEUR EN CHEF DU GÉNIE MARITIME

English synopsis p. 194

La loi logarithmique de distribution de la vitesse moyenne du régime turbulent dans une conduite circulaire est habituellement raccordée avec discontinuité de courbure à la loi de distribution de vitesse dans le film, supposé laminaire. La constante à l'origine de la loi expérimentale ne correspond pas à une telle hypothèse et il faut introduire une seconde constante, en plus du coefficient de Von KARMAN, pour représenter correctement les résultats.

Nous proposons, ci-après, une loi qui ne contient pas d'autre coefficient empirique que celui de Von KARMAN et qui représente, de manière assez satisfaisante, les résultats expérimentaux de NIKURADSE, même dans une transition bien continue entre le film et la zone franchement turbulente.

MM. RIBAUD et BRUN (1) ont fait observer que le parallélisme des lois de frottement et de transmission de chaleur permet de confirmer les unes par les autres. Pour les liquides peu visqueux, les mesures de frottement peuvent dispenser de mesures de transmission de chaleur qui sont peu précises. Par contre, les mesures de transmission de chaleur dans les fluides visqueux, même imprécises, permettent d'accéder à une connaissance de la distribution de vitesse dans le film qui a une influence déterminante sur la convection.

(1) *Mém. des Sc. Phys.*, XLVI, 1942.

La loi que nous proposons s'écarte davantage des résultats expérimentaux de NIKURADSE que les lois de Von KARMAN et de PRANDTL lorsqu'elle est extrapolée vers le noyau central de la conduite.

Rappel de la loi réduite de frottement (2)

Le calcul des valeurs moyennes des termes de l'équation de quantité de mouvement parallèle à l'axe conduit à la relation :

$$-\frac{y}{\rho}\frac{d\overline{p}}{dx} = \frac{d}{dy}(y\,\overline{uv}) - \frac{2\nu}{D}\frac{d}{dy}\left(y\,\frac{d\overline{u}}{dy}\right)$$

où :

ρ désigne la masse spécifique,

ν la viscosité cinématique,

D le diamètre de la conduite,

$\frac{d\overline{p}}{dx}$ le gradient de pression moyen dans le sens axial,

$\overline{uv}$ la valeur moyenne du produit des composantes axiale et radiale de la vitesse,

$\frac{d\overline{u}}{dy}$ la pente de la loi de distribution de vitesse,

y le rapport du rayon au point où la loi est appliquée au rayon de la conduite D/2.

(2) *La Houille Blanche*, n° 1, 1948.

La loi ci-dessus peut être intégrée :

$$-\frac{y}{2\rho}\frac{d\overline{p}}{dx}=\overline{uv}-\frac{2\nu}{D}\frac{d\overline{u}}{dy}$$

et réduite par division des deux membres par la constante :

$$u_*^2=-\frac{1}{2\rho}\frac{d\overline{p}}{dx}=-\frac{2\nu}{D}\frac{d\overline{u}}{dy_0}$$

l'indice zéro signifie que la pente est relevée à la paroi de la conduite.

$$y=\frac{\overline{uv}}{u_*^2}-\frac{2\nu}{Du_*^2}\frac{du}{dy}$$

Les deux termes du second membre sont fonction de y et du nombre de REYNOLDS $\mathcal{R}$ ou de son inverse ε.

$$\mathcal{R}=\frac{1}{\varepsilon}=\frac{u_*D}{\nu}$$

$$\frac{\overline{uv}}{u_*^2}=h\,(y\,,\,\varepsilon)$$

$$-\frac{2\nu}{Du_*^2}\frac{d\overline{u}}{dy}=g\,(y\,,\,\varepsilon)$$

ou, encore, en introduisant la vitesse réduite u_+ et la distance réduite à la paroi y_+ :

$$u_+=\frac{\overline{u}}{u_*}$$

$$y_+=\frac{1}{2\varepsilon}\quad(1-y)$$

$$\frac{\overline{uv}}{u_*^2}=h\,(y_+\,,\,\varepsilon)$$

$$-\frac{2\nu}{Du_*^2}\frac{d\overline{u}}{dy}=\frac{du_+}{dy_+}=g\,(y_+\,,\,\varepsilon)$$

Et l'équation de quantité de mouvement réduite prend la forme :

$$1-2\varepsilon y_+=h+g.$$

Loi complémentaire

La loi de pente réduite $g\,(y_+\,,\,\varepsilon)$ peut être déterminée si l'on dispose d'une relation complémentaire entre les fonctions g et h. La loi de variation de la longueur moyenne de mélange introduite par PRANDTL a déjà fourni des résultats précieux à ce sujet. La loi de Von KARMAN est équivalente, à distance assez modérée de la paroi, pour que $2\varepsilon y_+$ soit négligeable auprès de 1, mais suffisamment forte pour que g soit négligeable auprès de h, à la relation :

$$\frac{d}{dy_+}\left(\frac{h^m}{g}\right)=kh^n$$

où k est la constante universelle de Von KARMAN et m, n des constantes arbitraires.

Puisque nous n'envisageons pas d'extrapoler la loi vers le noyau central, nous pouvons négliger $2\varepsilon y_+$ auprès de 1 dans la discussion ci-après ou plus exactement n'étudier que la loi limite pour $\varepsilon=0$. Les fonctions h et g ne dépendent alors que de y_+.

Si m et n sont choisis nuls, la loi est celle de Von KARMAN, mais g ne peut pas être choisi égal à 1 à la paroi pour une représentation correcte des résultats expérimentaux.

Si $(m-n)$ est choisi positif, la fonction h, qui correspond à la turbulence, peut être prise nulle à la paroi et se comporte au voisinage de la paroi comme :

$$h\simeq\left(\frac{m-n}{m}\;ky_+\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

Si l'on admet que les trois composantes de la vitesse u, v, w, sont régulières à la paroi, elles peuvent être développées en séries en fonction de y_+ avec des coefficients aléatoires :

$$u=u_1\,(x\,,\,\theta\,,\,t)y_+ + u_2\,(x\,,\,\theta\,,\,t)y_+^2+\dots$$

. . . .

ou θ est l'angle méridien et t le temps.

On trouvera, en substituant dans l'équation de continuité :

$$v_1=0$$

$$v_2=-\frac{\partial u_1}{\partial\,(x/D)}-\frac{1}{2}\frac{\partial w_1}{\partial\theta}$$

Et la valeur moyenne du produit uv a pour premier terme :

$$-\frac{1}{2}\;\overline{u_1\frac{\partial w_1}{\partial\theta}}\;\;y_+^3$$

La valeur moyenne de $u_1 w_1$ est nulle par symétrie, mais il n'apparaît pas de raison pour qu'il n'existe pas de corrélation entre u_1 et $\partial w_1/\partial\theta$ et la fonction h se comporte comme y_+^3. Il convient donc de choisir $m-n=1/3$.

Les raisonnements ci-dessus ne sont pas ceux qui nous ont guidé à choisir la forme de la loi.

Des considérations basées sur des hypothèses très hasardées et que nous préférons ne pas exposer, nous ont conduit à adopter $n=1$, c'est-à-dire $m=4/3$, alors qu'il faudrait choisir m nettement inférieur à 1 pour une extrapolation vers le noyau à peu près équivalente à celles de Von KARMAN et de PRANDTL.

Nous reconnaissons que, faute d'une justification satisfaisante, n peut être considéré comme un second coefficient empirique.

Loi de distribution de vitesse dans le film

Pour la loi limite à nombre de Reynolds élevé, $\varepsilon = 0$ et :

$$1 = h + g.$$

La loi de distribution de vitesse peut alors être facilement intégrée en fonction du paramètre S :

$$h = S^3 \qquad g = 1 - h = 1 - S^3$$

$$k\,dy_+ = \frac{4 - S^3}{(1 - S^3)^2}\,ds$$

$$k\,du_+ = kg\,dy_+ = \frac{4 - S^3}{1 - S^3}\,ds$$

Si l'on pose :

$$I_1 = \int_0^s \frac{3dS}{1 - S^3}$$

$$= \frac{1}{2}\ \ln \frac{1 + s + s^2}{(1 - s)^2} + \sqrt{3}\ \text{Arc tg}\ \frac{\sqrt{3}S}{2 + S}$$

$$I_2 = \int_0^s \frac{1 + 2S^3}{(1 - S^3)^2} = \frac{S}{1 - S^3}$$

Alors :

$$ky_+ = I_1 + I_2$$

$$ku_+ = s + I_1$$

Le calcul effectué pour $k = 0{,}4$ conduit aux résultats du tableau ci-dessous :

S	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999
g	0,992	0,825	0,271	0,0297	0,00300	0,0003	0,00003
y_+	2,007	5,305	19,94	98,46	854	8.360	83.366
u_+	2,003	5,126	11,39	17,60	23,41	29,17	34,92

et ces résultats sont représentés sur les figures n°s 1 et 2.

La figure n° 1 est relative à la distribution de vitesse u_+ en fonction de la distance réduite à la paroi y_+ portée sur une échelle logarithmique. Les résultats résumés de NIKURADSE (1) sont représentés auprès de la courbe.

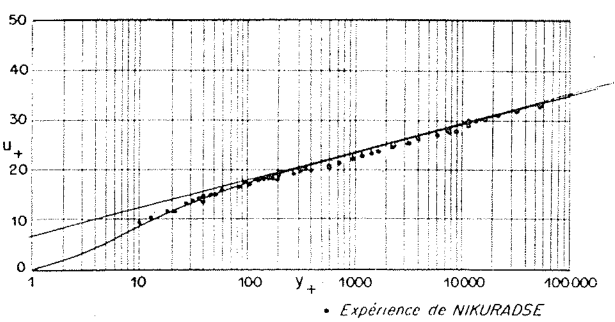

FIG. 1.

La figure n° 2 est relative à la pente réduite g portée en fonction de la distance réduite y_+. Elle montre la continuité du raccordement de la couche laminaire à la couche fortement turbulente.

Pour les valeurs élevées de y_+, c'est-à-dire lorsque S tend vers 1, la vitesse réduite se comporte comme :

$$u_+ = \frac{1}{k}\left[1 + \ln k\sqrt{27} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \ln y_+\right]$$

$$\simeq 6{,}6 + 2{,}5\ \ln y_+$$

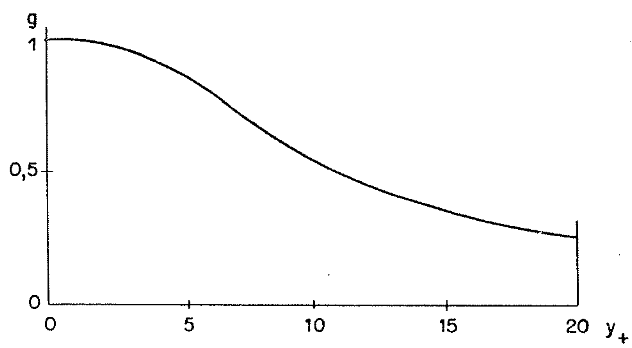

FIG. 2.

La constante à l'origine est légèrement supérieure à celle qui est généralement retenue pour la représentation des résultats expérimentaux, mais elle est parfaitement acceptable surtout si l'on tient compte de sa valeur de limite, alors que la solution proposée reste inférieure à cette limite.

Transmission de chaleur

Le nombre de MARGOULIS $\mathfrak{M}$ qui caractérise la transmission de chaleur est lié au coefficient de frottement C_f :

(1) *Mec. de l'écoul. turb.*, Dunod, 1941.

$$\mathcal{C}_f = 2\,\frac{u_*^2}{V^2}$$

où V représente la vitesse moyenne dans la conduite dont nous renonçons à donner une évaluation nouvelle puisque la formule proposée ne peut pas être extrapolée vers le noyau central.

La relation entre les deux coefficients est (1) :

$$\frac{\mathcal{C}_f}{2\,\mathcal{M}} = 1 + \sqrt{\frac{\mathcal{C}_f}{2}}\, f\,(\mathcal{S})$$

où le symbole $f(\mathcal{S})$ représente une fonction du nombre de STANTON $\mathcal{S}$ ou de son inverse le nombre de PRANDTL $\mathcal{P}_r$:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\mathcal{P}_r} = \frac{\lambda}{c_p \mu}$$

- λ désigne le coefficient de conduction de chaleur,
- c_p la chaleur spécifique à pression constante,
- $\mu = \rho\nu$ la viscosité absolue.

La fonction $f(\mathcal{S})$ est définie par la distribution de vitesse :

$$f(\mathcal{S}) = \int_0^{y_+} \frac{g^2\,dy_+}{\dfrac{1}{1-\mathcal{S}} + g}$$

L'intégration doit être faite jusqu'au noyau central où la loi proposée n'est plus valable, mais l'élément d'intégration devient rapidement négligeable lorsque y_+ croît et il n'y a pas grand inconvénient à pousser l'intégration jusqu'à l'infini avec une loi approchée.

Si nous posons :

$$t^3 = \mathcal{P}_r - 1 = \frac{1-\mathcal{S}}{\mathcal{S}}$$

une intégration facile conduit à :

$$1 + k\,f(\mathcal{S}) = \frac{t^2}{3}\left[4 + \frac{1}{t^3}\right]\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(1+t)^2}{1-t+t^2} + \sqrt{3}\,\text{Arc tg}\,\frac{\sqrt{3}\,t}{2-t}\right],$$

Les résultats établis pour $k = 0{,}4$ sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

$\mathcal{P}_r - 1$	1	2	5	10	20	50	100	200
$f(\mathcal{S})$	7,95	14,33	29,73	50,10	83,09	157,5	253,9	408,5

Ils sont représentés sur la figure 3 où des échelles logarithmiques ont été adoptées pour $f(\mathcal{S})$ et $\mathcal{P}_r - 1$.

Les résultats expérimentaux, établis d'après l'ouvrage de MM. RIBAUD et BRUN, déjà cité, sont indiqués auprès de la courbe calculée.

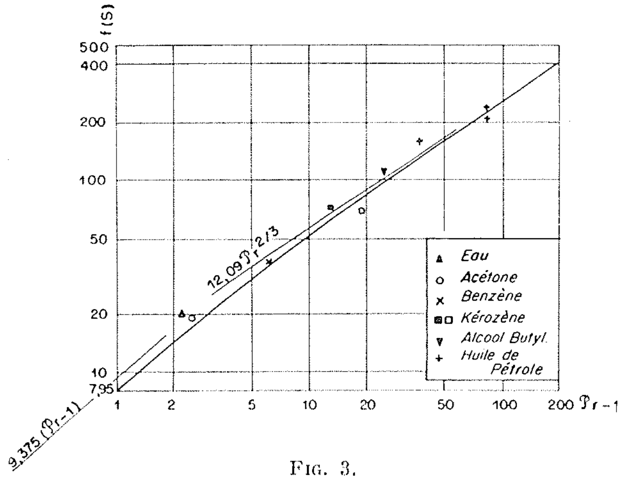

FIG. 3.

(1) *Conv. de la chal. en rég. perm.*, Dunod, 1949.

Les valeurs asymptotiques sont :

— pour un nombre de PRANDTL voisin de 1 :

$$f(\mathcal{S}) \simeq \frac{15}{4k}\,(\mathcal{P}_r - 1) \simeq 9{,}375\,(\mathcal{P}_r - 1)$$

— pour un nombre de PRANDTL très élevé :

$$f(\mathcal{S}) \simeq \frac{8\pi}{k\sqrt{27}}\,\mathcal{P}_r^{2/3} \simeq 12{,}09\,\mathcal{P}_r^{2/3}$$

L'accord assez satisfaisant des résultats expérimentaux, très imprécis, avec les résultats prévus d'après la loi de distribution de vitesse, est une confirmation indirecte de celle-ci qui n'est valable que dans la mesure où les hypothèses de REYNOLDS, qui établissent le parallélisme entre frottement et transmission de chaleur en régime turbulent, sont elles-mêmes correctes. On peut d'ailleurs considérer que les résultats des figures 1 et 3 vérifient simultanément la loi de distribution de vitesse et les hypothèses de REYNOLDS.

Conclusion

Faute d'une justification théorique présentable, nous proposons une relation empirique entre la corrélation de deux composantes de la vitesse turbulente et la pente de la courbe de distribution de vitesse moyenne.

Cette relation conduit à des représentations assez satisfaisantes à la fois pour la distribution de vitesse et la transmission de chaleur. Elle ne permet pas d'accéder à une évaluation nouvelle de la vitesse moyenne et du coefficient de frottement et ceci limite son intérêt pour les hydrauliciens.

DISCUSSION

Sur la demande de M. le Président, M. LEGENDRE précise que θ est l'angle méridien.

M. le Président rappelle qu'il s'agit d'abord de remplacer les mesures qu'on ne peut pas faire au contact immédiat de la paroi, avec des tubes de Pitot, ou des appareils analogues, et d'essayer de faire le point par des mesures de chaleur qui, agissant sur le courant, dans son intégralité, permettent de voir si l'hypothèse faite par M. LEGENDRE est satisfaite ou non. La divergence des résultats relatifs à l'eau peut provenir d'imprécisions expérimentales.

M. ROY trouve ce mémoire très intéressant.

M. le Président félicite à la fois M. LEGENDRE, qui nous a fait un travail très apprécié, et M. ROY admis à l'Académie des Sciences, il y a quelques jours.