Les suites Isogènes (Isogenic sequences)

PAR M. MALLET
INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES

English synopsis p. 5

M. MALLET, Ingénieur en Chef du Service Central des Etudes Générales et Grands Travaux, au Service de la Colonisation et de l'Hydraulique en Algérie, va faire paraître dans les éditions de « La Houille Blanche » un livre de mathématiques qui rassemblera et étudiera les fonctions auxquelles peut avoir affaire un Hydraulicien ou un Constructeur désirant tirer le maximum de la théorie. Des premiers chapitres relatifs aux fonctions de BERNOUILLI et d'EULER, nous extrayons un chapitre de synthèse qui montre les raisons de l'intérêt de telles fonctions et que nous sommes heureux de présenter à nos lecteurs.

M. MALLET étudie dans cet extrait les suites « Isogènes ». Une suite de fonctions est dite isogène lorsque chacun de ses termes est la dérivée du suivant. Si l'on impose à une telle suite une condition supplémentaire, par exemple de satisfaire à une équation aux différences finies ou aux sommes finies, on trouve comme seule solution les suites de BERNOUILLI ou d'EULER. Ces équations aux différences finies interviennent dans certains problèmes de physique appliquée et ont été utilisées assez récemment en Afrique du Nord pour le calcul des infiltrations sous le barrage du Sarno et la répartition des efforts dans la poutre précontrainte du pont de Djedeida en Tunisie.

§ 1. — DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES

Nous appellerons suite isogène une suite indéfinie de fonctions :

$$f_0(x)\ ;\quad f_1(x)\ ;\quad f_2(x)\ ;\quad \ldots\quad f_n(x)\ ;\ \ldots$$

telle que :

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x)$$

la notation f' désignant la dérivée première par rapport à x de la fonction f.

Le terme général de la suite isogène la plus simple est :

$$f_n(x) = \frac{(x+h)^n}{n\,!}$$

Une suite isogène polynomiale est donc de la forme :

$$f_n(x) = \sum_{s=0}^{n} \frac{a_s}{(n-s)\,!}\, x^{n-s}$$

étant convenu, suivant l'usage, que $o\,! = 1$.

Soient $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ les $n^{\text{ième}}$ polynômes entiers (1) de deux suites isogènes (P) et (Q) :

$$P_n(x) = \Sigma\ \frac{p_\lambda\, x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)\,!}$$

$$Q_n(x) = \Sigma\ \frac{q_\mu\, x^{n-\mu}}{(n-\mu)\,!}$$

Considérons la somme :

$$F(n) = \Sigma\,(-1)^s\, P_s(x)\, Q_{n-s}(x) \tag{1}$$

Je dis que cette somme est une constante; en effet, nous constatons de suite que la dérivée par rapport à x est nulle.

Envisageons maintenant la somme :

$$R_n(x) = 2^{-n}\, \Sigma\, P_s(x)\, Q_{n-s}(x) \tag{2}$$

Je dis que $R_n(x)$ est le terme général d'une nouvelle suite isogène polynomiale. En prenant les dérivées, nous vérifierons que :

$$R_n'(x) = R_{n-1}(x)$$

Revenons alors à $P_n(x)$, on peut écrire :

$$P_n(x) = \alpha_0 Q_n(x) + \alpha_1 Q_{n-1}(x) + \ldots + \alpha_n Q_0(x) \tag{3}$$

La détermination des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ résulte de l'identification des diverses puissances en x en appliquant la relation (3) aux diverses valeurs $n = 0, 1, 2 \ldots n$.

(1) Nous ne considérons que des polynômes entiers, nous nous dispenserons souvent de mettre le qualificatif entier.

$$(4)\quad \begin{cases} p_0 = \alpha_0 q_0 \\ p_1 = \alpha_1 q_0 + \alpha_0 q_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ p_s = \Sigma \alpha_i q_{s-i} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Réciproquement nous pourrons écrire :

$$(5)\ Q_n(x) = \beta_0 P_n(x) + \beta_1 P_{n-1}(x) + \dots + \beta_n P_0(x)$$

et nous aurons :

$$(6)\quad \begin{cases} q_0 = \beta_0 p_0 \\ q_1 = \beta_1 p_0 + \beta_0 p_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ q_s = \Sigma\, \beta_i p_{s-i} \end{cases}$$

La liaison entre les α et les β se détermine immédiatement, c'est :

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha_0\beta_0 = 1 \\ \alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Sigma\, \alpha_i\beta_{s-i} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ainsi donc p_0 *et* q_0 étant deux nombres non nuls (par définition des suites isogènes), on en déduit que les α et β sont bien déterminés. Les équations (7) montrent en outre que si les α sont choisis arbitrairement (sous la réserve que α_0 ne peut être pris égal à zéro), les β seront bien déterminés.

⁂

§ 2. — SUITES ISOGÈNES PARTICULIÈRES

Supposons que la suite isogène $P_n(x)$ soit assujettie à vérifier l'équation fonctionnelle :

$$(8)\qquad P_n(x+1) - P_n(x) = \Omega_{n-2}(x)$$

les polynômes $\Omega_n(x)$ formant eux aussi une suite isogène. Il est facile de voir que ce problème a une solution et une seule; en effet, nous déduisons de suite de (8), grâce à la formule de Taylor :

$$\Omega_{n-1}(x) = \frac{1}{1\,!}\, P_{n-1}(x) + \frac{1}{2\,!} P_{n-2}(x) + \dots + \frac{1}{n\,!}\, P_0(x)$$

Autrement dit, nous connaissons le développement des polynômes $\Omega(x)$ en fonction des polynômes $P(x)$; par suite, nous avons :

$$(9)\ P_n(x) = \alpha_0\Omega_n(x) + \alpha_1\Omega_{n-1}(x) + \dots + \alpha_n\Omega_0(x)$$

et les α se calculent à partir des équations (7), sachant que :

$$\beta_0 = \frac{1}{1\,!};\ \ \beta_1 = \frac{1}{2\,!}\ ;\ \ \beta_2 = \frac{1}{3\,!};\ \dots$$

Nous ferons d'abord la remarque que les α et les β sont indépendants des coefficients de Ω, et nous écrirons à nouveau les équations (7) en donnant aux β leur valeur réelle :

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha_0 \cdot \dfrac{1}{1\,!} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_0 \cdot \dfrac{1}{2\,!} + \alpha_1 \dfrac{1}{1\,!} = 0 \\ \alpha_0 \cdot \dfrac{1}{(s+1)\,!} + \alpha_1 \dfrac{1}{s\,!} + \alpha_2 \dfrac{1}{(s-)1\,!} + \dots = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si nous posons :

$$\alpha_0 = 1\ ;\ \ \alpha_1 = \frac{\gamma_1}{1\,!};\ \ \alpha_2 = \frac{\gamma_2}{2\,!}\ ;\ \dots\ \alpha_s = \frac{\gamma_s}{s\,!}\ ;\ \dots$$

l'équation générale du système (10) devient :

$$1 + \frac{s+1}{1\,!}\gamma_1 + \frac{(s+1)s}{2\,!}\gamma_2 + \dots + \frac{s+1}{1}\gamma_s = 0$$

ou encore en notation symbolique :

$$((\gamma+1))^{s+1} - \gamma_{s+1} = 0.$$

Les nombres γ ainsi déterminés sont identiques aux nombres de Bernouilli car les équations de recurrence (10) admettent un ensemble unique de solutions.

Ainsi, et il convient d'insister un peu, quelque soit la suite isogène $\Omega_n(x)$, la suite isogène $P_n(x)$, solution de l'équation fonctionnelle (8) est donnée par :

(11)

$$P_n(x) = \Omega_n(x) + \frac{\mathcal{B}_1}{1\,!}\Omega_{n-1}(x) + \frac{\mathcal{B}_2}{2\,!}\Omega_{n-2}(x) + \dots$$

Or, nous avons vu que $((\mathcal{B}+z))^n$ est le seul polynôme (à une constante près) satisfaisant à :

$$((\mathcal{B}+z+1))^n - ((\mathcal{B}+z))^n = nz^{n-1}$$

par suite l'équation fonctionnelle :

$$(12)\qquad P_n(x+1) - P_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

admet comme unique solution polynomiale la suite isogène de Bernouilli :

$$B_n(x) = \frac{((\mathcal{B} + x))^n}{n\,!} \tag{13}$$

La suite isogène, solution unique de :

$$P_n(x+1) - P_n(x) = \Omega_{n-1}(x) = \omega_0 \frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!} + \omega_1 \frac{x^{n-2}}{(n-2)\,!} + \omega_2 \frac{x^{n-3}}{(n-3)\,!} + \dots$$

est donc, d'après (11) et (12, 13) fournie par :

$$P_n(x) = \Sigma \frac{\mathcal{B}_s \Omega_{n-s}(x)}{s\,!} = \Sigma \omega_s B_{n-s}(x) \tag{14}$$

Si nous prenons pour suite isogène Ω la suite de Bernouilli, nous aurons :

$$B_{n-1}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!} + \frac{\mathcal{B}_1 x^{n-2}}{1\,!\,(n-2)\,!} + \frac{\mathcal{B}_2 x^{n-3}}{2\,!\,(n-3)\,!} + \dots$$

ce qui conduit, d'après (14), à la solution :

$$P_n(x) = \Sigma \frac{\mathcal{B}_s B_{n-s}(x)}{s\,!}$$

or, il est facile de trouver directement l'unique solution en prenant pour $P_n(x)$ un polynôme du degré n formé à partir de $B_{n-1}(x)$ et de $Bn(x)$:

$$P_n(x) = (x-1)\,B_{n-1}(x) - (n-1)\,B_n(x).$$

On a donc :

$$(x-1)\,B_{n-1}(x) - (n-1)\,B_n(x) \equiv \Sigma \frac{\mathcal{B}_s B_{n-s}(x)}{s\,!} \tag{15}$$

Nous allons généraliser cette remarquable identité.

Considérons à cet effet l'équation :

$$P_n(x+h+1) - P_n(x+h) = \Omega_{n-1}(x+h).$$

Le deuxième membre peut s'écrire en développant en série de Taylor :

$$\Omega_{n-1}(h) + \frac{x}{1\,!}\,\Omega_{n-2}(h) + \frac{x^2}{2\,!}\,\Omega_{n-3}(h) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!}\,\Omega_0(h) = \Omega_{n-1}(x) + \frac{h}{1\,!}\,\Omega_{n-2}(x) + \frac{h^2}{2\,!}\,\Omega_{n-3}(x) + \dots$$

Nous aurons donc, d'après (12) et (14)

$$P_n(x+h) = \Sigma\, \Omega_{n-s}(h)\,.\,B_s(x) = \Sigma B_s(h)\,\Omega_{n-s}(x) \tag{16}$$

or, nous savons que pour :

$$\Omega_n(x) = B_n(x),$$

on a :

$$P_n(x+h) = (x+h-1)\,B_{n-1}(x+h) - (n-1)\,B_n(x+h).$$

Posant $h = y$, il vient :

$$(x+y-1)\,B_{n-1}(x+y) - (n-1)\,B_n(x+y) \equiv \Sigma\, B_{n-s}(x)\,B_s(y) \tag{17}$$

Cette identité, que l'on aurait pu obtenir par application de la formule (19, I), fournira un grand nombre de relations entre les B, en particulier pour $x = y = 0$ et $x = y = \frac{1}{2}$.

Le premier cas conduira à :

$$-n\mathcal{B}_{n-1} - (n-1)\,\mathcal{B}_n = \Sigma\, n_s \mathcal{B}_s \mathcal{B}_{n-s} \tag{18}$$

et le second à :

$$-2^{n-2} n \mathcal{B}_{n-1} = \Sigma\, n_s (2^s - 1)\,\mathcal{B}_s \mathcal{B}_{n-s} \tag{19}$$

Nous retrouverons plus loin cette égalité.

§ 3. — ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES FINIES

Posons :

$$Df(x) = f(x+1) - f(x)$$

nous aurons :

$$D^2 f(x) = Df(x+1) - Df(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$$

Nous allons montrer que :

$$D^n f(x) = f(x+n) - n_1 f(x+n-1) + n_2 f(x+n-2) - \dots$$

En effet, faisons pour un instant :

$$D^n f(x) = f(x+n) - c_1 f(x+n-1) + c_2 f(x+n-2) - \dots$$

nous vérifierons par récurrence que les coefficients C ne dépendent pas de la fonction $f(x)$, prenant alors pour les calculer :

$$f(x) = e^x$$

nous obtiendrons de suite :

$$De^x = e^x (e-1)$$

$$D^2 e^x = e^x (e-1)^2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D^n e^x = e^x (e-1)^n$$

ce qui nous conduit bien aux coefficients du binôme.

*
**

Au paragraphe 2, nous avons résolu l'équation :

$$Df_1(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

lorsqu'on se borne à la recherche des solutions polynomiales. Nous verrons plus tard comment résoudre le problème général.

Nous avons trouvé :

$$f_1(x) = B_n(x)$$

Puis nous avons cherché dans les mêmes conditions la solution de :

$$Df_2(x) = B_{n-1}(x)$$

donc, en fait, la solution de l'équation du deuxième ordre :

$$D^2 f_2(x) = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$$

ce qui nous a donné :

$$f_2(x) = (x-1)\,B_{n-1}(x) - (n-1)\,B_n(x)$$
$$= \Sigma \frac{\mathcal{B}_s}{s!}\,B_{n-s}(x)$$

Nous appellerons $B_n^2(x)$ le polynôme $f_2(x)$ de degré n, les résultats précédents nous permettent d'écrire :

(20) $\quad B_n^2(x+1) - B_n^2(x) = B_{n-1}(x)$

et nous avons montré que :

(21) $\quad B_n^2(x+y) = \Sigma B_s(x)\,B_{n-s}(y)$

$$= (x+y-1)\,B_{n-1}(x+y) - (n-1)\,B_n(x+y)$$

Si nous cherchons à résoudre l'équation du troisième ordre :

(22) $\quad G_n(x+1) - G_n(x) = B^2_{n-1}(x)$

nous serons conduit à une égalité analogue à (21). Nous appellerons $B_n^3(x)$ le $n^{\text{ième}}$ polynôme de la suite isogène, solution de cette équation; nous aurons :

(23) $\quad B_n^3(x+y+z) = \Sigma B_p(x)\,B_q(y)\,B_r(z)$

avec la seule nécessité pour les entiers positifs ou nuls p, q, r de satisfaire :

$$p + q + r = n,$$

la somme Σ s'étendant à toutes ces valeurs possibles de p, q, r.

Nous calculerons directement $B_n^3(x)$ comme nous l'avions fait pour $B_n^2(x)$ et nous trouverons :

(24) $\quad B_n^3(x) = (x-1)\left(\frac{x}{2} - 1\right) B_{n-2}(x)$

$$-(n-2)\left(x - \frac{3}{2}\right) B_{n-1}(x)$$
$$+ \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\,B_n(x).$$

Mais nous aurons aussi, d'après (23) :

$$B_n^3(x) = \Sigma \frac{\mathcal{B}_p}{p!}\,\frac{\mathcal{B}_q}{q!}\,B_r(x)$$

la somme s'étendant à toutes les valeurs entières positives ou nulles de p, q, r, satisfaisant à :

$$p + q + r = n.$$

C'est ainsi que l'on aura :

$$\sum \frac{\mathcal{B}_p}{p!}\,\frac{\mathcal{B}_q}{q!}\,\frac{\mathcal{B}_r}{r!} = \frac{1}{(n-3)!}$$
$$\left[\frac{1}{2}\,\frac{\mathcal{B}_n}{n} + \frac{3}{2}\,\frac{\mathcal{B}_{n-1}}{n-1} + \frac{\mathcal{B}_{n-2}}{n-2}\right]$$

Appelons $B_n^4(x)$ le polynôme qui satisfait à :

$$B_n^4(x+1) - B_n^4(x) = B^3_{n-1}(x)$$

Un calcul analogue aux précédents donne alors :

(25) $\quad B_n^4(x) = \Sigma \frac{\mathcal{B}_p}{p!}\,\frac{\mathcal{B}_q}{q!}\,\frac{\mathcal{B}_r}{r!}\,B_s(x)$

avec l'obligation, pour les nombres entiers positifs ou nuls p, q, r, s, de satisfaire :

$$p + q + r + s = n.$$

Nous savons donc former une solution polynomiale de l'équation :

$$D^4 f(x) = \frac{x^{n-4}}{(n-4)!}$$

Cette équation aux différences finies du quatrième ordre joue un rôle extrêmement important en physique appliquée. C'est pourquoi nous nous sommes étendus peut-être un peu trop longuement sur la théorie des polynômes d'Euler et de Bernouilli.

*
**

§ 4. — Equations aux sommes finies

Considérons maintenant une suite isogène assujettie à vérifier :

(26) $\quad V_n(x+1) + V_n(x) = \Omega_n(x)$

étant entendu que $\Omega_n(x)$ est le $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite également isogène. Nous en déduisons :

$$\Omega_n(x) = 2V_n(x) + \frac{1}{1\,!} V_{n-1}(x) + \frac{1}{2\,!} V_{n-2}(x) + \dots$$

autrement dit on connaît le développement de $\Omega_n(x)$ en fonction de $V_p(x)$:

$$\Omega_n(x) = \beta_0 V_n(x) + \beta_1 V_{n-1}(x) + \beta_2 V_{n-2}(x) + \dots$$

avec :

$$\beta_0 = 2\ ; \quad \beta_1 = \frac{1}{1\,!}\ ; \quad \beta_2 = \frac{1}{2\,!}\ ; \dots$$

Nous savons que nous pouvons alors écrire :

$$V_n(x) = \alpha_0\Omega_n(x) + \alpha_1\Omega_{n-1}(x) + \alpha_2\Omega_{n-2}(x) + \dots$$

et que les α se déduisant des β par :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0\beta_0 = 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Sigma\alpha_i\beta_{s-i} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Nous avons donc :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}$$

puis pour relation générale :

$$(27) \qquad 0 = \alpha_0 \frac{1}{s\,!} + \alpha_1 \frac{1}{(s-1)\,!} + \dots + \alpha_{s-1} \frac{1}{1\,!} + 2\,\alpha_s$$

en posant :

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \frac{\gamma_i}{i\,!}$$

nous transformons la dite équation en :

$$\frac{\gamma_0}{0\,!\,s\,!} + \frac{\gamma_1}{1\,!\,(s-1)\,!} + \dots + \frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)\,!\,1\,!} + \frac{2\gamma_s}{s\,!} = 0$$

ou encore symboliquement :

$$(28) \qquad ((\gamma+1))^s + \gamma^s = 0.$$

Sachant que $\gamma_0 = 1$, cette relation (27) définit les nombres $\mathfrak{E}$ que nous avons étudiés précédemment au chapitre II.

Nous formons donc ainsi le polynôme $V_n(x)$:

$$(29) \qquad V_n(x) = \frac{1}{2}\left[\Omega_n(x) + \frac{\mathfrak{E}_1}{1\,!}\Omega_{n-1}(x) + \frac{\mathfrak{E}_3}{3\,!}\Omega_{n-3}(x) + \dots\right]$$

Au chapitre II, nous avons été conduits à la relation :

$$((\mathfrak{E} + x + 1))^n + ((\mathfrak{E} + x))^n = 2\,x^n$$

par suite nous pouvons affirmer que :

$$(30) \qquad T_n(x) = \frac{1}{n!}((\mathfrak{E} + x))^n$$

définit la seule suite polynômiale isogène satisfaisant à l'équation fonctionnelle :

$$f(x+1) + f(x) = 2\,\frac{x^n}{n!}.$$

Nous dirons, pour simplifier l'exposé, que $T_n(x)$ est la suite isogène d'Euler.

***

La solution de l'équation fonctionnelle :

$$(31) \qquad V_n(x+1) + V_n(x) = 2\Omega_n(x) = 2\left[\omega_0\frac{x^n}{n!} + \omega_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!} + \dots\right]$$

sera donc fournie par l'une ou l'autre des sommes :

$$(32) \qquad V_n(x) = \Sigma\frac{\mathfrak{E}_s}{s\,!}\Omega_{n-s}(x) = \Sigma\omega_s T_{n-s}(x).$$

Cela étant, nous essayerons de former comme précédemment la suite isogène, solution de l'équation :

$$(33) \qquad V_n(x+1) + V_n(x) = T_n(x)$$

solution que nous appellerons $T_n^2(x)$.

Nous trouverons, d'une part, par recherche directe :

$$(34) \quad T_n^2(x) = (n+1)\,T_{n+1}(x) - (x-1)\,T_n^1(x)$$

et d'autre part, par application de la formule (29) :

$$(35) \qquad T_n^2(x) = \frac{1}{2}\,\Sigma\frac{\mathfrak{E}_s}{s\,!}\,T_{n-s}(x).$$

L'égalité des seconds membres des formules (34) et (35) conduira à un certain nombre de relations fort intéressantes; en particulier pour $x = 0$, on aura :

$$\mathfrak{E}_n + \mathfrak{E}_{n+1} = \frac{1}{2}\,\Sigma\,n_s\,\mathfrak{E}_s\,\mathfrak{E}_{n-s}$$

***

§ 5. — LIAISONS ENTRE LES SUITES DE BERNOUILLI ET D'EULER

Nous avons vu que la suite de Bernouilli satisfait à :

$$Df(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

et que celle d'Euler fournit les solutions polynomiales de :

$$Sf(x) = 2\,\frac{x^n}{n!}$$

L'idée la plus immédiate et qui peut être généralisée conduit à rechercher des solutions de :

$$(38)\qquad SDf(x) = 2\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

c'est-à-dire dans le champ limité qui nous intéresse à trouver les solutions génératrices d'une suite isogène de polynômes de l'une ou l'autre des équations :

$$(39)\qquad Df(x) = T_{n-1}(x)$$

$$(40)\qquad Sg(x) = 2\,B_{n-1}(x).$$

Or, la solution de (38) est facile à trouver, l'équation s'écrit en effet :

$$f(x+2) - f(x) = 2\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

ou encore avec $x = 2y$:

$$f(2\overline{y+1}) - f(2y) = 2^n\,\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}$$

la solution polynomiale est par suite :

$$\begin{cases} f(2y) = 2^n B_n(y) \\ f(x) = 2^n B_n\left(\dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$$

Nous aurons donc tout d'abord, d'après (39) et (40) :

$$(41)\qquad T_{n-1}(x) \equiv 2^n\left[B_n\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$(42)\qquad 2B_n(x) \equiv 2^n\left[B_n\left(\frac{x+1}{2}\right) + B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

Puis, en application de la relation (16) :

$$(43)\qquad 2^n B_n\left(\frac{x+y}{2}\right) \equiv \Sigma\, T_{n-s}(x)\, B_s(y)$$

$$\equiv \Sigma\, T_{n-s}(y)\, B_s(x).$$

Les relations (42) et (43) sont assez curieuses, nous retrouverons (42) par la suite.

Quant à l'équation (41), elle n'est qu'un cas particulier d'une formule due à Raabe.

Cette formule de Raabe donne la valeur de la somme :

$$(2p)^{n-1}\sum_{s=0}^{2p-1}(-1)^s B_n\left(\frac{x+s}{2p}\right)$$

La démonstration en est facile, appelons $E(x)$ l'expression ci-dessus et formons :

$$(2p)^{1-n}[E(x+1)+E(x)] = \begin{cases} B_n\left(\dfrac{x+1}{2p}\right) - B_n\left(\dfrac{x+2}{2p}\right) + B_n\left(\dfrac{x+3}{2p}\right) - \dots \\ + B_n\left(\dfrac{x}{2p}\right) - B_n\left(\dfrac{x+1}{2p}\right) + B_n\left(\dfrac{x+2}{2p}\right) - B_n\left(\dfrac{x+3}{2p}\right) + \dots \end{cases}$$

$$= B_n\left(\frac{x}{2p}\right) - B_n\left(\frac{x+2p}{2p}\right) = -\frac{x^{n-1}}{(2p)^{n-1}(n-1)!}$$

Par suite :

$$E(x+1) + E(x) = -\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

La valeur de l'expression $E(x)$ est donc connue, c'est :

$$E(x) = -\frac{1}{2}\,T_{n-1}(x)$$

il en résulte que nous avons :

$$-\frac{1}{2}\,T_{n-1}(x) = (2p)^{n-1}\sum_{s=0}^{2p-1}(-1)^s B_n\left(\frac{x+s}{2p}\right)$$

Cette expression, plus générale que (41), est connue sous le nom de troisième formule de Raabe.

Exercices du Chapitre IV

1° Il existe un grand nombre de suites isogènes polynomiales présentant un grand intérêt en Physique appliquée. Nous aurons l'occasion d'en étudier ultérieurement un certain nombre. En particulier nous nous arrêterons sur les polynômes d'Hermite que nous définirons par la relation :

$$\frac{d^n}{dx^n}\,e^{-x^2} = (-1)^n\, n!\, 2^n\, H_n(x)\, e^{-x^2}$$

Ces polynômes $H_n(x)$ forment une suite isogène qui satisfait à un certain nombre de relations remarquables.

a) Démontrez que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)\, H_q(x)\, H_r(x)\, e^{-x^2}\, dx = 0$$

si les entiers p, q, r étant rangés par ordre croissant, le nombre $\frac{1}{2}(p+q-r)$ n'est pas un entier positif ou nul.

b) Si $\frac{1}{2}(p+q-r)$ est un entier positif ou nul, on peut poser :

$$a = \frac{1}{2}(p+q-r)$$

$$b = \frac{1}{2}(p-q+r)$$

$$c = \frac{1}{2}(-p+q+r)$$

a, b, c étant des entiers positifs ou nuls, montrez que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)\, H_q(x)\, H_r(x)\, e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{a+b+c}\, a!\, b!\, c!}$$

c) Démontrez la relation :

$$2^{\frac{s}{2}} H_s(\sqrt{2}x) = \sum_{n=0}^{n=s} H_n(x)\, H_{s-n}(x)$$

⁂

2° En posant symboliquement :

$$((C+1))^n + C_n = \frac{1}{2}$$

montrer que les nombres C_n ainsi définis sont liés aux nombres $\mathfrak{T}$ par :

$$C_n = \frac{1}{2}\mathfrak{T}_n .$$

⁂

3° $h(z)$ étant un polynôme entier en z, montrer que :

$$h(z) = H(1) - H(0) + \Sigma \lambda_i B_i(z)$$

en posant :

$$H(x) = \int h(x)\, dx .$$

4° n étant le nombre des variables indépendantes x, y, z . . . ;

ε_i des quantités égales à ± 1, soit S_p la somme des 2^n fonctions de la forme :

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n (\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 z + \ldots)^p .$$

On aura :

$$S_p = 0$$

si p est un entier non nul inférieur à n.

Si p est un entier supérieur ou égal à n, on aura :

$$S_n = 2^n\, n!\, xyz$$

$$S_{n+2q+1} = 0$$

$$S_{n+2} = 2^n \frac{(n+2)!}{3!} xyz \ldots (x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)$$

$$S_{n+4} = 2^n \frac{(n+4)!}{5!} xyz \ldots \left(\Sigma x^4 + \frac{4.5}{2.3} \Sigma x^2 y^2 \right)$$

. . . .

5° Soit l'équation :

$$x^s - 1 = 0.$$

Appelons ρ une racine primitive et considérons les 2^{s-1} sommes de la forme :

$$\sigma = 1 \pm \rho \pm \rho^2 \pm \ldots \pm \rho^{s-1}.$$

Notons que :

$$1 - \frac{1}{2}\sigma$$

est une somme de la même famille. Considérons alors la suite isogène de polynômes :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \Sigma \left(x - \frac{\sigma}{2} \right)^n$$

montrer en appliquant soit la formule symbolique fondamentale, soit la théorie des suites isogènes, soit les résultats du chapitre 2 (paragraphe 6), que :

$$P_n(x) = 2^{s-1} T_n(x) + \frac{1}{2!} \Sigma \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 T_{n-2}(x)$$
$$+ \frac{1}{4!} \Sigma \left(\frac{\sigma}{2} \right)^4 T_{n-4}(x) + \ldots$$

⁂

6° On est conduit par l'exercice 5 à l'évaluation de :

$$\Sigma \sigma^{2m}$$

montrer que ces sommes sont nulles si m n'est pas un multiple de s.

7° Montrer que s étant impair :

$$\mathfrak{T}_s = -2^{-2s+1} \Sigma \sigma^s.$$

8° Pour $s = 3$, on a :

$$\Sigma \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 = 0 \ ; \quad \Sigma \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{ms+2} = 0$$

$$\Sigma \left(\frac{\sigma}{2}\right)^4 = 0 \ ; \quad \Sigma \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{ms+4} = 0$$

$$\Sigma \left(\frac{\sigma}{2}\right)^6 = 3 \ ; \quad \Sigma \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{ms+6} = 3$$

de sorte que :

$$\frac{1}{3} \mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{3} 2^{s-1} \mathrm{T}_n(x) + \frac{1}{6!} \mathrm{T}_{n-6}(x) + \frac{1}{12!} \mathrm{T}_{n-12}(x) + \ldots$$

Expliciter cette relation pour $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

9° Considérons maintenant les $2^s - 1$ sommes de la forme :

$$\sigma = 1 \pm \rho \pm \rho^2 \pm \ldots \pm \rho^{s-1}$$

et appelons α le nombre de signes négatifs que contient cette somme.

Définissons par :

$$(n + s + 1)! \, \mathrm{Q}_n(x) = \Sigma (-1)^\alpha \left(x - \frac{\sigma}{2}\right)^{n+s+1}$$

une suite isogène de polynômes.

Posons $m = n + s + 1$. Montrer que :

$$\frac{1}{2} \mathrm{Q}_n'(x) = \frac{1}{1!} \Sigma (-1)^\alpha \frac{\sigma}{2} \mathrm{B}_{m-1}(x) + \frac{1}{3!} \Sigma (-1)^\alpha \left(\frac{\sigma}{2}\right)^3 \mathrm{B}_{m-3}(x) + \ldots$$

10° On est donc conduit à l'étude des sommes :

$$\Sigma (-1)^\alpha \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{2q+1}$$

Montrer que ces sommes sont nulles si $(2q+1)$ n'est pas un multiple de s.

11° Montrer que s étant impair :

$$(s + 2)(s + 3) \ldots 2s \, . \, \mathcal{B}_{s+1} = \Sigma (-1)^\alpha \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{2s}.$$

12° Pour $s = 3$, on aura :

$$m = n + 4$$

$$\frac{1}{6} \mathrm{Q}_n'(x) = \frac{1}{3!} \mathrm{B}_{n+1}(x) + \frac{1}{9!} \mathrm{B}_{n-5}(x) + \frac{1}{15!} \mathrm{B}_{n-11}(x) + \ldots$$

Expliciter cette relation pour $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.