

# Influence de l'élasticité des conduites et galeries sur la célérité du coup de bélier

## Influence of the elasticity of pipes and galleries on the celerity of waterhammer effect

PAR P. ANGLÈS D'AURIAC  
Ancien élève de l'Ecole polytechnique

English synopsis p. 6

Nous supposons connue la formule générale de la célérité du coup de bélier et nous étudions ici :

1° La détermination de l'élasticité des conduites et galeries à partir des caractéristiques des matériaux qui les constituent, et l'application de ces résultats au calcul de la célérité;

2° Le problème inverse, à savoir la détermination des caractéristiques élastiques des matériaux employés (notamment des roches) à partir de mesures expérimentales de célérité.

### Rappel de la formule générale

On connaît la formule de KORTEWEG :

$$a^2 = \frac{g}{\varpi \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right)} \quad (1)$$

$a$  = célérité.

$g$  = accélération de la pesanteur.

$\varpi$  = poids spécifique de l'eau.

$\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  = pressions définies par les relations :

$$\frac{\Delta_1 V}{V} = \frac{\Delta p}{\varepsilon_1} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta_2 V}{V} = \frac{\Delta p}{\varepsilon_2}$$

où  $\Delta_1 V$  est l'augmentation de volume de la conduite et  $\Delta_2 V$  la diminution de volume d'eau provoquées par l'augmentation de pression  $\Delta p$ .

Si l'on appelle  $S$  la section de la conduite et  $U$  la vitesse de l'eau, le domaine d'application de la formule (1) est limité au cas où l'on a :

1)  $\frac{\Delta S}{S}$  petit devant  $\frac{\Delta U}{U}$

2)  $\frac{\Delta S}{S}$  petit devant  $\frac{\Delta p}{p}$

3)  $\Delta V$  petit devant  $V$

4) La conduite se comporte comme si elle était constituée d'anneaux indépendants.

Les deux premières conditions supposent la conduite rigide.

La troisième exige, outre la rigidité de la conduite, l'incompressibilité du liquide.

Enfin la quatrième a été justifiée par MM. ALLIÉVI par les considérations suivantes :

« Le procédé analytique pour établir l'équation différentielle du mouvement varié repose sur l'hypothèse qu'on puisse regarder le tuyau comme formé d'une suite d'éléments annulaires libres de se dilater indépendamment l'un de l'autre, ce qui n'est pas le cas, par exemple, pour des tuyaux en tôles rivées. On peut quelquefois regarder comme légitime cette hypothèse simplificatrice si l'on pense que les variations de pression se propagent le long du tuyau avec une telle vitesse que la différence de pression à un instant donné, entre deux tranches liquides éloignées entre elles de plusieurs multiples du diamètre du tuyau, ne peut être que très petite et, à ce point de vue, l'influence de la raideur longitudinale du tuyau doit être considérée comme négligeable. »

### Elasticité des conduites

Prenons d'abord le cas d'un tuyau métallique mince. Si ce tuyau est tenu axialement, c'est-à-

dire incapable de changer de longueur dans le sens longitudinal (ce qui est presque toujours réalisé pour une conduite longue), on sait que la traction dans le sens périphérique

$$t = \frac{pR}{e}$$

s'accompagne forcément, dans le sens longitudinal, d'une autre traction

$$t_1 = \tau \frac{pR}{e}$$

R : rayon de la conduite,

e : épaisseur,

$\tau$  : coefficient de Poisson = 0,3 pour l'acier.

On établit sans peine que l'élasticité de la conduite s'exprime par :

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{2(1-\tau^2)}{E} \frac{R}{e} = \frac{2(1-\tau^2)}{E} \frac{t}{p} \quad (2)$$

Dans cette formule, E et  $\tau$  sont invariables (pour de l'acier), t varie peu, il n'est fonction que de la qualité de l'acier et de l'audace du constructeur. Au contraire, p varie beaucoup. Plus la chute est grande, plus l'élasticité de la conduite  $\frac{1}{\varepsilon_1}$  devient faible par rapport à l'élasticité de l'eau  $\frac{1}{\varepsilon_2}$ .

Pour fixer les idées, prenons un exemple :

$$H = 100 \text{ m.}$$

$$p = 0,1 \text{ kg/mm}^2.$$

$$t = 5 \text{ kg/mm}^2.$$

$$E = 21.000 \text{ kg/mm}^2.$$

$$\tau = 0,3.$$

$$\frac{E}{1-\tau^2} = 23.000 \text{ kg/mm}^2.$$

$$\varepsilon_1 = 23.000 \times \frac{0,1}{10} = 230 \text{ kg/mm}^2.$$

Pour l'eau :

$$\varepsilon_2 = 220 \text{ kg/mm}^2$$

On trouve alors :

$$a = 1.050 \text{ m/sec.}$$

On voit que c'est aux environs de 100 m de chute que les termes en  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont de même ordre de grandeur.

Considérons maintenant le cas d'un tunnel circulaire dans un milieu indéfini :

Soient R le rayon,

$p_0$  la pression intérieure,

$\varphi$  le rayon en un point quelconque,

p la tension principale radiale,

t la tension principale tangentielle (par rapport au cercle),

h la tension principale axiale,

u le déplacement radial.

On sait que la solution du problème est :

$$p = p_0 \frac{R^2}{\varphi^2}.$$

$$t = -p_0 \frac{R^2}{\varphi^2} \quad (p + t = 0 \text{ en tout point}).$$

$$h = 0.$$

$$u = \frac{1+\tau}{E} p \frac{R^2}{\varphi}.$$

On tire de ces formules :

$$\varepsilon_1 = \frac{E}{2(1+\tau)} \quad (3)$$

d'où :

$$\varepsilon_1 = G.$$

Il reste à connaître les coefficients des roches.

Les résultats donnés par divers expérimentateurs sont assez dispersés.

Des mesures statiques effectuées par NAGAOKA et KUSAKABÉ sur du granit ont donné pour E : 39.000 kg/mm<sup>2</sup> et pour G : 16.900 kg/mm<sup>2</sup>. De plus, E est variable suivant l'origine et l'ancienneté du granit. Un granit archéen a donné 55.000, du primaire 40.500 et du quaternaire 15.000.

Des mesures dynamiques ont donné des chiffres plus élevés, comme s'il y avait une sorte d'hystérésis, E variant de 46.000 à 49.000 kg/mm<sup>2</sup>. Cet hystérésis existe également pour le béton, mais la différence est peu sensible. (Voir V.D.I., 7 mars 1942, article de Erwin Bock, qui donne le chiffre de 300.000 kg/cm<sup>2</sup> comme module d'élasticité du béton à utiliser dans tous les cas d'emploi.)

En outre, l'humidité a une influence importante. Un grès sec donne pour E: 10.000 kg/mm<sup>2</sup>, humidifié : 3.000.

Deux autres savants, ADAMS et GOKER, par des mesures statiques, donnent pour un granit : E = 39.000 à 57.000 kg/mm<sup>2</sup>.

Les répercussions sur la valeur de a ne sont pas négligeables. Si, par exemple, nous nous plaçons dans un granit dans les deux cas extrêmes (E = 50.000 kg/mm<sup>2</sup> et E = 3.000 kg/mm<sup>2</sup>), pour une conduite de 1 m de diamètre et un

$\eta = 0,2$ , on a, par déduction des formules précédentes :

$\epsilon_1 = 20,800$  dans le premier cas et  $1.250$  dans l'autre.

$\epsilon_2$  de l'eau étant  $220$ , on trouve pour  $\epsilon$  défini par  $\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2}$  respectivement  $217$  et  $187$  auquel il correspond pour  $a$  :  $1.460$  m/sec. et  $1.355$  m/sec., soit un écart de l'ordre de  $7 \%$ .

Passons au cas d'une conduite épaisse. Les formules de LAMÉ donnant les contraintes et les déplacements sont bien connues. Nous en donnons, ci-dessous, une traduction graphique qui se prête très bien à l'étude de la combinaison de plusieurs tuyaux épais concentriques, l'un d'eux pouvant être, en particulier, le milieu extérieur indéfini.

Etudions d'abord le cas d'un seul tuyau. Prenons le rayon intérieur  $R$  comme rayon de référence et posons :

$$\lambda = \frac{R^2}{\varphi^2}$$

$\varphi$  étant le rayon d'un cercle variable.

Nous portons  $\lambda$  en abscisse vers la droite sur la figure 1.

Portons  $p$  et  $t$  en ordonnée. Comptons positives les pressions et négatives les tractions. La variation de  $p$  est linéaire en fonction de  $\lambda$ .

Si donc on connaît la pression intérieure du tuyau figurée par le point A d'abscisse 1 et la pression extérieure au tuyau figurée par le point B d'abscisse

$$\lambda_0 = \frac{R^2}{R_0^2}$$

où  $R_0$  est le cercle extérieur, on connaît  $p$  en tout point du tuyau en traçant la droite AB.

La traction périphérique  $t$  s'obtient par la construction suivante :

On prolonge AB jusqu'à I et l'on trace ICD

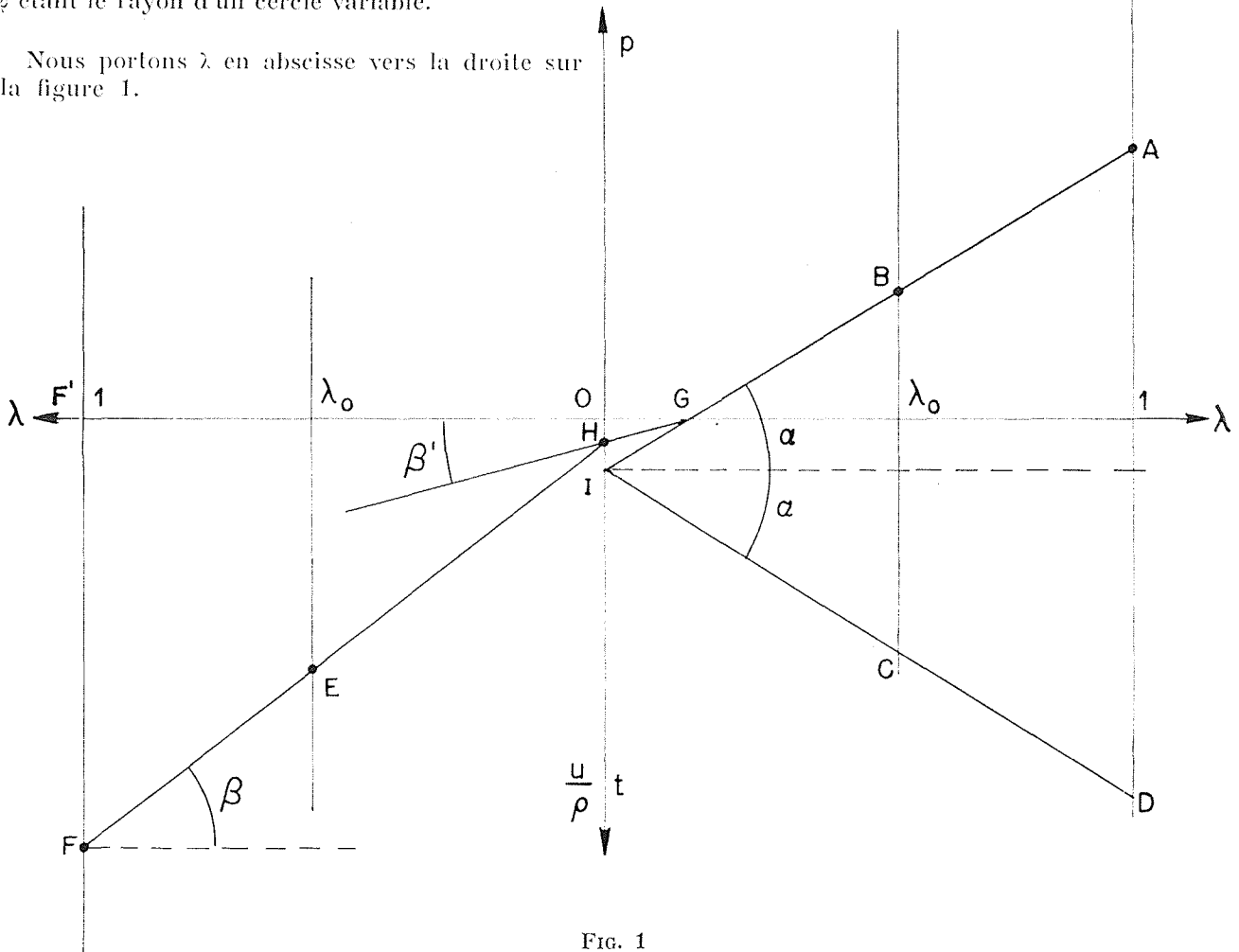


FIG. 1

symétrique de IBA par rapport à l'horizontale passant par I. Les déplacements s'obtiennent par la construction suivante :

Soit  $\alpha$  l'angle que AB fait avec l'horizontale; on mène GH faisant l'angle  $\beta'$  avec l'horizontale et HEF faisant l'angle  $\beta$  avec l'horizontale.

Les angles  $\beta'$  et  $\beta$  sont donnés par les formules suivantes.

Pour une déformation axiale nulle :

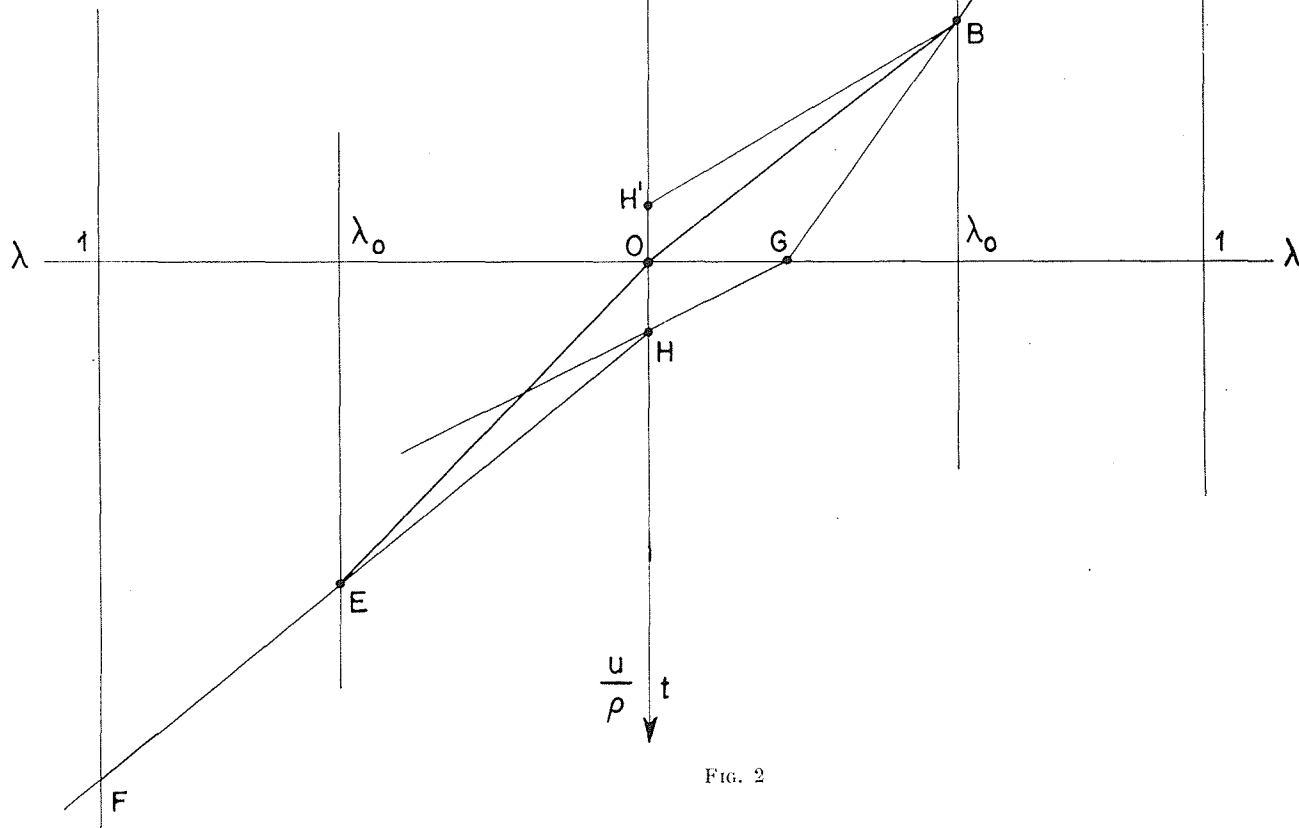
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta' &= \frac{(1 + \eta)(1 - 2\eta)}{E} \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{1 + \eta}{E} \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

Pour une déformation axiale libre :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta' &= \frac{1 - \eta}{E} \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{1 + \eta}{-E} \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \quad (5)$$

La droite EF donne les déplacements relatifs  $\frac{u}{\varphi}$ , par les ordonnées de ses points. Quant aux abscisses, ce sont les mêmes que sur la partie droite du diagramme, à savoir :

$$\lambda = \frac{R^2}{\varphi^2}$$



L'élasticité de la conduite est :

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{\Delta V}{\rho V} = \frac{\Delta S}{\rho S} = \frac{2u}{\rho R} = \frac{2FF'}{p}$$

Pour montrer le parti que l'on peut tirer de cette construction, traitons par exemple le cas d'un tuyau épais en béton enrobé dans un massif infini (fig. 2). Supposons le problème résolu. Soit FEHGBA le diagramme relatif à la conduite en béton, la partie utile de ce diagramme étant FE et BA, et soit EOB le diagramme relatif au massif extérieur. Ces diagrammes se raccordent forcément aux points E et B d'abscisse :

$$\lambda_0 = \frac{R^2}{R_0^2}$$

R étant le rayon intérieur de la conduite et  $R_0$  son rayon extérieur.

FIG. 2

Connaissant les caractéristiques élastiques du massif, nous connaissons le rapport des deux pentes OE et OB.

D'autre part, d'après les caractéristiques élastiques du béton, nous connaissons le rapport des 3 pentes FEH, HG et GBA. Mais nous ne connaissons pas d'avance de relation entre une pente du groupe de 2 et une du groupe de 3. Malgré cela, nous pouvons tracer la figure sans tâtonnement de la façon suivante :

Nous commençons par ne pas préciser l'échelle des  $\lambda$  et nous traçons un segment HG quelconque. Nous pouvons donc tracer la direction GBA ainsi que la direction HEF, mais sans savoir où se trouve le point d'abscisse  $\lambda_0$ .

Ce point est déterminé par la condition que le rapport de la pente de OB à la pente de OE a une valeur connue, soit K. On porte donc :

$$OH' = K \cdot OH$$

et l'on trace la droite H'B avec une pente égale à K fois la pente de EH.

L'intersection de H'B avec GB fixe le point B, d'où l'abscisse  $\lambda_0$ , et tout le diagramme est déterminé.

*Problème inverse*

Nous pouvons tirer de la formule (1) :

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{\overline{\omega}}{g} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\varepsilon_2}$$

Supposons  $\frac{1}{\varepsilon_1}$  et  $\frac{1}{\varepsilon_2}$  respectivement proportionnels à deux nombres  $\alpha$  et  $1 - \alpha$ .

L'erreur relative sur  $\frac{1}{\varepsilon_1}$  sera égale à l'erreur relative sur  $\frac{\overline{\omega}}{g} \frac{1}{a^2}$ , multipliée par  $\frac{1}{\alpha}$ , plus l'erreur relative sur  $\frac{1}{\varepsilon_2}$ , multipliée par  $\frac{1 - \alpha}{\alpha}$ ,

Négligeons l'erreur sur  $\frac{\overline{\omega}}{g}$ . La célérité  $a$  peut être mesurée au 1/1.000. L'erreur relative sur  $\frac{\overline{\omega}}{g} \frac{1}{a^2}$  sera donc 2/1.000. Quant à l'élasticité de l'eau  $\frac{1}{\varepsilon_2}$ , nous admettons qu'on la connaît au 5/1.000.

L'erreur relative sur  $\varepsilon_1$  sera donc :

$$\frac{2}{1.000 \alpha} + \frac{5(1 - \alpha)}{1.000 \alpha} = \frac{7 - 5 \alpha}{1.000 \alpha}$$

On voit que cette erreur est d'autant plus faible que  $\alpha$  est grand, c'est-à-dire que l'élasticité de la conduite est grande par rapport à celle de l'eau.

Pour une conduite métallique ou en béton, sous une chute moyenne,  $\alpha$  peut être de l'ordre de 1/2; on connaît alors  $\varepsilon_1$  et par suite  $\frac{E}{1 - \eta^2}$  à 1/100° près, ce qui est, dans certains cas, intéressant.

Prenons maintenant le cas extrême d'une conduite très rigide : à savoir un tunnel dans un massif infini d'une roche très dure.

Nous avons vu que, dans ce cas :

$$\varepsilon_1 = \frac{E}{2(1 + \eta)} = G.$$

Supposons :

$$G = 20.000 \text{ kg/mm}^2$$

$$\varepsilon_2 = 220 \text{ kg/mm}^2$$

$\alpha$  est donc de l'ordre de 1/100° et l'erreur relative sur  $\varepsilon_1$  est 70/100, ce qui montre que la mesure n'a, dans ce cas, aucun intérêt.

