

NOTULE HYDRAULIQUE HYDRAULIC BRIEFS
--

## Déviatation d'un jet liquide par une plaque normale à son axe

Détermination de la surface libre par analogie électrique

Deviation of a liquid jet by means  
of a plate normal to the axis of the former

Determination of the free surface by electrical analogy

*English synopsis, p. 768*

L'analyse des phénomènes d'écoulement curviligne constitue un des buts importants de la mécanique des fluides; en effet, il est souvent nécessaire de connaître la vitesse d'écoulement ou la pression en un point au sein d'une veine liquide ou le long d'une paroi. La considération d'une veine liquide unique est inadéquate à la solution du problème. D'autre part, l'hydrodynamique classique a développé des méthodes rationnelles dont l'application se limite à des cas relativement simples. Dès que les frontières délimitant l'écoulement sont quelque peu compliquées, une solution mathématique devient extrêmement complexe ou souvent impossible.

La construction graphique d'un réseau maillé se présente alors comme un moyen d'analyse très utile dans de tels cas, pourvu que l'écoulement soit à deux dimensions seulement. L'emploi du réseau maillé permet la détermination d'une surface libre, mais alors la solution est indirecte. Il faut supposer une surface, construire le réseau et vérifier si la variation de pression le long de cette surface est nulle; si cette condition n'est pas réalisée, la surface libre qu'on avait supposée est fautive et il faut recommencer. Si l'écoulement est à trois dimensions, l'emploi des réseaux maillés est difficile et souvent peu précis. Les lignes de courant et les équipotentielles telles

que définies pour un fluide idéal existent toujours, mais, tout en se rencontrant à angle droit, ne forment plus de mailles carrées. On obtient plutôt des rectangles aux dimensions variables dont l'exactitude ne peut être vérifiée que par intégration graphique, procédé qui demande beaucoup de travail, surtout s'il doit être répété plusieurs fois lors de la recherche d'une surface libre.

L'analogie électrique appliquée à l'hydrodynamique nous offre heureusement une solution expérimentale précise, qui s'obtient dans un minimum de temps une fois l'appareil réalisé. Elle est utilisée depuis longtemps avec avantage pour la solution de problèmes d'écoulement à deux dimensions. En principe, elle est basée sur le fait que la circulation d'un courant électrique à travers un conducteur homogène suit les mêmes lois que l'écoulement irrotationnel ou non visqueux d'un liquide à travers un espace géométriquement semblable au conducteur électrique. En d'autres termes, le taux de variation du potentiel électrique  $\frac{dE}{ds}$  le long d'une ligne de courant électrique est proportionnel au taux de variation du potentiel de vitesse  $\frac{d\varphi}{ds}$  le long de la ligne de courant homologue dans le liquide. Puisque la

vitesse  $v$  est proportionnelle au taux de variation du potentiel de vitesse, les égalités approximatives suivantes peuvent s'écrire pour une faible distance le long d'une ligne de courant :

$$v \cong \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \cong C \frac{\Delta E}{\Delta s}$$

d'où :

$$\frac{v}{V_0} \cong \frac{\Delta E}{\Delta E_0} \quad \text{Equation (1)}$$

Négligeant la perte de charge, l'équation de BERNOULLI peut se réduire à la forme suivante (1) :

$$\frac{p - p_0}{\frac{\rho V_0^2}{2}} = 1 - \left( \frac{v}{V_0} \right)^2 \quad \text{Equation (2)}$$

$p_0$  = la pression en un point où la vitesse est  $V_0$ .

$V_0$  = la vitesse initiale du jet.

$p$  = la pression où la vitesse est  $v$ .

$\rho$  = la densité absolue du liquide.

Après avoir mesuré la distribution du potentiel électrique à travers un conducteur, on peut calculer, à l'aide des équations (1) et (2), la distribution de vitesse et de pression à travers une zone d'écoulement géométriquement semblable.

L'emploi de l'analogie électrique pour la solution de problèmes d'écoulement à trois dimensions a été récemment utilisée avec succès, à l'Iowa Institute of Hydraulic Research, State University of Iowa, grâce à deux années de recherches subventionnées par le Bureau of Ships (U.S. Navy), d'après le contrat N° 24084. La méthode est décrite dans les publications suivantes : « Exploratory Tests on Application of the Three-Dimensional Electrical Analogy », par Philip-G. HUBBARD, rapport fait au Bureau of Ships par l'Institut; « Use of the Three-Dimensional Electrical Analogy in the Design of Conduit Contractions », thèse de Doctorat soumise à l'Université d'Iowa, par Mohamed M. HASSAN. Un article par ROUSE et HASSAN, résumant ce dernier travail a paru dans le numéro de mars 1949 de la revue *Mechanical Engineering*, sous le titre « Cavitation-Free Inlets and Contractions ». Cette technique, qui s'applique aux problèmes d'écoulement présentant un axe de symétrie, consiste à ne représenter qu'un segment de la zone d'écoulement au lieu d'en faire la représentation complète. On donne à ce segment un angle au centre suffisamment petit pour que la frontière délimitant l'écoulement puisse être courbée dans un

seul plan sans erreur appréciable. Ce segment de la zone d'écoulement est représenté par un électrolyte reposant sur une plaque de verre inclinée, entre deux électrodes verticales et une bande flexible en plastique épousant la forme de la frontière à étudier. L'axe de symétrie est la droite formée par la rencontre du plan de la surface libre de l'électrolyte avec la surface du verre incliné.

Cette méthode expérimentale fut employée par l'auteur du présent article pour la détermination de la surface libre d'un jet circulaire animé d'une grande vitesse, frappant une plaque normale à son axe. Cette recherche fut exécutée comme travail expérimental requis pour l'obtention du titre de Maître ès Sciences de l'Université d'Iowa, sous la direction du docteur Hunter ROUSE, directeur de l'Iowa Institute of Hydraulic Research. Le travail était subventionné conjointement par l'Iowa Institute of Hydraulic Research et par l'Office of Naval Research. Le problème consistait à déterminer par essais successifs la forme à donner à la feuille de plastique pour que la chute de potentiel tout le long de cette paroi soit constante, d'où, par analogie, la surface libre, le long de laquelle la pression et la vitesse sont constantes. Puisqu'il fallait connaître avec précision la variation de potentiel électrique le long de cette paroi, des pointes exploratrices en cuivre y furent installées en permanence et leur espacement mesuré avec précision. La mesure de la chute de potentiel fut remplacée par la mesure de la résistance entre deux pointes exploratrices consécutives au moyen d'un pont de Wheatstone très précis utilisant un milli-voltmètre électronique pour équilibrer le pont selon la méthode du courant nul. La distance entre deux fils consécutifs étant faible à l'échelle du modèle, il était permis de supposer que la variation de résistance  $\frac{\Delta R}{\Delta s}$  était proportionnelle à la vitesse existant à mi chemin entre les deux fils. Il fallait que  $\frac{\Delta R}{\Delta s}$  fut constant tout le long de la paroi puisque l'accélération due à la pesanteur était négligée. En effet, la vitesse initiale du jet étant très grande, le nombre de FROUDE est aussi très grand et l'effet de la pesanteur négligeable.

La figure 1 est une photographie du modèle où apparaissent les pointes exploratrices installées à travers la membrane flexible simulant la surface libre et à travers la plaque rigide normale à l'axe du jet. La figure 2 montre une vue générale de l'installation incluant : le modèle (1); une boîte à commutateurs (2); un milli-voltmètre (3); un potentiomètre (4); des condensateurs variables (5 et 6) permettant d'équilibrer le pont. La figure 3 présente un schéma des connexions électriques. La réalisation de l'appareil, de même que

(1) ROUSE (H). — *Elementary Mechanics of Fluids*, John Wiley & Sons, Inc., 1946, p. 51.

son utilisation, requièrent beaucoup de précautions qui sont décrites dans les publications déjà mentionnées. On y donne les renseignements nécessaires sur le diamètre des pointes exploratri-

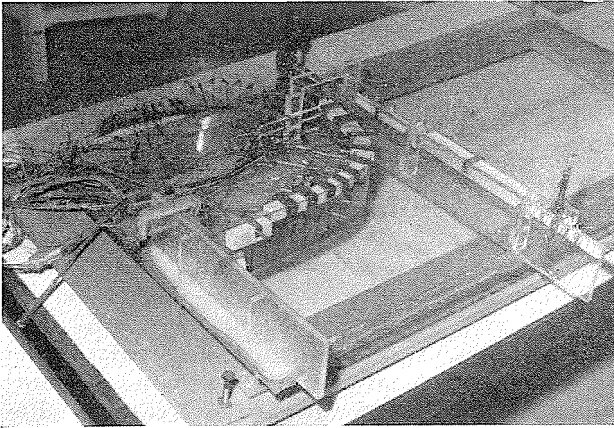


FIG. 1. — Photographie du modèle réalisé pour l'analyse de l'écoulement d'un jet frappant une plaque normale à son axe.

ces, l'intensité du courant, la concentration de l'électrolyte et autres détails.

La figure 4 est une représentation graphique des résultats présentés sur une base adimensionnelle. La surface libre déterminée par analogie électrique  $y$  est indiquée. La chute de potentiel tout le long de cette ligne fut trouvée sensiblement constante, ne variant que de 1% en plus ou en moins de la moyenne.

Comme on devait s'y attendre, la ligne qui représente cette surface vient se confondre à sa

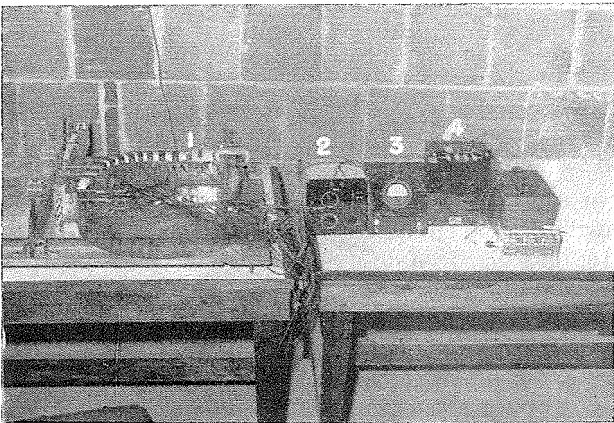


FIG. 2. — Vue générale de l'installation.

base avec la courbe d'équation  $\frac{y}{r_0} = \frac{r_0}{2r}$  obtenue par le principe de continuité pour une source rectiligne. En effet, en supposant la vitesse ra-

diale constante à travers le jet, on peut écrire l'équation suivante :

$$\pi r_0^2 V_0 = 2\pi r y V_0$$

où  $r_0$  est le rayon initial et  $V_0$  la vitesse initiale du jet. Théoriquement, c'est à l'infini que les deux courbes devraient se confondre, mais on voit qu'elles sont tellement près l'une de l'autre là où l'électrode était située, qu'à partir de ce point on peut calculer la ligne de jet sans erreur appréciable, en utilisant l'équation de continuité. Puisque l'équation de continuité s'applique pour  $\frac{r}{r_0} > 2,30$ , cela signifie que, de la plaque à la surface libre, la vitesse est sensiblement constante et égale à  $V_0$ . Ceci fut mesuré électriquement en installant dans la plaque des pointes exploratrices en cuivre et en mesurant la variation de potentiel. La courbe  $\frac{v}{V_0}$  fut ainsi obtenue. A l'axe, la vitesse est nulle, puisque nous avons un point

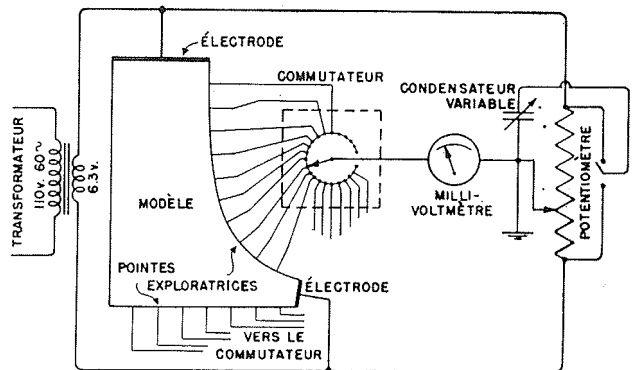


FIG. 3. — Circuit électrique utilisé par l'Iowa Institute of Hydraulic Research.

d'arrêt, puis il y a accélération jusqu'à ce que la vitesse devienne presque égale à  $V_0$  à l'électrode. La courbe  $\frac{v}{V_0}$  tend vers l'unité à la limite.

La mesure de la vitesse le long de la plaque a permis aussi de connaître la pression grâce à l'équation (2) de BERNOULLI écrite pour un fluide idéal. A l'aide de cette courbe des pressions, la poussée verticale exercée  $Fy$  sur la plaque fut calculée en planimétrant l'aire comprise sous la courbe d'ordonnée  $2\pi \frac{r}{r_0} \frac{p}{\rho V_0^2}$  et d'abscisse  $\frac{r}{r_0}$

puisque :

$$\frac{Fy}{\rho Q_0 V_0} = \int_0^\infty 2\pi \frac{p}{\rho V_0^2} \frac{r}{r_0} d\left(\frac{r}{r_0}\right) = 1.$$

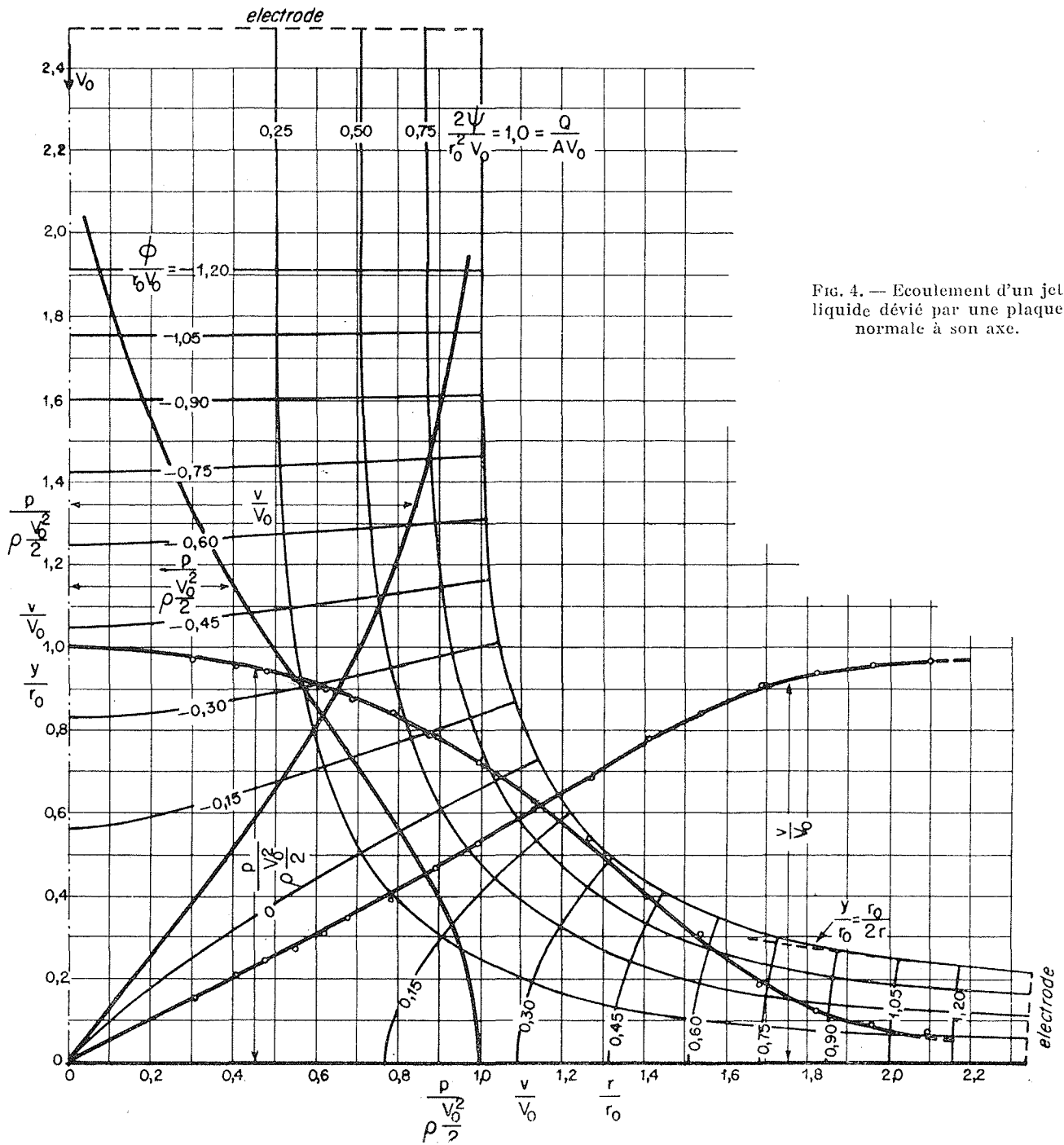


FIG. 4. — Ecoulement d'un jet liquide dévié par une plaque normale à son axe.

Ce rapport fut trouvé remarquablement voisin de la valeur théorique ci-dessus, indiquant que le théorème de la quantité de mouvement était satisfait. Sur la figure 4 apparaissent aussi les lignes de courant et les équipotentielles qui définissent l'écoulement à l'intérieur de la veine. Une première approximation des lignes de courant fut obtenue graphiquement et servit de point de départ pour l'emploi de la méthode de relaxation

de R. V. SOUTHWELL (2). Une fois ces lignes de courant établies avec précision, les lignes équipotentielles furent tracées en joignant les points de même potentiel sur la ligne de jet et sur la plaque, tel que donné par l'analogie électrique de façon qu'elles rencontrent les lignes de courant

(2) SOUTHWELL (R.-V.). — *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, 1946.

à angle droit. La distribution de vitesse et de pression le long de l'axe du jet fut alors obtenue en traçant la courbe  $\frac{\varphi}{r_0 V_0}$  en fonction de  $\frac{y}{r_0}$ .

L'étude de ce problème et la solution précise obtenue par l'emploi de l'analogie électrique donnent lieu à certaines remarques sur quelques problèmes d'hydraulique qui s'y rattachent.

En 1921, William MONROE WHITE présente un nouveau type de diffuseur pour turbine à réaction dont le principe est ce qu'il appelle « l'Action Hydrocone » de l'eau (3). Il définit par « action hydrocone » le phénomène qui se produit lorsqu'un jet d'eau vient frapper normalement une surface et est dévié par elle. La méthode pour transformer en énergie de pression l'énergie cinétique de l'eau sortant d'une turbine consiste à forcer le jet à frapper une plaque plane, conique ou concave, pour changer sa direction et à placer autour du jet une enveloppe de même diamètre au début, mais s'écartant graduellement de la forme qu'aurait le jet en écoulement libre. Cette enveloppe graduellement divergente a pour effet de transformer en énergie de pression l'énergie de vitesse de l'eau sortant de la turbine.

En 1900, lors d'une recherche en vue de déterminer la formule du tube de PITOR, W. M. WHITE avait déterminé les lignes de courant et les vitesses à travers un jet vertical frappant une plaque normale à son axe (4). L'étude, faite à l'aide du tube de PITOR, a bien révélé ce qui se passe à l'intérieur du jet. Le long de l'axe, la vitesse diminue graduellement pour devenir nulle au point d'arrêt, ce qui est confirmé par l'analogie électrique. Ce fait contredit heureusement une opinion que l'on retrouve assez souvent dans la littérature scientifique du temps : l'existence d'un cône d'eau immobile à l'intérieur du jet, qui se formait naturellement et sur lequel l'eau venait glisser. La mécanique des fluides ne peut admettre l'existence d'une telle zone de séparation, car la séparation ne peut se produire que près d'une paroi, dans une région où la vitesse a été réduite par résistance visqueuse; l'absence de toute paroi le long de l'axe du jet rend impossible la formation d'une zone de séparation, même s'il y a ralentissement à mesure que les particules s'approchent du point d'arrêt.

Par contre, le long des parois du diffuseur, la

séparation est possible et probable, surtout si la paroi s'éloigne trop rapidement de la forme naturelle du jet. La symétrie de l'écoulement est alors brisée et l'insertion d'un cône à l'intérieur du diffuseur aidera à stabiliser l'écoulement, réduisant ainsi les pertes. Ces cônes, assez fréquemment utilisés, causent des pertes additionnelles par frottement, mais peuvent être désirables s'ils font disparaître une turbulence trop forte due à l'instabilité du jet.

Si nous suivons une particule qui n'est pas sur l'axe, elle est ralentie d'abord, puis accélérée après avoir changé de direction pour reprendre enfin sa vitesse initiale. Le phénomène est un magnifique exemple d'écoulement irrotationnel où les pertes d'énergie sont nulles, en dehors de la couche limite qui prend naissance le long de la plaque. L'action hydrocone, telle que définie par WHITE, est un moyen de changer de 90° la direction d'un jet d'eau avec un très bon rendement, mais n'a en soi aucune propriété de recouvrement d'énergie. La récupération d'énergie vient du seul fait qu'on éloigne graduellement l'enveloppe du jet libre. La section finale étant plus grande que la section initiale, l'eau est ralentie et la succion est augmentée à la sortie de la turbine. C'est là toute la cause du recouvrement et le ralentissement des particules à l'intérieur du jet n'a rien à faire avec cette récupération puisque ces mêmes particules sont accélérées par la suite.

Quant à la surface libre telle que trouvée par analogie électrique, en supposant une vitesse constante le long de cette surface, elle ne doit pas nécessairement coïncider avec celles des autres cas où l'attraction terrestre joue un rôle plus ou moins important. C'est pourquoi on ne peut la comparer avec celle obtenue par mesure directe sur un jet vertical de vitesse finie.

Il est un autre phénomène sur lequel les résultats présentés en figure 4 de cet article viennent jeter quelque lumière : c'est l'érosion du béton par des jets d'eau à grande vitesse. Les ingénieurs du « United States Bureau of Reclamation » ont soumis des blocs de béton à de tels essais, et les résultats de ces essais furent publiés en 1938 dans les rapports finals concernant le « Boulder Canyon Project ». Dans le bulletin n° 1, intitulé « Model Studies of Spillways », au chapitre VI (« Erosion of Concrete Blocks by High Velocity Jets »), on lit que, dans le but de vérifier si le béton était un matériau utilisable pour la construction des tunnels de 50 pieds de diamètre projetés pour Boulder Dam, des blocs de béton furent soumis à l'usure par un jet d'eau de 1 pouce de diamètre, à des vitesses de 100 à 175 pieds par seconde. Le jet était dirigé verticalement et venait frapper la surface du béton à des angles de 5°, 30°, 45°

(3) WHITE (W.-M.). — *The Hydrocone Regainer, its Development and Application in Hydroelectric Plants*. Trans. A.S.M.E., 1921.

(4) WHITE (W.-M.). — *The Pitot Tube; its Formula*. Journal of the Association of Engineering Societies, 1901.

et 90°. Pour un angle de 90°, on a constaté avec une certaine surprise que la surface endommagée avait la forme d'un anneau large d'environ 1 pouce, dont le diamètre intérieur avait à peu près 2 pouces. Commentant le phénomène (5), J. E. WARNOCK déclarait que l'état actuel des connaissances sur l'érosion et la cavitation ne pouvait fournir une explication suffisante du phénomène. Cependant, en considérant les résultats obtenus par analogie électrique et par calcul pour un fluide idéal et en les modifiant par la théorie de la couche limite, il semble que l'on peut attribuer à la cavitation l'érosion constatée et expliquer pourquoi elle s'est produite en forme d'anneau.

Pour qu'il y ait cavitation, il faut que la pression soit abaissée en un point, suffisamment pour qu'il y ait formation de bulles de vapeur d'eau, qui vont s'écraser plus loin, créant des surpressions, des ondes de choc, qui endommagent la surface. Or, il suffit que de l'eau à très haute vitesse s'écoule sur une surface rugueuse pour qu'il y ait cavitation; toute protubérance de la paroi que le fluide doit contourner engendre un écoulement curviligne et une région de basse pression, favorable à la cavitation et à l'érosion qui s'ensuit. Les résultats pour un jet idéal montrent que la vitesse augmente radialement jusqu'à une valeur limite asymptotique, égale à la vitesse initiale du jet. Pour un jet où la résistance visqueuse le long de la plaque joue un certain rôle, la vitesse tout près de la plaque augmente d'abord radialement jusqu'à une valeur maximum moindre que la vitesse initiale du jet, puis commence à diminuer. C'est dans cette zone annulaire de vitesse maximum que se produira la cavitation. Cependant, puisque la vitesse à la plaque même est nulle, il est nécessaire que les protubérances de la paroi s'avancent assez loin à travers la couche limite pour atteindre des filaments où la vitesse est suffisamment grande; évidemment, une surface peut être assez lisse pour être à l'épreuve de toute cavitation. Les ingénieurs du U.S.B.R. ont d'ailleurs constaté qu'une surface rugueuse s'endommage plus facilement qu'une surface lisse, puis-

qu'en page 172 du rapport déjà mentionné (6) nous lisons \*: "The surface texture of the concrete had some influence on the resistance to erosion. Most of the blocks were exposed to the jet on the bottom side, which had been cast against the base plate. Surfaces on blocks G-1 and G-2, which were tested on a face cast vertically against sheet-metal-lined forms, resisted erosion as well as test faces on the bottom of the blocks. The upper, troweled, laitance-bearing surface of block A-2 was unintentionally subjected to the water jet for five days, and was found to be far less resistant to erosion than the opposite, bottom face of the same block." Enfin, on peut apporter une autre raison pour laquelle l'érosion prend la forme d'un anneau de rayon extérieur fini au lieu de régner sur toute la surface extérieure à un certain rayon; c'est que l'épaisseur de la couche limite augmente radialement et qu'elle finit par enrober totalement les protubérances de la paroi. Tout se passe alors comme si la surface était parfaitement lisse, et la cavitation disparaît.

L'analogie électrique se révèle un moyen très précis de faire l'étude d'un écoulement curviligne pour un fluide idéal, et les résultats qu'on en tire peuvent être très utiles, surtout si on les modifie par ce que l'on sait de l'influence d'une paroi sur un fluide où la viscosité joue un rôle qui n'est pas tout à fait négligeable.

ANDRÉ LECLERC, M.S. (Iowa),  
Assistant-professeur d'Hydraulique,  
Ecole Polytechnique de Montréal.

(6) *Model Studies of Spillways*. Boulder Canyon Project Final Reports. Part VI Hydraulic Investigations. U.S. Bureau of Reclamations.

\* INTERPRÉTATION FRANÇAISE. — L'état de surface du béton avait une certaine influence sur sa résistance à l'usure. La plupart des blocs étaient soumis au jet par leur face inférieure, celle qui, lors de la coulée, correspondait au fond du moule. Pour les blocs G<sub>1</sub> et G<sub>2</sub>, on soumit aux essais une face moulée verticalement contre une paroi recouverte d'une feuille métallique: la résistance de cette face à l'érosion s'avéra aussi bonne que celle de la face inférieure. Par contre, le bloc A<sub>2</sub> fut, par erreur, soumis pendant cinq jours à un jet d'eau frappant sa face supérieure, lissée à la truelle et laitueuse: la résistance de cette face à l'usure fut beaucoup moins bonne que celle de la face inférieure du même bloc.

(5) WARNOCK (J.-E.). — *Cavitation in Hydraulic Structures*. Symposium, Trans. A.S.C.E., Vol. 112, 1947, p. 122.