

Étude des écoulements permanents graduellement variés en canaux découverts

Study of flow in open channels

PAR R. SILBER

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE
DIRECTEUR DU LABORATOIRE D'HYDRAULIQUE ET D'AÉRODYNAMIQUE DE L'INSTITUT POLYTECHNIQUE

English synopsis p. 635

NOTATIONS UTILISÉES

- x : abscisse d'une section.
 h : distance verticale du point repère de la section au plan horizontal de référence.
 $i_r = \frac{dh}{dx}$: pente du radier du canal, compté positivement pour une pente descendante.
 y : profondeur d'eau, distance de la surface libre au point repère de la section.
 S : section mouillée de la section, aire limitée à la surface libre.
 R_H : rayon hydraulique, rapport de la section mouillée au périmètre mouillé, contour de la section à l'exception de la surface libre.
 l : largeur du canal pour la profondeur y .
 $l_m = \frac{S}{y}$: largeur moyenne pour la profondeur y .
 $y_m = \frac{S}{l}$: profondeur moyenne pour la profondeur y .
 Q : débit du canal.
 $U = \frac{Q}{S}$: vitesse moyenne dans la section.
 $H = h + y + \frac{U^2}{2g}$: charge dans la section.
 $H_s = H - h = y + \frac{U^2}{2g}$: charge spécifique dans la section.
 C : coefficient de perte de charge de CHÉZY, défini par la formule : $\frac{dH}{dx} = -\frac{U^2}{C^2 R_H}$
 g : accélération de la pesanteur.
 $c = \sqrt{gy}$: célérité des ébranlements infiniment faibles pour la profondeur d'eau y .
 $\frac{U}{c}$: nombre de REECH-FROUDE local.
 $y^* = \frac{y}{H_s}$: profondeur d'eau réduite.
 $q^* = \frac{Q/l_m}{\sqrt{2gH_s H_s}}$: débit réduit.

Canal prismatique : canal dont la section reste identique à elle-même quel que soit x .
Canal prismatique tangent au canal réel : canal prismatique de section identique à celui du canal réel à l'abscisse x considérée.

L'étude des écoulements permanents en rivières ou canaux découverts constitue une importante partie de l'Hydraulique. Nous nous proposons d'envisager ici les *écoulements permanents graduellement variés*, c'est-à-dire ceux dans lesquels les différents paramètres, en particulier la forme et les dimensions des sections du canal, varient de façon continue, progressive et lente.

La mise en équation de ce problème s'obtient en écrivant que la charge en une section est égale à la hauteur, h , du repère du radier au-dessus d'un plan de référence augmentée de la profondeur d'eau, y , et de la hauteur due à la vitesse :

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g S^2},$$

la vitesse U étant supposée uniforme dans la section :

$$H = h + y + \frac{Q^2}{2g S^2}, \quad (1)$$

et en exprimant la variation de la profondeur d'eau dy pour une variation dx le long du canal :

$$dy = \left(\frac{dH}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) dx - \frac{Q^2}{2g} d \left(\frac{1}{S^2} \right) \quad (2)$$

La perte de charge linéaire $\frac{dH}{dx}$ peut s'exprimer par diverses formules classiques; nous utiliserons dans cette étude la formule de CHÉZY :

$$\frac{dH}{dx} = - \frac{Q^2}{C^2 S^2 R_H};$$

d'autre part, i_r étant la pente du radier :

$$\frac{dh}{dx} = - i_r.$$

D'où :

$$dy = i_r - \left(\frac{Q^2}{C^2 S^2 R_H} \right) dx - \frac{Q^2}{2g} d \left(\frac{1}{S^2} \right) \quad (2')$$

Lorsque le canal n'est pas prismatique, la section S varie avec x et avec y . La méthode de résolution généralement proposée est la méthode par approximations successives. Elle consiste, la profondeur y_1 étant connue à la section x_1 , à déterminer la valeur de y_2 à la section x_2 par la formule :

$$y_2 - y_1 = \left(i_r - \frac{Q^2}{C^2 S^2 R_H} \right) (x_2 - x_1) - \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)$$

Cette détermination se fait par essais successifs d'une valeur de y_2 , les valeurs de C , S , R_H utilisées dans la formule correspondant à la moyenne de y_1 et y_2 .

Lorsque le canal est prismatique, S n'est fonction que de y ; si nous désignons par l la longueur de section pour la profondeur y :

$$\frac{dS}{dy} = l,$$

nous obtenons l'équation classique :

$$\frac{dy}{dx} = i_r - \frac{1 - \frac{Q^2}{C^2 S^2 R_H i_r}}{1 - \frac{Q^2 l}{g S^3}} \quad (3)$$

La solution de cette équation différentielle est difficile et compliquée du fait que les caractéristiques $S(y)$, $R_H(y)$, $l(y)$, ne peuvent, en général, pas s'exprimer de façon analytique. Les fonctions de BRESSE en fournissent une solution simple limitée au cas d'un canal de section rectangulaire théoriquement infiniment large. Une méthode absolument rigoureuse est celle de l'intégration graphique de la fonction, mais elle ne peut s'appliquer pratiquement que pour déterminer la profondeur à l'extrémité la plus éloignée du canal. Des méthodes fondées sur des équations empiriques pour représenter les facteurs variables entrant dans l'équation ont été proposées, en particulier par BAKHMETEFF, et conduisent à l'utilisation de tables d'intégrales définies. Elles sont d'un emploi très lourd et d'une précision mal définie et surtout ne permettent pas une étude simple de l'évolution des phénomènes lorsque les conditions varient. WODWARD et POSEY leur préfèrent la méthode par approximations successives.

Nous nous proposons de montrer que le problème de la détermination de la surface libre peut recevoir une *solution générale* simple, aussi précise que pourra le désirer l'utilisateur (compte tenu de la précision de ses données), applicable aussi bien *aux canaux non prismatiques* qu'aux canaux prismatiques, par l'emploi d'un diagramme, grâce :

1° A l'introduction de la charge spécifique :

$$H_s = y + \frac{Q^2}{2g S^2} \quad (4)$$

2° A l'emploi de grandeurs adimensionnelles.

EQUATION UNIVERSELLE DES ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE

1° Au lieu de rechercher l'évolution de y en fonction de x , équation (2) ou (3), nous allons déterminer celles de y et de x séparément, en

fonction d'une variation donnée de la charge spécifique H_s . L'équation (4) nous fournit celle de y en fonction de H_s . Nous avons de plus :

$$\begin{aligned} dH_s &= dH - dh = \left(\frac{dH}{dx} + i_r \right) dx \\ &= \left(- \frac{Q^2}{C^2 S^2 R_{II}} + i_r \right) dx \end{aligned} \tag{5}$$

L'évolution de la dérivée dH_s/dx en fonction de y peut être facilement représentée (fig. 1) :

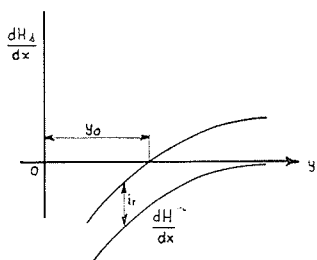


FIG. 1.

elle est obtenue par un décalage vertical égal à i_r , de la courbe donnant l'évolution de la perte de charge linéaire en fonction de y , obtenue à l'aide d'une des formules classiques : CHÉZY, MANNING, KUTTER...

2° Introduisons, de plus, des grandeurs adimensionnelles dans la relation (4) en posant :

$$y^* = \frac{y}{H_s}, \text{ profondeur réduite,}$$

$$q^* = \frac{Q/l_m}{H_s \sqrt{2g H_s}}, \text{ débit réduit,}$$

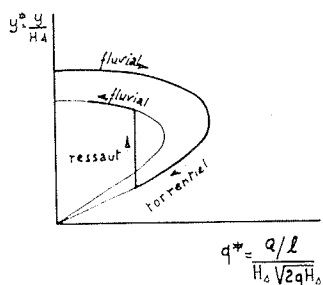


FIG. 2.

avec :

$$l_m = \frac{S}{y}, \text{ largeur moyenne pour la profondeur } y.$$

Nous obtenons l'équation universelle des écoulements graduellement variés à surface libre :

$$q^* = y^* \sqrt{1 - y^{*2}} \tag{6}$$

équation de la caractéristique universelle q^* , y^* , qui n'est autre d'ailleurs que la courbe classique du débit en fonction de la profondeur d'eau d'un canal de section rectangulaire de largeur unité, pour une charge spécifique égale à l'unité, dont l'abscisse serait graduée en $Q/\sqrt{2g}$.

La relation paramétrique :

$$y^* = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{U}{c} \right)^2} \tag{7}$$

écrite en désignant par :

$$c = \sqrt{gy}$$

la célérité locale des ondes de surface, facilement déduite de (4), permet de graduer cette caractéristique en nombre de REECH-FROUDE local : $\frac{U}{c}$ (fig. 3, courbe extérieure).

Avant d'aborder le cas général du canal réel, nous allons envisager celui du canal idéal, en désignant sous ce terme le canal de pente nulle et sans frottement.

ETUDE DU CANAL IDÉAL

Considérons (fig. 4, bas, droite) un canal idéal, que nous supposons, pour simplifier, de section rectangulaire, reliant deux réservoirs R_1 et R_2 , extrêmement vastes, le niveau de R_1 étant supposé fixe et celui de R_2 pouvant être modifié à volonté. Supposons de plus que ce canal soit un convergent-divergent, c'est-à-dire que sa largeur l aille d'abord en décroissant, puis en croissant, après être passée par une valeur minimum en une section appelée col du canal.

Le canal étant sans frottement et de pente nulle, la charge spécifique H_s reste constante et égale à la profondeur d'eau au-dessus du radier de canal dans le réservoir R_1 loin de l'entrée. Le point figuratif de l'écoulement évolue sur la caractéristique (y^* , q^*) la valeur de l'abscisse :

$$q^* = \frac{Q/l}{H_s \sqrt{2g H_s}}$$

variant en sens inverse de l . Elle part donc de la valeur 0, dans R_1 , croît constamment dans le convergent, passe par une valeur maximum au col et décroît ensuite dans le divergent.

Supposons d'abord que nous fixions à la profondeur y dans le réservoir R_2 une valeur

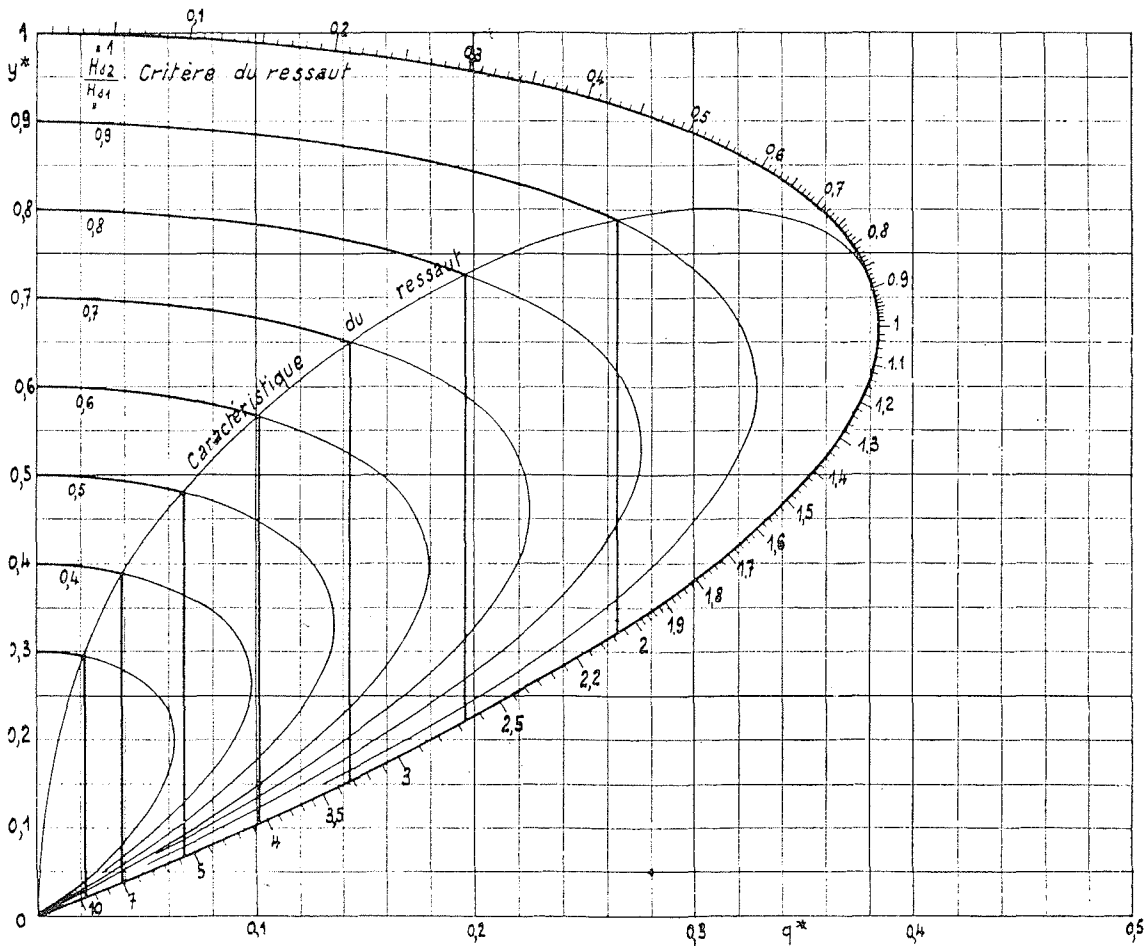


FIG. 3.

très légèrement inférieure à celle du réservoir $R_1 : y = H_s$. Le point figuratif de la section de sortie peut être facilement porté à l'ordonnée y^* correspondante, rapport des profondeurs d'eau dans le réservoir R_2 et dans le réservoir R_1 , très légèrement inférieure à 1. Il lui correspond (fig. 4 a) une valeur de l'abscisse q_s^* , d'où on peut déduire la valeur du débit :

$$Q = l_s \cdot H_s \sqrt{2g H_s} \cdot q_s^*$$

de valeur également très faible.

L'abscisse du point figuratif de toute autre section du canal s'obtiendra par une règle de trois :

$$q^* = q_s^* \frac{l_s}{l}$$

en particulier celui du col, valeur maximum :

$$q_{col}^* = q_s^* \frac{l_s}{l_{col}}$$

Le point figuratif du canal évolue sur la ca-

ractéristique qu'il parcourt d'abord de l'abscisse 0 à l'abscisse q_{col}^* , puis en sens inverse de l'abscisse q_{col}^* à l'abscisse q_s^* . L'écoulement est partout fluvial. La profondeur d'eau y^* , rapportée à la profondeur d'eau dans R_1 , décroît donc dans le convergent, passe par un minimum au col et croît dans le divergent, l'eau sortant à la section de sortie avec une profondeur égale à celle du réservoir aval et une vitesse :

$$U = \frac{Q}{l_s y_s}$$

Faisons décroître la profondeur d'eau dans le réservoir R_2 . y_s^* diminue; le point figuratif de la section de sortie se déplace vers la droite; les points figuratifs de toutes les sections se déplacent également vers la droite, tous les q^* s'accroissant proportionnellement à q_s^* , ainsi que le débit Q .

Il arrivera un moment où la valeur de q_{col}^* atteindra la valeur critique, limite maximum de q^* . Quelle que soit la valeur imposée au y du réservoir R_2 , la valeur de q_{col}^* ne pourra plus s'accroître ainsi, par conséquent, que les valeurs

des q^* relatifs à chaque section et que la valeur du débit Q , limitée à la valeur maximum critique :

$$Q_c = l_{col} \cdot H_s \sqrt{2gH_s} \cdot q_c^*$$

fonction uniquement de la section du col et de la valeur de H_s , c'est-à-dire de la profondeur

$$q^* = q_{col} \frac{l_{col}}{l} = q_c \frac{l_{col}}{l}$$

en particulier celui de la section de sortie :

$$q_s^* = q_c^* \frac{l_{col}}{l_s}$$

Le point figuratif de la profondeur d'eau dans

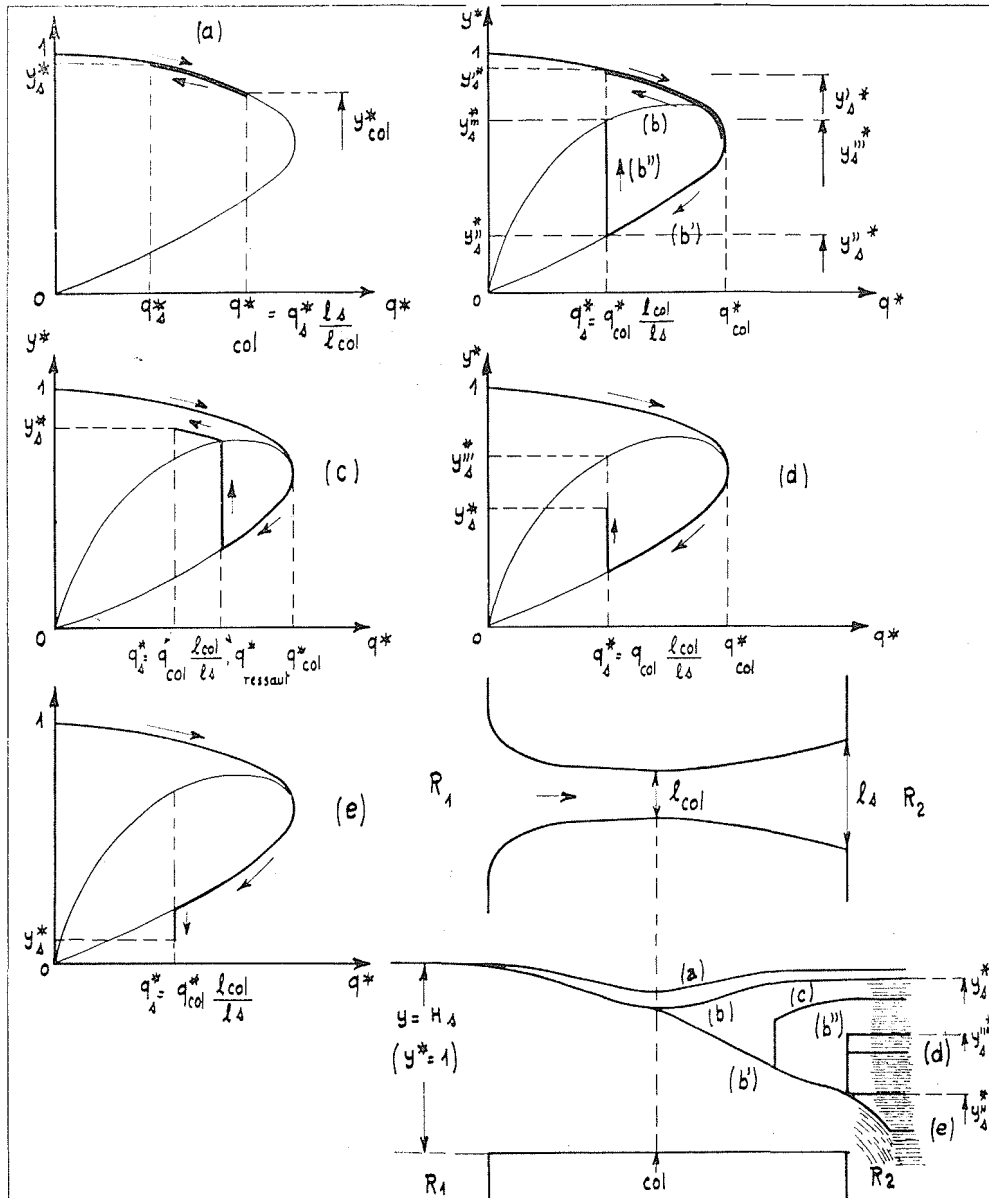


FIG. 4.

d'eau dans le réservoir amont.

Nous aurons ainsi obtenu une configuration permanente des q^* , la section du col caractérisée par le point critique, jouant le rôle de section de contrôle, l'abscisse q^* du point figuratif de chaque section étant invariablement fixée par :

le réservoir R_2 qui avait décrit, à mesure que l'on abaissait la profondeur d'eau, la caractéristique depuis le point (0,1) jusqu'à cette dernière valeur, maximum de q_s^* , parcouru, lorsque la profondeur continue à décroître, la verticale déterminant cette valeur q_s limite.

Cette verticale coupe la caractéristique en deux points (fig. 4, (b) et (b')), l'un caractérisé par la valeur y_s^* , *limite supérieure de la profondeur d'eau réduite de la section de sortie*, située sur la branche fluviale, l'autre caractérisée par la valeur $y_s'^*$, *limite inférieure de la profondeur d'eau réduite de la section de sortie*, située sur la branche torrentielle.

Lorsque la profondeur d'eau dans le réservoir R_2 atteint la première valeur, l'écoulement est partout fluvial, (b), le col étant caractérisé par la vitesse critique. Lorsque la profondeur d'eau dans le réservoir R_2 atteint la deuxième valeur, l'écoulement (b') est fluvial dans le convergent et, étant passé par la valeur critique au col, il est torrentiel dans le divergent. Dans les deux cas, l'eau sort à la section de sortie avec une profondeur égale à la profondeur d'eau dans le réservoir R_2 , l'énergie cinétique se dissipant en mouvement tourbillonnaire dans celui-ci, mais l'écoulement ne présentant pas de discontinuité.

Que se passe-t-il lorsque la profondeur d'eau dans R_2 a une valeur inférieure à la limite supérieure, toutefois différente de la limite inférieure?

Nous allons opérer en sens inverse en partant d'abord d'une profondeur d'eau très faible dans R_2 et en l'accroissant continûment.

Lorsque la profondeur d'eau dans le réservoir R_2 est inférieure à la limite inférieure $y_s'^*$ (fig. 4, (e)), l'écoulement est évidemment fluvial dans le convergent et torrentiel jusqu'à la section de sortie où l'eau a obligatoirement la profondeur d'eau $y_s'^*$, supérieure à celle du réservoir, et l'écoulement se termine par une chute. Le point figuratif décrit complètement la branche fluviale (convergent), puis la branche torrentielle jusqu'à l'abscisse q_s^* (divergent), l'écoulement étant identique au cas (b') dans le canal lui-même et enfin un élément de la verticale représentative de la chute.

Si nous relevons continûment le niveau dans R_2 , la chute s'atténue et s'annule lorsque la profondeur d'eau atteint la valeur $y_s'^*$. Si nous accroissons encore le niveau, l'eau arrivera à la section de sortie avec une profondeur $y_s'^*$ inférieure au niveau dans R_2 . Il se produira un *ressaut* qui s'accroîtra à mesure que le niveau dans R_2 s'élèvera, remontera le courant et se fixera en une section du divergent, variable avec la valeur de la profondeur d'eau dans R_2 . Le ressaut étant *dissipateur d'énergie*, séparera l'écoulement en *deux domaines*, caractérisés par deux valeurs distinctes de la charge spécifique, celle-ci ayant subi une chute à la discontinuité.

après le ressaut, l'écoulement est régi par la caractéristique y^* , q^* , mais les coordonnées sont rapportées à des charges spécifiques différentes H_{s1} et H_{s2} , prises comme unité de mesure, H_{s2} étant inférieure à H_{s1} toujours égale à la profondeur d'eau dans R_1 . Si nous voulons représenter l'évolution du deuxième domaine dans le diagramme du premier, c'est-à-dire en prenant comme longueur de référence non H_{s2} , mais H_{s1} , il nous faudra multiplier les y^* et q^* relatifs au deuxième domaine, respectivement (fig. 2) par :

$$\frac{H_{s2}}{H_{s1}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{H_{s2}}{H_{s1}}\right)^{3/2}$$

L'évolution du point figuratif ne s'effectue donc pas sur la caractéristique du premier, *caractéristique principale*, mais sur une *courbe affine* de celle-ci définie par la transformation :

$$\frac{y_2^*}{y_1^*} = \frac{H_{s2}}{H_{s1}}, \quad \frac{q_2^*}{q_1^*} = \left(\frac{H_{s2}}{H_{s1}}\right)^{3/2} \quad (8)$$

que nous appellerons *caractéristique secondaire*.

L'évolution de l'écoulement avec choc est représenté par la figure 2. Le point figuratif parcourt la branche fluviale de la caractéristique principale (convergent), puis la branche torrentielle jusqu'à une abscisse caractéristique de la section du ressaut, puis la discontinuité le fait remonter verticalement jusqu'à la branche fluviale de la caractéristique secondaire qu'il parcourt jusqu'à l'abscisse q_s^* .

Le problème revient à trouver le rapport H_{s2}/H_{s1} , *critère du ressaut*, définissant la caractéristique secondaire, et la verticale du ressaut, défini par exemple par le nombre de Reech-Froude U_1/c_1 au point de la caractéristique principale d'où s'élève la verticale, c'est-à-dire au droit du ressaut et à l'amont de celui-ci.

Il y a évidemment une position du ressaut dans le graphique (fig. 2) pour une valeur de H_{s2}/H_{s1} , soit une relation entre H_{s2}/H_{s1} et U_1/c_1 .

Pour l'obtenir, il suffit de faire appel à l'équation du ressaut. Si nous désignons par les indices 1 et 2 l'état du fluide au droit du ressaut à l'amont et à l'aval, celle-ci conduit à l'équation :

$$\frac{Q^2}{g l^2} \left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} \right) = \frac{y_1^2 - y_2^2}{2}$$

qui peut s'écrire :

$$\left(\frac{U_1}{c_1} \right) \left(\frac{U_2}{c_2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_2}{y_1} \right) \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^{-1/2}$$

L'équation de continuité :

$$U_1 y_1 = U_2 y_2$$

ETUDE DE L'ÉCOULEMENT AVEC RESSAUT

Dans chacun des deux domaines, avant et

peut s'écrire :

$$\frac{U_1}{c_1} / \frac{U_2}{c_2} = \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^{3/2}$$

d'où nous tirons :

$$\left(\frac{U_1}{c_1} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_1}{y_2} \right) \left(\frac{y_1}{y_2} \right)$$

D'où la relation cherchée :

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8 \left(\frac{U_1}{c_1} \right)^2}}{2} \quad (9)$$

donnant la valeur du rapport des profondeurs avant et après le ressaut en fonction du nombre de FROUDE avant le ressaut, et définissant par conséquent la caractéristique secondaire, soit H_{s2}/H_{s1} .

DIAGRAMME DE L'ÉCOULEMENT AVEC RESSAUT

L'écoulement avec ressaut est représenté (fig. 3) par une famille de courbes affines de la caractéristique principale et une série de verticales qui ne dépendent que du critère du ressaut H_{s2}/H_{s1} . Le lieu de rencontre de chaque verticale avec la courbe affine correspondante, *caractéristique du ressaut*, représente l'état du fluide au droit de la discontinuité aussitôt après elle. Les courbes affines ne sont utilisées qu'au-dessus de la caractéristique du ressaut.

ÉTUDE COMPLÈTE DE L'ÉCOULEMENT DANS LE CANAL IDÉAL

Reprenons la figure 4 et terminons l'analyse des différents types d'écoulement. Nous avons porté dans chaque graphique la caractéristique du ressaut. La verticale représentative de la section de sortie coupe cette caractéristique (fig. 4 (b'')) en un point y''_s^* correspondant à la *profondeur limite intermédiaire*.

Lorsque la profondeur d'eau dans le réservoir R_2 , en s'accroissant continûment a franchi la valeur y''_s^* et n'a pas encore atteint la valeur limite intermédiaire (fig. 4, (d)), le point figuratif est situé au-dessous de la caractéristique du ressaut et par conséquent ne correspond à aucune courbe affine. L'écoulement est fluvial dans le convergent, torrentiel dans le divergent jusqu'à la section de sortie où un ressaut fait passer la profondeur de y''_s^* à y_s^* . La vitesse de propagation de la discontinuité, supérieure à la vitesse critique, est inférieure à la vitesse de l'eau, tor-

rentielle, à la sortie et le ressaut reste localisé en cette section.

Lorsque la profondeur d'eau y_s'' atteint la valeur limite intermédiaire, la vitesse de propagation du ressaut devient égale à celle de l'eau à la sortie : $\frac{U_1}{c_1}$ (b'').

Lorsque y_s^* est compris entre les limites intermédiaire et supérieure, la vitesse de propagation du ressaut devient supérieure à la vitesse de l'eau à la section de sortie et le ressaut remonte le courant en s'affaiblissant et vient se fixer (c) en un point du divergent d'autant plus éloigné de la section de sortie que y_s^* est plus grand. Il atteindra la section du col, le ressaut s'évanouissant (b) quand y_s^* deviendra égal à la limite supérieure.

ÉTUDE DU CANAL RÉEL

Soit maintenant un canal réel, c'est-à-dire avec frottement et de pente non nulle. La charge spécifique H_s n'est plus constante ou soumise à des variations discontinues, mais varie continûment, en s'accroissant ou en décroissant suivant que la pente du radier l'emporte sur le frottement ou inversement. Cette variation de H_s avec x est régie par l'équation (5) et la courbe de la figure 1.

Considérons donc ce canal réel, dont on connaît la profondeur y_1 , en une abscisse initiale x_1 , pour un débit Q donné. On en déduit H_{s1} , charge spécifique dans cette section, d'où y_1^* et le point figuratif de cette section peut être porté sur la *caractéristique principale en prenant H_{s1} comme longueur de référence*.

En une autre abscisse x_2 , la charge spécifique a varié et est devenue H_{s2} . Le point figuratif est donc situé sur la *caractéristique secondaire définie par H_{s2}/H_{s1} en prenant H_{s1} , charge spécifique de la section initiale comme longueur de référence*.

Le diagramme de la figure 5 a été obtenu en traçant ces caractéristiques secondaires pour une série de valeurs rondes de H_{s2}/H_{s1} . Supposons que nous connaissions, dans ce diagramme, le lieu des points figuratifs des différentes sections x_2 du canal, que nous appellerons *la courbe d'utilisation du canal*. Le réseau des caractéristiques secondaires déterminera sur cette courbe d'utilisation pour chaque valeur de $\Delta H_s = H_{s2} - H_{s1}$, correspondant à une caractéristique secondaire, une valeur de y^* , lue directement, soit de :

$$y = y^* \cdot H_{s1}$$

La résolution du problème se ramène donc au tracé dans le diagramme de la courbe d'utilisa-

tion du canal. Nous allons le traiter en considérant successivement les différents types de canaux.

I. — *Le canal prismatique de section rectangulaire*

La largeur l du canal est une constante indépendante de x comme de y . Le débit réduit q^* l'est également et la courbe d'utilisation est la verticale passant par le point y_1^* de la caractéristique principale. C'est la courbe d'utilisation du canal prismatique de section rectangulaire pour le débit Q donné. Elle coupe chaque caractéristique en deux points, correspondant aux régimes fluvial et torrentiel, et en tangente une, déterminant la profondeur critique y_c^* pour ce débit Q , ainsi que la charge spécifique critique H_{sc} .

Le réseau des caractéristiques détermine sur

la courbe d'utilisation une série de valeurs de y^* , aussi serrée que l'on voudra, correspondant à des variations ΔH_s constantes (1 %, 2 % ... 5 % de la charge spécifique de référence H_{s1}). On en déduit les valeurs correspondantes de y :

$$y = y^* \cdot H_{s1}$$

en multipliant ces valeurs relevées, y^* , par la constante H_{s1} , et les valeurs correspondantes de Δx :

$$\Delta x = \Delta H_s / \frac{dH_s}{dx}$$

en divisant la variation constante ΔH_s par la valeur de dH_s/dx , pour la pente i_r , à la valeur moyenne de y_1 et y_2 , y_2 et y_3 ... sur la courbe dH_s/dx en fonction de y (fig. 1).

Condensation des courbes d'utilisation. — Remarquons que la courbe d'utilisation se déplace

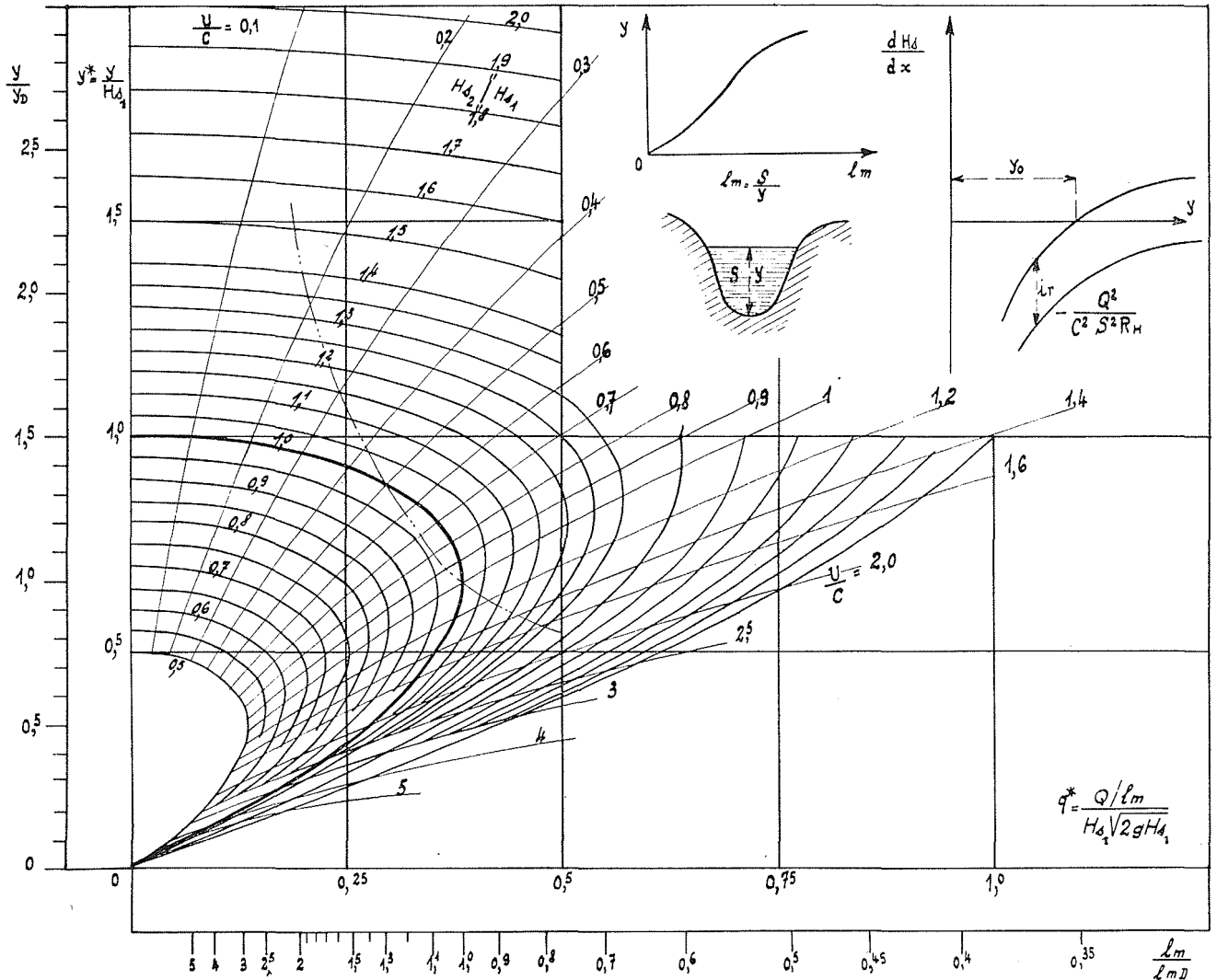


FIG. 5.

lorsque Q varie, le point initial y_1^* se déplaçant lui-même sur la caractéristique principale. On peut condenser ces courbes d'utilisation en prenant pour longueur de référence non la charge spécifique du point initial $y_1 : H_{s1}$, mais celle du point critique : H_{sc} . Posons, de plus :

$$\frac{y^*}{y_c^*} = \frac{y/H_{sc}}{y_c/H_{sc}} = \frac{y}{y_c};$$

l'ordonnée du diagramme (fig. 5) peut alors être graduée en y/y_c . La courbe d'utilisation universelle des canaux prismatiques de section rectangulaire est la verticale passant par le point critique de la caractéristique principale. On déterminera y_c par :

$$\frac{U}{\sqrt{gy}} = 1, \text{ soit } \frac{Q^2}{gS^2y} = \frac{Q^2l}{gS^3} = \frac{Q^2}{gl^2y^3} = 1$$

soit enfin :

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gl^2}}$$

On en déduira :

$$\begin{aligned} H_{sc} &= y_c + \frac{2gS^2}{Q^2} = y_c + \frac{Q^2}{2gl^2y_c^2} \\ &= y_c + \frac{(Q/l)^2}{2gy_c^2}, \end{aligned}$$

d'où le point initial $y_1^* = y_1/H_{sc}$ ou y_1/y_c sur la verticale d'utilisation et on opérera comme précédemment.

II. — Le canal prismatique de section quelconque

l_m n'est plus constant, mais la loi :

$$l_m(y) = \frac{S}{y}$$

est connue.

Plaçons le point figuratif y_1^* de la section initiale de la surface libre sur la caractéristique principale. Nous avons pour chaque y :

$$\frac{q^*}{q_1^*} = \frac{Q/l_m}{Q/l_{m1}} = \frac{l_{m1}}{l_m} = \frac{l_m(y_1)}{l_m(y)}$$

La courbe d'utilisation du canal pour un débit Q donné, image dans le plan du diagramme de la courbe $l_m(y)$, peut être facilement tracée.

Elle coupe chaque caractéristique en deux points, correspondant aux écoulements fluvial et torrentiel et en tangente une au point critique de l'écoulement, déterminant la profondeur critique y_c^* et la charge spécifique critique H_{sc} . Ce point est évidemment tel que :

$$\frac{U}{\sqrt{gy_m}} = 1, \text{ soit } \frac{Q^2}{gS^2y_m} = \frac{Q^2l}{gS^3} = 1$$

avec :

$$y_m = \frac{S}{l}.$$

La détermination de $y(x)$ s'opérera comme dans le cas du canal de section rectangulaire.

Si nous choisissons comme longueur de référence, non pas la charge spécifique H_{s1} du point initial, mais la charge spécifique H_{SD} du point pseudocritique défini par :

$$\frac{U}{\sqrt{gy}} = 1$$

(nombre de REECH-FROUDE local égal à 1) et correspondant au point à tangente verticale de la caractéristique principale, la courbe d'utilisation du canal passera par ce point pseudocritique (point critique pour le canal rectangulaire) de la caractéristique principale.

Posons, de plus :

$$\frac{y^*}{y_D^*} = \frac{y/H_{SD}}{y_D/H_{SD}} = \frac{y}{y_D}$$

$$\frac{q^*}{q_D^*} = \frac{Q/l_m}{Q/l_{mD}} = \frac{l_{mD}}{l_m}$$

Les abscisses et ordonnées du diagramme pourront être graduées en y/y_D et l_m/l_{mD} .

On déterminera y_D par :

$$\frac{U}{\sqrt{gy}} = 1, \text{ soit } : \frac{Q^2}{gS^2y} = \frac{Q^2l_m}{gS^3} = \frac{Q^2}{gy^3l_m^2} = 1$$

soit enfin :

$$y_D = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gl_m^2}}$$

On en déduira y_D et l_{mD} et on aura pour chaque valeur de y , dont y_1 , celle de y/y_D et celle de $\frac{l_m}{l_{mD}}$ d'où le tracé de la courbe d'utilisation. On déterminera H_{SD} et on opérera comme précédemment.

Remarquons que si les courbes d'utilisation pour des Q variables se groupent en passant toutes par le point pseudo-critique, elles ne sont confondues que pour les canaux de section rectangulaire ou triangulaire.

III. — *Le canal non prismatique de section rectangulaire*

La variation de l en fonction de x est connue. On peut tracer, de plus, les courbes dH_s/dx pour diverses valeurs de x , si i_r varie de plus avec x (fig. 6).

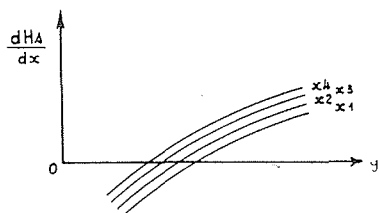


FIG. 6.

Plaçons le point initial connu y_1^* , correspondant à la largeur l_1 sur la caractéristique principale. Pour une première variation ΔH_s , on lit la valeur de y_2^* sur la caractéristique secondaire correspondante et sur la verticale passant par y_1^* (courbe d'utilisation du canal prismatique tangent (1)). On en déduit :

$$y_2 = y_2^* \cdot H_{s1}$$

On relève la valeur de dH_s/dx correspondant à la valeur moyenne de y_1 et y_2 (fig. 6). On calcule :

$$\Delta_1 x = \Delta H_s / \frac{dH_s}{dx}$$

On relève la valeur de l_2 correspondant à cette nouvelle section et on corrige le point primitivement choisi par :

$$\frac{q_2^*}{q_1^*} = \frac{l_1}{l_2}$$

On reportera sur la même caractéristique secondaire la valeur ainsi corrigée, on relèvera le nouveau y_2^* , d'où y_2 , et si l'écart n'est pas négligeable on recalculera $\Delta_1 x$.

On prolongera ensuite $y_1^* y_2^*$ jusqu'à la nou-

velle caractéristique secondaire (même ΔH_s), on relèvera y_3^* , d'où y_3 et :

$$\Delta_2 x = \Delta H_s / \frac{dH_s}{dx}$$

On relèvera la valeur de l_3 correspondant à cette nouvelle section et on corrigera le point trouvé sur la nouvelle caractéristique secondaire par :

$$\frac{q_3^*}{q_1^*} = \frac{l_1}{l_3}$$

On portera le nouveau point (qui sera très probablement extrêmement proche du point primitif), d'où y_3^* et y_3 .

Remarquons que le canal étant lentement évolutif (sinon les équations de bases ne sont plus valables), l'opération est extrêmement facilitée.

On continuera ainsi de proche en proche, en prolongeant la courbe d'utilisation dans la direction du segment $y_1 y_2 y_3 \dots$ déjà tracé et on déterminera sur le diagramme la *courbe d'utilisation du canal non prismatique de section rectangulaire pour le débit Q donné* en même temps que la forme de la surface libre (y, x).

IV. — *Le canal non prismatique de section quelconque*

Les sections du canal en fonction de x sont connues. On possède donc, pour différentes valeurs de x , les courbes $\frac{dH_s}{dx}$ ainsi que les courbes $l_m(y)$ (fig. 7).

Plaçons le point initial $y_1^*(y_1, l_{m1}, H_{s1})$ sur la caractéristique principale. Pour une première va-

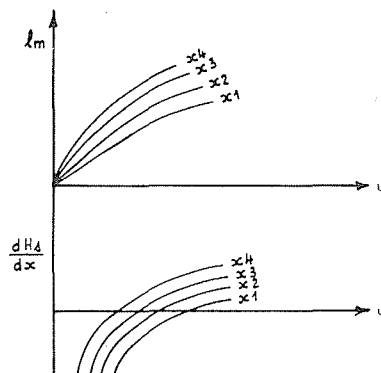


FIG. 7.

riation ΔH_s , on lit la valeur de y_2^* sur la caractéristique secondaire correspondante, dans la direction rapidement et approximativement tracée de la courbe d'utilisation du canal prismatique tangent au canal réel. On en déduit :

$$y_2 = y_2^* H_{s1}$$

(1) On pourra même dès le début tenir déjà compte approximativement de la variation de q^* provenant de la variation de l en fonction de x .

et :

$$\Delta_1 x = \Delta H_s / \frac{dH_s}{dx}$$

$\frac{dH_s}{dx}$ étant relevé sur la figure 7 pour la valeur moyenne de y_1 et y_2 et pour l'abscisse correspondant à ce premier Δx (en corrigeant l'opération pendant son exécution).

On corrige le point initialement choisi sur la caractéristique secondaire en tenant compte (fig. 7) de la variation de l_m en fonction de x et de y par :

$$\frac{q_2^*}{q_1^*} = \frac{l_{m1}}{l_m(x_2, y_2)}$$

d'où le nouveau point sur la caractéristique secondaire, y_2^* et y_2 et une nouvelle valeur de $\Delta_1 x$.

On poursuit l'opération de proche en proche comme pour le canal de section rectangulaire en prolongeant le segment déjà trouvé $y_1^* y_2^* y_3^* \dots$ jusqu'à la caractéristique secondaire suivante. On obtient ainsi la *courbe d'utilisation du canal non prismatique de section quelconque* en même temps que la forme de la surface libre.

V. — *Forme des courbes de surface libre*

On peut facilement retrouver de façon concrète les différentes formes de surface libre.

Remarquons que :

1° Pour y supérieur à y_0 , profondeur normale correspondant au régime uniforme dans un canal prismatique et donnée par l'intersection de la courbe dH_s/dx avec l'axe des x :

$$\frac{dH_s}{dx} > 0$$

et pour y inférieur à y_0 :

$$\frac{dH_s}{dx} < 0$$

2° Pour des H_{s2}/H_{s1} croissant, ΔH_s positif, y croît en régime fluvial ($y < y_c$) et décroît en régime torrentiel.

On remarquera sur la figure 8 :

1° Que nous n'avons pas prolongé, même en pointillé, les courbes au voisinage de la profondeur critique. En effet, dès que dy/dx est

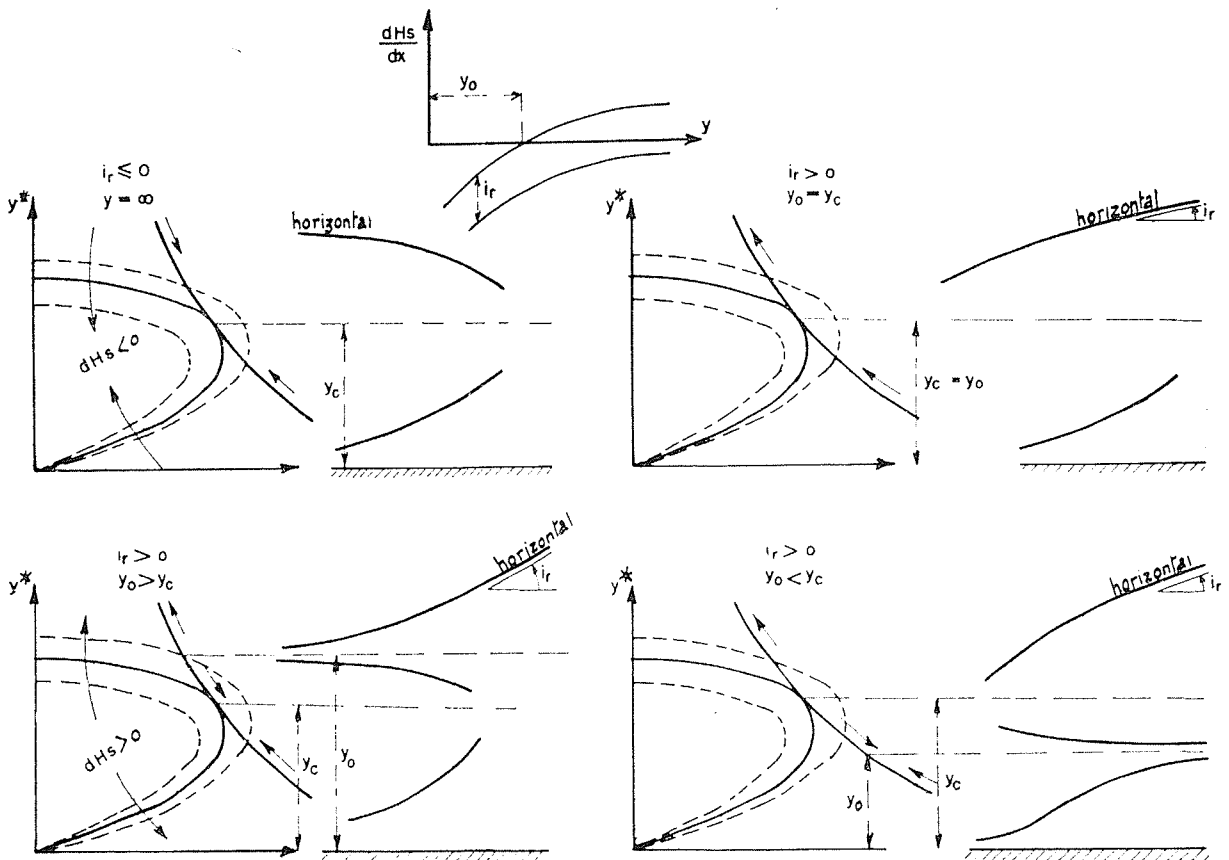


FIG. 8.

grand, la section mouillée ne varie plus de façon « progressive et lente », la composante verticale de la vitesse ne saurait être négligée et par conséquent l'équation de base (1) n'a plus de sens; l'écoulement n'étant plus graduellement varié.

2° Que nous n'avons pas représenté par des lignes horizontales les courbes relatives à la pente critique ($y_c = y_0$). Celles-ci ne sont, en effet, horizontales que pour un canal rectangulaire infiniment large (cas des fonctions de BRESSE). Comme il est facile de le voir en examinant l'équation (3), pour que :

$$\frac{dy}{dx} = i_r$$

il faut que :

$$\frac{Q^2}{C^2 S^2 R_{II} i_r} = \frac{Q^2 l}{g S^3}$$

quelque soit y , soit que :

$$C^2 R_{II} i_r = g \frac{S}{l} = g y_m$$

Or, cette équation est satisfaite pour la profondeur normale y_0 (y_{m0}, R_{II0}); par conséquent, il faudrait que :

$$\frac{R_{II}}{R_{II0}} = \frac{y_m}{y_0}, \text{ quel que soit } y.$$

En particulier, pour un canal rectangulaire, nous obtenons la relation absurde :

$$\frac{l + 2y}{l + 2y_0} = 1$$

vraie uniquement pour l infini (canal infiniment large).

DISCUSSION

M. TOURASSE fait observer que, dans le cas d'un écoulement retardé, la récupération de l'énergie cinétique de l'eau n'est pas complète, de sorte qu'une partie du $\frac{V^2}{2g}$ est perdue. D'autre part, la largeur de la rivière en fonction de la profondeur y n'est pas toujours bien connue pour les cotes du plan d'eau atteintes lors des grandes crues.

M. SILBER fait remarquer que la méthode qu'il a exposée se prête à l'étude de tous les cas, puisqu'il suffit de rechercher l'évolution d'une courbe qui est établie une fois pour toutes. Dans le dernier cas signalé par M. TOURASSE, la courbe d'utilisation est mal définie, et la méthode ne peut donner que ce qu'on lui apporte.

M. le Président félicite M. SILBER de son excellent exposé qui constitue une belle leçon de synthèse : il était impossible de faire avec plus de détails et en moins de temps un exposé d'ensemble sur l'écoulement dans les canaux découverts; le titre lui paraît trop modeste : il devrait rappeler le caractère synthétique de l'étude et, de plus, mentionner qu'il s'agit d'un écoulement permanent et graduellement varié.

M. le Président souhaite qu'il soit fait de nombreuses applications de la méthode exposée par M. SILBER.

M. SILBER tient à la disposition des personnes qui seraient intéressées des tirages à grande échelle des diagrammes qui figurent dans sa communication.

